BULLETIN DE LA S. M. F.

M. FOUCHÉ

Remarques sur la méthode des périmètres pour calculer le nombre π

Bulletin de la S. M. F., tome 18 (1890), p. 135-138
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1890__18__135_1>

Remarques sur la méthode des périmètres pour calculer le nombre π; par M. Maurice Fouché.

La méthode des périmètres repose, comme on sait, sur la formule qui fait connaître le périmètre d'un polygone régulier inscrit de $2n$ côtés quand on connaît celui du polygone régulier de n côtés inscrit dans la même circonférence. Dans la plupart des Ouvrages de Géométrie, on ne fait pas observer que les radicaux superposés qui figurent dans cette formule peuvent être séparés. Cependant cette circonstance conduit à des formules plus simples et plus symétriques que celles qui sont communément enseignées. Du reste, au lieu de séparer les radicaux de la formule classique, il est préférable d'obtenir directement la formule définitive par la méthode suivante.

Je désignerai en général par c_n^k le côté du polygone régulier de n côtés et d'espèce k inscrit dans un cercle de rayon r. A l'aide du triangle rectangle qui a pour hypoténuse le diamètre et pour hauteur $\frac{1}{2}c_n^k$, on obtient immédiatement

$$(c_{2n}^k)^2 + (c_{2n}^{n-k})^2 = 4r^2,$$
$$c_{2n}^k . c_{2n}^{n-k} = rc_n^k,$$

d'où

$$c_{2n}^{n-k} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{4r^2 + 2rc_n^k} + \sqrt{4r^2 - 2rc_n^k}\right),$$

et

$$c_{2n}^k = \frac{1}{2}\left(\sqrt{4r^2 + 2rc_n^k} - \sqrt{4r^2 - 2rc_n^k}\right),$$

Pour passer au périmètre p, il suffira de multiplier les deux membres par $2n$. Nous nous bornerons aux polygones de première espèce, et nous trouverons, en supprimant l'indice k,

$$p_{2n} = \sqrt{2nr}\left(\sqrt{2nr + p_n} - \sqrt{2nr - p_n}\right).$$

Pour le périmètre du polygone circonscrit, on aura, a désignant l'apothème,

$$\frac{P_n}{p_n} = \frac{r}{a_n} = \frac{2r}{\sqrt{4r^2 - c_n}} = \frac{2nr}{\sqrt{4n^2r^2 - p_n^2}}.$$

Le radical qui figure dans cette formule est le produit des deux précédents.

Si l'on suppose $r = 1$, les formules deviennent

$$P_n = p_n \frac{2n}{\sqrt{4n^2 - p_n^2}}, \tag{1}$$

$$p_{2n} = \sqrt{2n}\left(\sqrt{2n + p_n} - \sqrt{2n - p_n}\right). \tag{2}$$

Ces formules peuvent encore être notablement simplifiées ; la relation (2) peut s'écrire

$$p_{2n} = \frac{2p_n}{\sqrt{1+\frac{p_n}{2n}}+\sqrt{1-\frac{p_n}{2n}}}.$$

Si alors on pose

$$\alpha_n = \sqrt{1+\frac{p_n}{2n}}, \qquad \beta_n = \sqrt{1-\frac{p_n}{2n}},$$

on aura

$$\frac{1}{P_n} = \frac{1}{p_n}\alpha_n\beta_n, \tag{3}$$

$$\frac{1}{p_{2n}} = \frac{1}{p_n}\frac{\alpha_n+\beta_n}{2}, \tag{4}$$

d'où résulte la suite des calculs.

On peut aussi se proposer de calculer α_{2n} et β_{2n} en fonction de α_n et β_n. On aura

$$\alpha_{2n} = \sqrt{1+\frac{p_{2n}}{4n}}, \qquad \beta_{2n} = \sqrt{1-\frac{p_{2n}}{4n}},$$

ou, d'après (4),

$$\alpha_{2n} = \sqrt{1+\frac{p_n}{2(\alpha_n+\beta_n)n}}, \qquad \beta_{2n} = \sqrt{1-\frac{p_n}{2(\alpha_n+\beta_n)n}}.$$

Mais, d'après les valeurs de α et β,

$$\frac{p_n}{2n} = \frac{\alpha_n^2-\beta_n^2}{2}.$$

Donc

$$\alpha_{2n} = \sqrt{1+\frac{\alpha_n-\beta_n}{2}}, \qquad \beta_{2n} = \sqrt{1-\frac{\alpha_n-\beta_n}{2}}.$$

Il résulte de la formule (4), où le premier membre tend vers $\frac{1}{2\pi}$, que

$$\frac{1}{2\pi} = \lim \frac{1}{p_n}\,\frac{\alpha_n+\beta_n}{2}\,\frac{\alpha_{2n}+\beta_{2n}}{2}\,\frac{\alpha_{4n}+\beta_{4n}}{2}\cdots,$$

ce qui permet de trouver une infinité de développements de π en produits infinis. Si, par exemple, on part du diamètre

$$n=2, \qquad p_2=4, \qquad \alpha_2=\sqrt{2}, \qquad \beta_2=0,$$

on arrivera au théorème suivant :

Considérons une suite de nombres commençant par 0 et $\sqrt{2}$, et tels que chaque groupe de deux se calcule au moyen du groupe précédent par les formules

$$\alpha' = \sqrt{1 + \frac{\alpha - \beta}{2}}, \qquad \beta' = \sqrt{1 - \frac{\alpha - \beta}{2}};$$

le produit des inverses des moyennes arithmétiques des nombres de chaque groupe tendra vers $\frac{\pi}{2}$. Si l'on fait le calcul, on retrouve, après quelques transformations faciles, la formule connue

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} \cdots$$

Sur la surface d'un polygone régulier.

A propos des polygones réguliers, je ferai observer la formule suivante, qui paraît peu connue et qui donne la surface d'un polygone régulier de n côtés en fonction du côté du polygone régulier de n côtés d'espèce double. Il suffit, pour l'obtenir, de prendre pour hauteur du triangle élémentaire celle qui tombe sur l'un des rayons et qui est égale à $\frac{1}{2} c_n^{2k}$, si k est l'espèce du polygone considéré. On trouve ainsi immédiatement

$$S_n^k = \frac{1}{4} n r c_n^{2k}.$$