BULLETIN DE LA S. M. F.

L. SALTEL

Sur la détermination des caractéristiques dans les courbes de degré supérieur

Bulletin de la S. M. F., tome 2 (1873-1874), p. 52-54
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1873-1874__2__52_1>

Sur la détermination des caractéristiques dans les courbes de degré supérieur ; par M. Saltel.

(Séance du 23 juillet 1873)

Tous les géomètres savent de quelle importance serait, dans la théorie des courbes d'ordre supérieur, la détermination des caractéristiques des systèmes élémentaires formés par ces courbes (*). Parmi les tentatives faites dans cette direction, on doit citer d'abord M. de Jonquières qui, le premier, et le seul jusqu'ici, a fait connaître une méthode générale permettant de déterminer ces nombres toutes les fois que les points donnés sont en nombre supérieur à $\frac{m(m-1)}{2}+1$ (**). En second lieu, on doit citer MM. Zeuthen et Maillard, dont les travaux sur les courbes du troisième ordre ont mérité les éloges les plus flatteurs du juge le plus autorisé en pareille matière (***).

L'objet de cette note est de montrer que le *principe arguesien unicursal* enseigne à déterminer les caractéristiques des courbes qui sont *termes* d'une *hiérarchie arguesienne*, pourvu que, parmi les $\frac{m(m+3)}{2}-1$ conditions données, il y ait trois points dont la somme des degrés de multiplicité soit supérieure au degré de la courbe donnée.

L'esprit qui préside à cette nouvelle méthode est des plus simples. Supposons qu'il s'agisse de connaître, par exemple, les caractéristiques des sys-

(*) « Ce qui manque principalement pour que la théorie des courbes d'ordre supérieur soit aussi complète, ou du moins aussi avancée que celle des coniques, c'est de connaître les caractéristiques des systèmes élémentaires de chaque ordre de courbes. » Chasles, *Comptes rendus*.

(**) Voir le mémoire de M. de Jonquières intitulé : *Recherches sur les séries ou systèmes de courbes*.

(***) Voir les *Comptes rendus* de l'année 1872.

tèmes élémentaires formés par les courbes du quatrième ordre pourvues de trois points doubles donnés. Considérons le système déterminé par ces trois points doubles, par p points simples, et par d droites (*) ; supposons en outre le problème résolu et les courbes tracées. Si l'on transforme ces courbes, en prenant pour triangle de référence les trois points doubles, toutes ces courbes se transformeront en des coniques, et les d droites et les p points se transformeront en d coniques passant par les trois points doubles et en p points (**). Le problème se transforme donc lui-même en cet autre, résolu dans la théorie des coniques : *Combien y a-t-il de coniques tangentes à d coniques données et passant par p points donnés*. La question proposée est bien, comme on voit, entièrement résolue.

Remarque I. — Les *courbes exceptionnelles* résultent évidemment des courbes exceptionnelles du système transformé, et réciproquement; d'ailleurs puisque à deux courbes tangentes en un point a correspondent deux courbes tangentes au point correspondant a', les *sommets* doivent se correspondre deux à deux. Les considérations précédentes permettent donc de répondre d'une multitude de manières nouvelles au *desideratum* exprimé par M. Chasles dans les *Comptes rendus*, t. LXIV : « D'après les considérations précédentes, je désirerais former des systèmes de courbes du quatrième ordre, dans lesquels une des courbes serait une conique double, et où l'on reconnaîtrait la nécessité de regarder certains points comme des *sommets* par lesquels passeraient des tangentes de la courbe... » Il suffira, pour cela, de considérer dans le système transformé une droite double satisfaisant aux conditions exigées ; sa transformée sera une conique double répondant à la question. Bien plus, si l'on considère une conique voisine de la conique infiniment aplatie, et qu'on la transforme, on obtiendra l'image de la courbe du quatrième ordre voisine de la conique double.

Remarque II. — Il est bien évident que les raisonnements précédents s'appliquent à toutes les courbes qui sont termes de hiérarchies, et que la recherche de leurs caractéristiques se ramène à la recherche de ces mêmes nombres dans des courbes de degré inférieur.

Remarque III. — Il est important de remarquer que, dans un grand nombre de cas, la méthode de M. de Jonquières s'applique alors que la nôtre ne s'applique pas et réciproquement. Nous allons indiquer les déterminations que font connaître les deux méthodes combinées, appliquées aux courbes du quatrième ordre :

1° Courbes à trois points doubles .... tous les systèmes,
2° Courbes à un point triple .... tous les systèmes à l'exception de deux,

(*) Il est bien entendu que l'on doit avoir $p + d = 5$.
(**) Voir notre mémoire *Sur le principe arguesien unicursal*. Paris, Gauthier-Villars.

3° Courbes à deux points doubles .... tous les systèmes à l'exception d'un seul,

4° Courbes dépourvues de points doubles... les sept premiers systèmes.

Remarque IV. — Qu'on nous permette de faire ici, à l'occasion d'une application du principe arguesien, une remarque dont les conséquences peuvent devenir capitales. Selon M. Chasles (Voir *Comptes rendus*, t. LXII) : « Des propriétés qu'on démontre pour les courbes douées du nombre maximum de points doubles (ou d'un nombre de points multiples équivalent à ce maximum) se peuvent conclure celles des courbes dépourvues de points doubles. La question est de reconnaître dans chaque cas la modification causée par les points doubles : on remonte ainsi de la propriété trouvée pour une courbe à points doubles à l'expression de cette propriété pour une courbe pure (*). » Or le *principe arguesien unicursal* enseigne que toute propriété générale des coniques se transforme en une propriété générale des courbes d'ordre supérieur affectées d'un nombre de points multiples équivalant à $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ points doubles ; il semblerait donc que, s'il est possible de passer des propriétés des courbes unicursales aux courbes pures, le principe arguesien unicursal constitue une méthode générale pour passer des propriétés des coniques aux propriétés des courbes dépourvues de points multiples.