BULLETIN DE LA S. M. F.

C.-A. LAISANT

Détermination directe de l'intégrale $\int(\cos mx)^p(\cos m'x)^{p'}\dots(\sin nx)^q(\sin n'x)^{q'}\dots dx$

Bulletin de la S. M. F., tome 19 (1891), p. 8-11

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1891__19__8_1>

Détermination directe de l'intégrale

$$\int(\cos mx)^p(\cos m'x)^{p'}\ldots(\sin nx)^q(\sin n'x)^{q'}\ldots dx;$$

par M. C.-A. LAISANT.

Au dernier Congrès (1889) de l'Association française pour l'avancement des Sciences, j'ai communiqué une Note dans laquelle se trouve directement déterminée l'intégrale

$$\int \cos^p x \sin^q x \, dx,$$

sans avoir recours à l'abaissement successif des degrés p et q.

Il est possible de généraliser beaucoup plus la méthode indiquée, et de l'appliquer à la détermination de l'intégrale

$$\int (\cos mx)^p (\cos m'x)^{p'} \ldots (\sin nx)^q (\sin n'x)^{q'} \ldots dx,$$

les nombres $m, m', \ldots, p, p', \ldots, n, n', \ldots, q, q', \ldots$ étant supposés entiers et positifs.

Soient

$$\begin{aligned} mp + m'p' + \ldots + nq + n'q' + \ldots &= \mathrm{M}, \\ p + \quad p' + \ldots + \quad q + \quad q' + \ldots &= \mathrm{P}, \\ q + \quad q' + \ldots &= \mathrm{Q}. \end{aligned}$$

Posons $\varepsilon^{2x} = z$. En remplaçant les cosinus et les sinus par leurs valeurs sous forme exponentielle, en vertu des formules connues $\cos u = \dfrac{\varepsilon^u + \varepsilon^{-u}}{2}$, $\sin u = \dfrac{\varepsilon^u - \varepsilon^{-u}}{2i}$, on aura, pour la fonction $\mathrm{F}(x)$ qui figure sous le signe $\int$,

$$\frac{1}{2^{\mathrm{P}} i^{\mathrm{Q}} \varepsilon^{\mathrm{M}x}} (z^m + 1)^p (z^{m'} + 1)^{p'} \ldots (z^n - 1)^q (z^{n'} - 1)^{q'} \ldots.$$

Soit

$$(\zeta) \qquad \left\{ \begin{aligned} &(z^m + 1)^p (z^{m'} + 1)^{p'} \ldots (z^n - 1)^q (z^{n'} - 1)^{q'} \ldots \\ &\qquad = \mathrm{A}_0 z^{\mathrm{M}} + \mathrm{A}_1 z^{\mathrm{M}-1} + \ldots + \mathrm{A}_{\mathrm{M}-1} z + \mathrm{A}_{\mathrm{M}}. \end{aligned} \right.$$

Les coefficients $\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_{\mathrm{M}}$ de ce développement fini seront par conséquent déterminés uniquement par des multiplications algébriques.

Si Q est pair, il est très aisé de reconnaître qu'on a $\mathrm{A}_0 = \mathrm{A}_{\mathrm{M}}$, $\mathrm{A}_1 = \mathrm{A}_{\mathrm{M}-1}, \ldots$.

Si Q est impair, on a $\mathrm{A}_0 = -\mathrm{A}_{\mathrm{M}}$, $\mathrm{A}_1 = -\mathrm{A}_{\mathrm{M}-1}, \ldots$.

Si M est pair, il y aura, dans le développement, un terme central; mais le coefficient $\mathrm{A}_{\frac{\mathrm{M}}{2}}$ de ce terme s'annule pour Q impair, puisqu'il faut qu'on ait $\mathrm{A}_{\frac{\mathrm{M}}{2}} = -\mathrm{A}_{\frac{\mathrm{M}}{2}}$.

Si M est impair, il n'y aura pas de terme central.

Cela posé, nous considérerons les quatre cas suivants :

1. Q pair, M pair ;
2. Q pair, M impair ;

3. Q impair, M pair ;

4. Q impair, M impair.

Et nous aurons, respectivement, en rétablissant maintenant ε^{2x} à la place de z,

$$1.\quad F(x) = \frac{1}{2^P(-1)^{\frac{Q}{2}}\varepsilon^{Mx}}\left\{A_0(\varepsilon^{2Mx}+1)+A_1[\varepsilon^{(2M-2)x}+\varepsilon^{2x}]+\ldots+A_{\frac{M}{2}}\varepsilon^{Mx}\right\}$$

$$= \frac{1}{2^{P-1}(-1)^{\frac{Q}{2}}}\Big[A_0\cos Mx + A_1\cos(M-2)x+\ldots + A_{\frac{M}{2}-1}\cos 2x + A_{\frac{M}{2}}\Big].$$

$$2.\quad F(x) = \frac{1}{2^P(-1)^{\frac{Q}{2}}\varepsilon^{Mx}}\left\{A_0(\varepsilon^{2Mx}+1)+A_1[\varepsilon^{(2M-2)x}+\varepsilon^{2x}]+\ldots + A_{\frac{M-1}{2}}[\varepsilon^{(M+1)x}+\varepsilon^{(M-1)x}]\right\}$$

$$= \frac{1}{2^{P-1}(-1)^{\frac{Q}{2}}}\Big[A_0\cos Mx + A_1\cos(M-2)x+\ldots + A_{\frac{M-3}{2}}\cos 3x + A_{\frac{M-1}{2}}\cos x\Big].$$

$$3.\quad F(x) = \frac{1}{2^P i Q\varepsilon^{Mx}}\left\{A_0(\varepsilon^{2Mx}-1)+A_1[\varepsilon^{(2M-2)x}-\varepsilon^{2x}]+\ldots + A_{\frac{M}{2}-1}[\varepsilon^{(M+2)x}-\varepsilon^{(M-2)x}]\right\}$$

$$= \frac{1}{2^{P-1}(-1)^{\frac{Q-1}{2}}}\Big[A_0\sin Mx + A_1\sin(M-2)x+\ldots + A_{\frac{M}{2}-1}\sin 2x\Big].$$

$$4.\quad F(x) = \frac{1}{2^P i Q\varepsilon^{Mx}}\left\{A_0(\varepsilon^{2Mx}-1)+A_1[\varepsilon^{(2M-2)x}-\varepsilon^{2x}]+\ldots + A_{\frac{M-1}{2}}[\varepsilon^{(M+1)x}-\varepsilon^{(M-1)x}]\right\}$$

$$= \frac{1}{2^{P-1}(-1)^{\frac{Q-1}{2}}}\Big[A_0\sin Mx + A_1\sin(M-2)x+\ldots + A_{\frac{M-3}{2}}\sin 3x + A_{\frac{M-1}{2}}\sin x\Big].$$

L'intégration $I = \int F(x)\,dx$ peut donc se faire immédiatement, grâce à cette décomposition, et nous donne, dans les quatre cas considérés,

$$I_1 = \frac{1}{2^{P-1}(-1)^{\frac{Q}{2}}}\left[\frac{A_0}{M}\sin Mx + \frac{A_1}{M-2}\sin(M-2)x\ldots + \frac{A_{\frac{M}{2}-1}}{2}\sin 2x + A_{\frac{M}{2}}x\right] + c,$$

$$I_2 = \frac{1}{2^{P-1}(-1)^{\frac{Q}{2}}}\left[\frac{A_0}{M}\sin Mx + \frac{A_1}{M-2}\sin(M-2)x + \ldots + \frac{A_{\frac{M-3}{2}}}{3}\sin 3x + A_{\frac{M-1}{2}}\sin x\right] + c,$$

$$I_3 = \frac{1}{2^{P-1}(-1)^{\frac{Q+1}{2}}}\left[\frac{A_0}{M}\cos Mx + \frac{A_1}{M-2}\cos(M-2)x + \ldots + \frac{A_{\frac{M}{2}-1}}{2}\cos 2x\right] + c,$$

$$I_4 = \frac{1}{2^{P-1}(-1)^{\frac{Q+1}{2}}}\left[\frac{A_0}{M}\cos Mx + \frac{A_1}{M-2}\cos(M-2)x + \ldots + \frac{A_{\frac{M-3}{2}}}{3}\cos 3x + A_{\frac{M-1}{2}}\cos x\right] + c.$$

Au moyen de ces formules, on peut donc écrire immédiatement l'intégrale, après avoir préalablement effectué le développement (ζ) ci-dessus, qui donne les coefficients A_0, A_1, ...

On aurait très aisément, par les transformations habituelles, des formules analogues répondant aux fonctions hyperboliques Ch et Sh.