E. VICAIRE

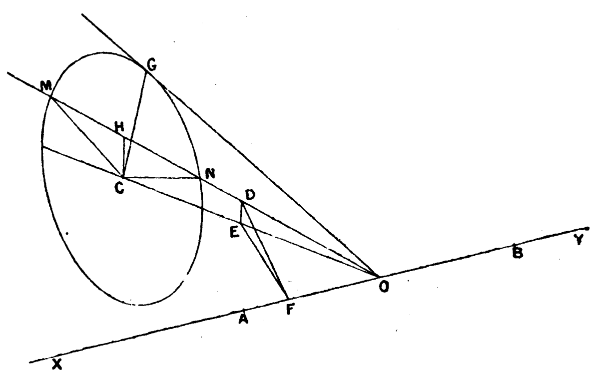
Sur les sections circulaires du Tore

Bulletin de la S. M. F., tome 19 (1891), p. 46-48
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1891__19__46_1>

Sur les sections circulaires du tore; par M. E. VICAIRE.

Yvon Villarceau a découvert par l'analyse la propriété remar-

Fig. 1.



quable que possèdent les plans bitangents au tore de donner des sections circulaires.

MM. Rouché et de Comberousse, dans leur *Traité de Géomé-*

trie, ont donné de ce théorème une démonstration synthétique qui ne laisse pas que d'être un peu compliquée. Puisqu'il a pénétré ainsi dans la Géométrie classique, peut-être qu'une démonstration plus simple offrira quelque intérêt.

Soient :

O le centre de tore;
C celui d'une section méridienne quelconque;
XOY la trace sur le plan de l'équateur d'un plan sécant qui rencontre cette section aux points M et N.

Dans les triangles MCO, NCO, qui ont l'un et l'autre pour côtés le rayon r du méridien et le rayon $OC = d$ du cercle moyen, on a

$$\frac{\sin M}{\sin MOC} = \frac{\sin N}{\sin MOC} = \frac{d}{r}.$$

Dans les trièdres OXCM, OYCM, rectangles suivant l'arête OC, on a

$$\frac{\sin MOX}{\sin MOC} = \frac{\sin MOY}{\sin MOC} = \frac{1}{\sin \varphi},$$

en désignant par φ l'angle sous lequel le plan sécant XOM rencontre le plan de l'équateur.

Or, si ce plan sécant est le plan bitangent, on a précisément $\sin \varphi = \frac{r}{d}$. Donc les angles M et N, supplémentaires l'un de l'autre, sont respectivement égaux à MOX et à MOY.

Si, pour fixer les idées, MOX est aigu, il sera égal à M, et MOY sera égal à N.

Cela étant, portons sur XY, de part et d'autre du point O, les longueurs $OA = OB = r$; les triangles MOA, NOB sont respectivement égaux à OMC et à ONC, et leurs côtés MA et NB sont l'un et l'autre égaux à OC, ce qui démontre le théorème.

On peut aisément, pour être tout à fait classique, éviter l'emploi de la Trigonométrie.

D'un point D, pris arbitrairement sur OM, abaissons les perpendiculaires DE, DF sur OC et sur OX; l'angle $DFE = \varphi$ est, pour le plan bitangent, égal à l'angle COG, formé avec OC par la tangente au méridien, et les triangles rectangles semblables COG, DFE donnent

$$\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{DF}} = \frac{r}{d}.$$

D'autre part, H étant le milieu de MN, les triangles rectangles semblables CHO, DEO donnent

$$\frac{\mathrm{CH}}{\mathrm{DE}} = \frac{d}{\mathrm{DO}}.$$

En multipliant membre à membre, il vient

$$\frac{\mathrm{CH}}{\mathrm{DF}} = \frac{r}{\mathrm{DO}},$$

ce qui démontre la similitude des triangles rectangles MCH, ODF, et par conséquent l'égalité des angles O et M, d'où le reste de la démonstration.