BULLETIN DE LA S. M. F.

DE SAINT-GERMAIN

Sur la durée des oscillations du pendule composé

Bulletin de la S. M. F., tome 2 (1873-1874), p. 54-56
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1873-1874__2__54_1>

Sur la durée des oscillations du pendule composé; par M. de Saint-Germain.

(Séance du 23 juillet 1873)

Il n'y a pas lieu de chercher quelle forme il faut donner à un pendule composé, de masse déterminée m, pour rendre minimum la durée de ses oscillations, ou plutôt la longueur du pendule simple synchrone; car on peut diminuer ces quantités autant qu'on veut en disposant la matière donnée sous forme d'un cylindre indéfiniment allongé renfermant l'axe de suspension. Mais il peut y avoir une solution finie quand on impose certaines conditions à la forme de la surface extérieure du pendule.

Pour que le pendule synchrone ou pendule composé soit minimum, il faut que si on ajoute sur une partie quelconque de sa surface une masse dm, en observant, bien entendu, les conditions imposées à cette surface, la

(*) On lit aussi dans le même tome des *Comptes rendus :* « Ce n'est pas seulement aux questions de contact que convient ce procédé de démonstration propre aux courbes dont les points se déterminent individuellement. Il est susceptible de très-nombreuses applications différentes. Nous aurons à dire aussi comment les théorèmes démontrés par cette méthode se généralisent et s'appliquent aux courbes de classe et d'ordre quelconques. »

longueur du pendule synchrone soit augmentée d'une quantité constante *cdm;* sinon, en ôtant de la matière aux parties du pendule donné où cette suppression serait le plus sensible pour la reporter en d'autres points où elle a moins d'effet, on réduirait la durée des oscillations. Soit donc $l = \frac{\mu}{ma}$ la longueur du pendule synchrone, a étant la distance du centre de gravité à l'axe, μ le moment d'inertie relatif à cet axe; quelle que soit la partie de la surface où l'on ajoute la masse dm, on aura

$$(1) \qquad dl = \frac{mad\mu - \mu d.am}{m^2a^2} = cdm.$$

Le pendule doit-il être un disque cylindrique d'épaisseur h ayant ses génératrices parallèles à l'axe, il faut répartir la masse dm le long d'une génératrice : soient r sa distance à l'axe, θ l'angle des plans menés suivant cet axe par le centre de gravité ou par la génératrice, on aura

$$d\mu = r^2dm, \quad d.ma = r\cos\theta\, dm.$$

L'équation (1) devient : $mar^2 - \mu r\cos\theta = cm^2a^2$.

La base du disque est un cercle. Soient R le rayon, ε la densité, on a

$$m = \pi R^2 h\varepsilon, \quad l = a + \frac{R^2}{2a};$$

R^2 étant connu, l aura sa valeur minimum $\sqrt{\frac{2m}{\mu h\varepsilon}}$ pour $a = \frac{R\sqrt{2}}{2}$; c'est-à-dire que l'axe de suspension passe au milieu du côté du carré inscrit dans la base.

Considérons encore un solide de révolution oscillant autour d'une perpendiculaire à son axe; la masse dm devra être répartie le long de ce parallèle. Soient ρ son rayon, z la distance de son plan à l'axe de suspension, on aura

$$d\mu = \left(z^2 + \frac{1}{2}\rho^2\right) dm, \quad d.ma = zdm.$$

L'équation (1) donne : $ma\,(2z^2 + \rho^2) - 2\mu z = 2cm^2a^2$.

Le pendule prendra la forme d'un ellipsoïde aplati ayant α pour demi-axe de symétrie, $\alpha\sqrt{2}$ pour rayon équatorial. Alors

$$m = \frac{8}{3}\pi\alpha^3\varepsilon, \quad l = a + \frac{3}{5}\frac{\alpha^2}{a};$$

α est connu, et l a sa valeur minimum $\sqrt{\frac{3}{5}}\sqrt[3]{\frac{3m}{\pi\varepsilon}}$ pour $a = \alpha\sqrt{\frac{3}{5}}$. On voit où doit passer l'axe de suspension, et aussi comment on pourra étudier les pendules d'autres formes.