BULLETIN DE LA S. M. F.

GENTY

Mémoire sur les surfaces gauches rationnelles

Bulletin de la S. M. F., tome 19 (1891), p. 70-93
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1891__19__70_1>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Mémoire sur les surfaces gauches rationnelles;
par M. GENTY.

1. Les équations d'une droite, en coordonnées rectangulaires, étant

$$\frac{x-x_1}{u}=\frac{y-y_1}{v}=\frac{z-z_1}{w},$$

la droite est entièrement déterminée par les six quantités

$$u,\quad v,\quad w,$$

$$\xi=wy_1-vz_1,\qquad \eta=uz_1-wx_1,\qquad \zeta=vx_1-uy_1,$$

que nous appellerons les *coordonnées homogènes* de la droite et qui sont liées entre elles par la relation identique

$$(1)\qquad u\xi+v\eta+w\zeta=0.$$

Dans une Note insérée aux *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3e série, t. VI, p. 401, nous avons déjà donné la définition de ces coordonnées et nous en avons fait une application à l'étude du complexe de Reye; le but du présent Mémoire est de montrer combien leur emploi facilite l'étude des surfaces gauches rationnelles.

Mais, avant d'aborder cette étude, nous allons rappeler quelques formules de la Note précitée et en donner quelques autres qui seront utiles par la suite.

2. La plus courte distance de deux droites, $(u\ldots)$ et $(u_1\ldots)$, a pour expression

$$\delta = \frac{\Sigma(u\xi_1 + u_1\xi)}{\sqrt{\Sigma(vw_1 - v_1 w)^2}},$$

où l'on a posé

$$\Sigma(u\xi_1 + u_1\xi) = u\xi_1 + v\eta_1 + w\zeta_1 + u_1\xi + v_1\eta + w_1\zeta,$$
$$\Sigma(vw_1 - v_1 w)^2 = (vw_1 - v_1 w)^2 + (wu_1 - w_1 u)^2 + (uv_1 - u_1 v)^2.$$

Si les deux droites sont infiniment voisines et si l'on pose

$$u_1 = u + du, \qquad v_1 = v + dv, \qquad \ldots,$$

il vient

$$\delta = \frac{\Sigma\, du\, d\xi}{\sqrt{\Sigma(v\, dw - w\, dv)^2}}; \tag{2}$$

si $d\varepsilon$ est l'angle infiniment petit des deux droites, on a

$$d\varepsilon = \frac{\sqrt{\Sigma(v\, dw - w\, dv)^2}}{u^2 + v^2 + w^2}. \tag{3}$$

La condition pour que les deux droites se rencontrent devient

$$\Sigma\, du\, d\xi = 0, \tag{4}$$

et leur point d'intersection a pour coordonnées

$$x = \frac{\eta\, d\zeta - \zeta\, d\eta}{\Sigma\xi\, du}, \qquad y = \frac{\zeta\, d\xi - \xi\, d\zeta}{\Sigma\xi\, du}, \qquad z = \frac{\xi\, d\eta - \eta\, d\xi}{\Sigma\xi\, du}. \tag{5}$$

La perpendiculaire commune aux deux droites a pour coordonnées

$$\left\{\begin{array}{l} (v\, dw - w\, dv)\,\Sigma(v\, dw - w\, dv)^2, \\ (w\, du - u\, dw)\,\Sigma(v\, dw - w\, dv)^2, \\ (u\, dv - v\, du)\,\Sigma(v\, dw - w\, dv)^2, \\ P(u\Sigma u\, du - du\,\Sigma u^2) - Q(u\Sigma\, du^2 - du\,\Sigma u\, du), \\ P(v\Sigma u\, du - dv\,\Sigma u^2) - Q(v\Sigma\, du^2 - dv\,\Sigma u\, du), \\ P(w\Sigma u\, du - dw\,\Sigma u^2) - Q(w\Sigma\, du^2 - dw\,\Sigma u\, du). \end{array}\right. \tag{6}$$

en posant

$$(7)\qquad P = \begin{vmatrix} d\xi & d\eta & d\zeta \\ u & v & w \\ du & dv & dw \end{vmatrix}, \qquad Q = \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ u & v & w \\ du & dv & dw \end{vmatrix}.$$

La droite $(u \ldots)$ et la perpendiculaire commune à cette droite et à la droite infiniment voisine sont dans un plan qui a pour équation

$$(8)\qquad (ux + vy + wz)\Sigma u\,du - (x\,du + y\,dv + z\,dw)\Sigma u^2 = Q,$$

et leur point de rencontre a pour coordonnées

$$(9)\qquad x = \frac{Pu - Q\,du + (v\,dw - w\,dv)\Sigma\xi\,du}{\Sigma(v\,dw - w\,dv)^2}, \qquad \ldots.$$

3. Soient maintenant u, v, ... des fonctions entières d'ordre n d'une variable arbitraire t, de la forme

$$(10)\qquad \begin{cases} u = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n, \\ v = b_0 + a_1 t + \ldots + b_n t^n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \ldots + \alpha_n t^n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

la droite $(u, \ldots)$ décrit une surface gauche.

L'identité (1) montre d'ailleurs qu'on a entre les coefficients des expressions (10) les $2n + 1$ équations de condition

$$(11)\qquad \begin{cases} \Sigma a_0 \alpha_0 = 0, \\ \Sigma(a_0\alpha_1 + a_1\alpha_0) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Sigma a_n \alpha_n = 0. \end{cases}$$

La surface gauche est d'ordre n. En effet, son intersection avec le plan

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

est représentée par les équations

$$(12)\qquad x = \frac{B\zeta - C\eta - D\xi}{Au + Bv + Cw}, \qquad \ldots:$$

c'est donc une courbe unicursale d'ordre n.

Nous appellerons surface gauche d'ordre n, ou, pour abréger, surface G_n, toute surface réglée dont les génératrices ont pour coordonnées des fonctions entières d'ordre n d'une variable arbitraire t.

Nombre des conditions nécessaires pour déterminer une surface C_n.

4. Les expressions des coordonnées de l'une quelconque de ses génératrices contiennent $6n+6$ coefficients indéterminés, liés entre eux par les $2n+1$ relations (11).

D'un autre côté, on peut remplacer t par une autre variable τ, qui lui soit liée par une équation de la forme

$$at\tau + bt + c\tau + d = 0,$$

et l'on peut disposer des coefficients arbitraires a, b, c et d pour déterminer à volonté quatre des coefficients des expressions (11). Il ne reste donc que

$$6n + 6 - (2n+1) - 4 = 4n + 1$$

coefficients indéterminés; tel est par suite le nombre des conditions nécessaires pour déterminer une surface C_n.

Ce qui précède montre d'ailleurs qu'on peut choisir à volonté les valeurs de la variable auxquelles correspondent trois génératrices de la surface.

Une génératrice donnée de la surface gauche équivaut évidemment à trois conditions

Une directrice rectiligne donnée équivaut à $n+1$ conditions. En effet, si $u_1, \ldots$ sont les coordonnées de cette directrice, on aura, quel que soit t,

$$\Sigma(u\xi_1 + u_1\xi) = 0,$$

ce qui fournit les $n+1$ conditions

$$\Sigma(a_0\xi_1 + u_1\alpha_0) = 0, \qquad \ldots \tag{13}$$

Si la directrice rectiligne n'est pas donnée, ses coordonnées dépendent de quatre coefficients qu'on pourra éliminer, pour $n > 3$, entre les $n+1$ équations qui précèdent, et il restera $n-3$ équations de condition entre les coefficients de la surface gauche; $3n+4$ conditions nouvelles suffiront pour la déterminer.

Pour $n=3$, on a quatre équations de condition qui permettent de déterminer les coordonnées de la directrice. Ces quatre équations représentent des complexes linéaires ayant deux droites communes. Donc une surface C_3 a en général deux directrices rectilignes.

Enfin, pour $n = 2$, les équations (13) sont au nombre de trois et ne suffisent pas pour déterminer u_1, v_1, ... Ainsi une surface réglée du deuxième ordre a un nombre infini de directrices rectilignes.

Revenons au cas général, et supposons que la directrice rectiligne donnée soit l'axe des x. On aura $\xi = 0$ pour toute valeur de t, d'où

$$\eta = -w\varphi(t), \qquad \zeta = v\varphi(t).$$

A chaque valeur de t correspond une génératrice rencontrant la directrice en un point dont l'abscisse est $\varphi(t)$. Et réciproquement, par un point situé sur l'axe des x à la distance ρ de l'origine passent toutes les génératrices correspondant aux valeurs de t fournies par l'équation

$$\varphi(t) = \rho.$$

Si donc la directrice donnée est une droite simple de la surface, on a nécessairement

$$\varphi(t) = \frac{at+b}{ct+d},$$

et, par suite, le rapport anharmonique des points de rencontre de la directrice avec quatre génératrices quelconques de la surface est égal à celui des valeurs de t auxquelles ces génératrices correspondent.

On a d'ailleurs pour les coordonnées u, ... des expressions de la forme

$$\begin{aligned} u &= f_1(t), & v &= (ct+d)f_2(t), & w &= (ct+d)f_3(t), \\ \xi &= 0, & \eta &= -(at+b)f_3(t), & \zeta &= (at+b)f_2(t), \end{aligned}$$

où f_2 et f_3 sont des fonctions d'ordre $n-1$ au plus.

Si l'axe des x était une directrice double, on trouverait de même, pour les coordonnées d'une génératrice, les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} u &= F_1(t), & v &= (dt^2+et+f)f_2(t), & w &= (dt^2+et+f)f_3(t), \\ \xi &= 0, & \eta &= -(at^2+bt+c)f_3(t), & \zeta &= (at_2+bt+c)f_2(t), \end{aligned}$$

f_2 et f_3 étant d'ordre $n-2$, et ainsi de suite.

On reconnaît facilement d'ailleurs que, quel que soit l'ordre de multiplicité de la directrice, les expressions de $u, \ldots$ contiennent réellement $3n$ coefficients indéterminés.

Si la directrice rectiligne est située tout entière à l'infini, la surface a un plan directeur.

On a, dans ce cas, $u_1 = v_1 = w_1 = 0$, et les équations (13) deviennent

$$\Sigma a_0 \xi_1 = 0, \qquad \ldots,$$

En éliminant ξ_1, η_1 et ζ_1 entre ces équations, il restera $n-1$ relations indépendantes entre les coefficients de la surface gauche. Par conséquent, le nombre des conditions nécessaires pour déterminer une surface C_n à plan directeur est égal à

$$4n + 1 - (n - 1) = 3n + 2.$$

On verrait d'ailleurs très simplement que, si le plan directeur est le plan des yz, et si la droite située à l'infini dans ce plan est une droite multiple d'ordre p de la surface, les coordonnées de C_n ont des expressions de la forme

$$\begin{array}{lll} u = 0, & v = -f(t)\psi(t), & w = f(t)\varphi(t), \\ \xi = F_1(t), & \eta = f_1(t)\varphi(t), & \zeta = f_1(t)\psi(t), \end{array}$$

F étant au plus d'ordre n, φ et ψ d'ordre p, et f et f_1 d'ordre $n-p$ par rapport à t.

Si enfin une surface C_n a deux directrices rectilignes, l'une Ox, l'autre située à l'infini dans le plan des yz, et telles que la première soit sur la surface une droite multiple d'ordre p, et la seconde une droite multiple d'ordre q, les coordonnées d'une génératrice de la surface auront des expressions de la forme

$$\begin{array}{lll} u = 0, & v = f(t)\varphi(t), & w = f(t)\psi(t), \\ \xi = 0, & \eta = -f_1(t)\psi(t), & \xi = f_1(t)\varphi(t); \end{array}$$

φ et ψ sont des fonctions d'ordre q; f et f_1 des fonctions d'ordre p, et l'on a, comme cela doit être,

$$p + q = n.$$

5. Comme application, cherchons les équations d'une surface

réglée du second ordre déterminée par trois de ses génératrices $(u_1, \ldots)$, $(u_2, \ldots)$, $(u_3, \ldots)$.

On aura évidemment pour $u, \ldots$ des expressions de la forme

$$u = \frac{a_1 u_1}{t - t_1} + \frac{a_2 u_2}{t - t_2} + \frac{a_3 u_3}{t - t_3}, \qquad \ldots,$$

t_1, t_2, t_3 étant les valeurs de la variable choisies à volonté qui correspondent aux trois génératrices données; nous déterminerons les coefficients a_1, a_2, a_3 en exprimant que la condition (1) est satisfaite pour toute valeur de t.

Cette condition étant déjà remplie pour trois valeurs de la variable, il suffit d'exprimer qu'elle l'est encore pour deux autres valeurs quelconques, par exemple pour $t = 0$ et $t = \infty$.

On obtient ainsi les deux équations

$$(14) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{A t_1}{a_1} + \frac{B t_2}{a_2} + \frac{C t_3}{a_3} = 0, \\ &\frac{A}{a_1} + \frac{B}{b_1} + \frac{C}{c_1} = 0, \end{aligned} \right.$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} A &= \Sigma(u_2 \xi_3 + u_3 \xi_2), \\ B &= \Sigma(u_3 \xi_1 + u_1 \xi_3), \\ C &= \Sigma(u_1 \xi_2 + u_2 \xi_1). \end{aligned}$$

Des équations (14) on tire

$$a_1 : a_2 : a_3 = \frac{A}{t_2 - t_3} : \frac{B}{t_3 - t_1} : \frac{C}{t_1 - t_2}.$$

On a donc enfin

$$u = \frac{A u_1}{(t_2 - t_3)(t - t_1)} + \frac{B u_2}{(t_3 - t_1)(t - t_2)} + \frac{C u_3}{(t_1 - t_2)(t - t_3)}, \qquad \ldots.$$

Pour $t_1 = \infty$, $t_2 = 0$ et $t_3 = 1$, les expressions de $u, \ldots$ prennent la forme plus simple

$$(15) \qquad u = A u_1 - \frac{B u_2}{t} + \frac{C u_3}{t - 1}, \qquad \ldots.$$

Les résultats qui précèdent permettent d'obtenir très simplement les conditions qui expriment que quatre droites ne se rencontrant pas deux à deux sont situées sur un même hyperboloïde.

Soient $(u_1 \ldots)$, $(u_2 \ldots)$, $(u_3 \ldots)$ et $(u_4 \ldots)$ les quatre droites données, et posons dès maintenant

$$\Sigma(u_1\xi_4 + u_4\xi_1) = D, \qquad \Sigma(u_2\xi_4 + u_4\xi_2) = E, \qquad \Sigma(u_3\xi_4 + u_4\xi_3) = F;$$
$$(u_2, v_3, w_4) = U_1, \qquad (u_3, v_1, w_4) = U_2, \qquad (u_1, v_2, w_4) = U_3,$$
$$(u_1, v_2, w_3) = U_4.$$

Les équations (15) représentant les coordonnées d'une génératrice quelconque de l'hyperboloïde déterminé par les trois premières droites, on devra pouvoir poser

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} su_4 &= A u_1 - \frac{B u_2}{t} + \frac{C u_3}{t-1}, \\ sv_4 &= A v_1 - \frac{B v_2}{t} + \frac{C v_3}{t-1}, \\ sw_4 &= A w_1 - \frac{B w_2}{t} + \frac{C w_3}{t-1}, \end{aligned}\right.$$

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} s\xi_4 &= A \xi_1 - \frac{B \xi_2}{t} + \frac{C \xi_3}{t-1}, \\ s\eta_4 &= A \eta_1 - \frac{B \eta_2}{t} + \frac{C \eta_3}{t-1}, \\ s\zeta_4 &= A \zeta_1 - \frac{B \zeta_2}{t} + \frac{C \zeta_3}{t-1}, \end{aligned}\right.$$

s et t étant deux coefficients inconnus. Or on a

$$\begin{aligned} u_4 U_4 &= u_1 U_1 + u_2 U_2 + u_3 U_3, \\ v_4 U_4 &= v_1 U_1 + v_2 U_2 + v_3 U_3, \\ w_4 U_4 &= w_1 U_1 + w_2 U_2 + w_3 U_3. \end{aligned}$$

En comparant ces équations avec les équations (16), il vient

$$(18)\qquad \frac{A}{s} = \frac{U_1}{U_4}, \qquad \frac{B}{st} = -\frac{U_2}{U_4}, \qquad \frac{C}{s(t-1)} = \frac{U_3}{U_4},$$

et, si l'on élimine s et t entre ces équations, on a

$$(19)\qquad A U_2 U_3 + B U_3 U_1 + C U_1 U_2 = 0:$$

c'est l'une des conditions cherchées.

Si maintenant nous additionnons les équations (16) et (17) après avoir multiplié les trois premières par ξ_1, η_1, ζ_1 et les trois autres par u_1, v_1, w_1 respectivement, il vient

$$st(t-1)D = BC;$$

remplaçant dans cette équation st et $t-1$ par leurs valeurs tirées des équations (18), et tenant compte de l'équation (19), on a

$$AU_2U_3 + DU_1U_4 = 0.$$

On trouverait de même

$$BU_3U_1 + EU_2U_4 = 0,$$
$$CU_1U_2 + FU_3U_4 = 0.$$

Les trois équations qui précèdent se réduisent d'ailleurs à deux en vertu de l'identité

$$AU_2U_3 + BU_3U_1 + CU_1U_2 = DU_1U_4 + EU_2U_4 + FU_3U_4.$$

6. Cherchons encore l'expression générale d'une cubique réglée dont on donne quatre génératrices.

Soient ∞, o, 1 et τ les valeurs de la variable qui correspondent aux quatre génératrices données. On aura pour u, ... des expressions de la forme

$$(20) \qquad u = au_1 + \frac{bu_2}{t} + \frac{cu_3}{t-1} + \frac{du_4}{t-\tau}, \qquad \cdots$$

Ces équations renferment quatre coefficients indéterminés; mais il existe entre eux trois relations que nous obtiendrons en exprimant que l'équation (1) est satisfaite identiquement. Or cette équation est du sixième ordre et elle est déjà satisfaite par les quatre valeurs ∞, o, 1 et τ de la variable; pour qu'elle soit identique, il suffit qu'elle le soit encore pour trois autres valeurs de la variable.

Mais, si l'équation (1) est satisfaite identiquement, il en sera de même de sa dérivée

$$(21) \qquad \Sigma(u\xi' + u'\xi) = 0$$

et réciproquement; si l'équation (21) est identique, l'expression $\Sigma u\xi$ sera constante et, comme elle est nulle pour quatre valeurs de t, elle sera identiquement nulle. En exprimant que l'équation (21) est satisfaite pour les valeurs ∞, o et 1 de la variable, nous obtenons sans peine les conditions suivantes :

$$(22)\qquad \begin{cases} bC + cB + dD = 0, \\ cA + \dfrac{dE}{\tau} = 0, \\ bA + \dfrac{dF}{1-\tau} = 0. \end{cases}$$

Si l'on ajoute ces équations après les avoir multipliées respectivement par A, B et C, il vient

$$(23)\qquad AD\tau^2 - (AD + BE - CF)\tau + BE = 0.$$

Il est facile d'interpréter cette équation. En effet, τ est le rapport anharmonique des quatre valeurs ∞, 0, 1 et τ de la variable. D'ailleurs la surface cherchée a deux directrices rectilignes, qui sont les droites Δ et Δ', rencontrant les quatre droites données; l'une est une directrice simple, l'autre une directrice double. Or nous avons vu que, lorsqu'une surface C_n a une directrice simple, le rapport anharmonique des points où quatre génératrices rencontrent cette directrice est égal à celui des valeurs de t auxquelles elles correspondent. L'équation (23) a donc pour racines les rapports anharmoniques des points où les quatre droites données sont rencontrées par Δ et Δ' respectivement. Si l'on adopte la valeur τ, Δ sera la directrice simple de la surface et Δ' la directrice double, et inversement.

Si deux des droites données se rencontrent, la directrice double est déterminée et l'équation (23) se réduit au premier degré.

Dans le cas général, les équations (22) montrent qu'on peut prendre

$$d = -A, \qquad c = \frac{E}{\tau}, \qquad b = \frac{F}{1-\tau},$$

et les expressions des coordonnées prennent la forme

$$u = au_1 + \frac{Fu_2}{t-\tau} + \frac{Eu_3}{\tau(t-1)} - \frac{Au_4}{t-\tau}, \qquad \ldots,$$

où l'on doit remplacer τ par l'une des racines de l'équation (23); elles ne renferment plus qu'un seul coefficient arbitraire a.

Remarquons encore que, si l'équation (23) a ses deux racines égales, c'est-à-dire si l'on a

$$A^2D^2 + B^2E^2 + C^2F^2 - 2BCEF - 2CAFD - 2ABDE = 0.$$

il n'y aura qu'une droite Δ rencontrant les quatre droites données et, dans ce cas, l'une quelconque des quatre droites est tangente à l'hyperboloïde déterminé par les trois autres.

La condition qui précède peut encore s'écrire sous la forme bien connue

$$\begin{vmatrix} 0 & C & B & D \\ C & 0 & A & E \\ B & A & 0 & F \\ D & E & F & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

7. *Courbe double d'une surface* C_n. — Nous avons vu que la section plane d'une surface C_n est une courbe unicursale d'ordre n, ayant par suite $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ points doubles. La surface a donc une courbe double d'ordre $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, dont nous allons chercher les équations.

Soient $(u_s \ldots)$, $(u_t \ldots)$ deux génératrices qui se rencontrent, s et t les valeurs correspondantes de la variable. On a

$$\Sigma(u_s\xi_t + u_t\xi_s) = 0. \tag{24}$$

Le premier membre de cette équation, ainsi que sa dérivée par rapport à t, s'annule pour $t = s$; en supprimant ce facteur, l'équation n'est plus que d'ordre $n - 2$ par rapport à t et s, ce qui montre qu'une génératrice d'une surface C_n en rencontre $n - 2$ autres.

La courbe double a d'ailleurs pour équations

$$x = \frac{\eta_t\zeta_s - \eta_s\zeta_t}{\Sigma u_s\xi_t}, \qquad y = \frac{\zeta_t\xi_s - \zeta_s\xi_t}{\Sigma u_s\xi_t}, \qquad z = \frac{\xi_t\eta_s - \xi_s\eta_t}{\Sigma u_s\xi_t},$$

s et t étant deux variables arbitraires liées entre elles par l'équation

$$\frac{\Sigma(u_s\xi_t + u_t\xi_s)}{(t-s)^2} = 0.$$

On démontrerait sans difficulté que l'ordre de cette courbe est bien égal à $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

(*A suivre.*)

8. *Génératrices singulières d'une surface* C_n. — Nous avons trouvé pour l'expression de la plus courte distance de deux droites infiniment voisines

$$\delta = \frac{\Sigma\, du\, d\xi}{\sqrt{\Sigma(v\, dw - w\, dv)^2}}.$$

Si ces deux droites sont les génératrices d'une surface C_n, il vient

$$\delta = \frac{\Sigma\, u'\xi'}{\sqrt{\Sigma(v w' - w v')^2}}.$$

Les génératrices singulières de la surface sont donc fournies par l'équation

$$(25) \qquad \Sigma\, u'\xi' = 0.$$

Cette équation est d'ordre $2(n-2)$; on a, en effet,

$$\Sigma\, u\xi = 0,$$
$$\Sigma(u'\xi + u\xi') = 0$$

et, par suite,

$$\Sigma(nu - tu')(nt - t\xi') = t^2\Sigma\, u'\xi'.$$

Or le premier membre de cette équation est d'ordre $2(n-1)$, donc $\Sigma\, u'\xi'$ est d'ordre $2(n-2)$; tel est, par suite, le nombre des génératrices singulières de la surface.

Si l'équation (25) est satisfaite identiquement, la surface C_n est développable. Cette équation étant d'ordre $2(n-2)$, la condition d'identité fournit $2n-3$ relations, en sorte qu'il faut

$$4n+1-(2n-3) = 2(n+2)$$

conditions pour déterminer une surface développable rationnelle d'ordre n.

9. *Point central, ligne de striction, plan central et paramètre de distribution des plans tangents d'une surface* C_n. — En appliquant au cas de deux génératrices infiniment voisines de la surface C_n les formules du § 2, et en posant

$$P = \begin{vmatrix} \xi' & \eta' & \zeta' \\ u & v & w \\ u' & v' & w' \end{vmatrix}, \qquad Q = \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ u & v & w \\ u' & v' & w' \end{vmatrix},$$

$$p^2 = \Sigma(v w' - w v')^2,$$

on a pour les coordonnées du point central de la génératrice

$$(26)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{Pu - Qu' + (vw' - wv')\Sigma\xi u'}{p^2},\\ y &= \frac{Pv - Qv' + (wu' - uw')\Sigma\xi u'}{p^2},\\ z &= \frac{Pw - Qw' + (uv' - vu')\Sigma\xi u'}{p^2}.\end{aligned}\right.$$

Le numérateur et le dénominateur des expressions (26) sont d'ordre $4(n-1)$; tel est, par suite, l'ordre de la ligne de striction de la surface C_n. Ces expressions peuvent, d'ailleurs, se mettre sous la forme

$$(27)\qquad x = \frac{(\eta\zeta' - \zeta\eta')}{\Sigma\xi u'} + \frac{u\Sigma u'\xi'}{p^2\Sigma\xi u'}\qquad \ldots,$$

et il est facile de voir que le point qui a pour coordonnées

$$x = \frac{(\eta\zeta' - \zeta\eta')}{\Sigma\xi u'},\qquad \ldots$$

est le point de contact de la génératrice (u) avec le plan mené par cette ligne et l'origine, c'est-à-dire le point correspondant de la courbe de contact avec C_n du cône circonscrit à cette surface et ayant son sommet à l'origine. Cette courbe est donc unicursale et d'ordre $2(n-1)$.

Dans le cas d'une génératrice singulière, on a

$$\Sigma u'\xi' = 0,$$

et le point central se confond avec le point d'intersection de cette génératrice et de la génératrice infiniment voisine.

Si la surface C_n a un plan directeur, quel que soit d'ailleurs l'ordre de multiplicité de la directrice située dans ce plan, l'ordre de la ligne de striction diminue de moitié.

On a en effet, dans ce cas, le plan directeur étant le plan des yz,

$$\begin{aligned} &u = 0, && v = -f(t)\psi(t), && w = f(t)\varphi(t),\\ &\xi = F, && \eta = f_1(t)\varphi(t), && \zeta = f_1(t)\psi(t),\end{aligned}$$

où φ et ψ sont des fonctions d'ordre μ, f et f_1 des fonctions d'ordre

$n-\mu$ en t, et l'on trouve aisément pour les coordonnées du point central

$$x=\frac{F'u-Fu'-ff_1(\varphi\psi'-\varphi'\psi)}{f^2(\varphi\psi'-\varphi'\psi)},$$
$$y=\frac{F'v-Fv'}{f^2(\varphi\psi'-\varphi'\psi)},$$
$$z=\frac{F'w-Fw'}{f^2(\varphi\psi'-\varphi'\psi)};$$

le dénominateur et les numérateurs de ces expressions ne sont plus que d'ordre $2(n-1)$.

Ainsi la ligne de striction d'un paraboloïde hyperbolique pour l'un des systèmes de génératrices est une conique : la forme même des expressions de x, y et z montre que cette conique est une parabole.

Le plan central relatif à la génératrice $(u\ldots)$ a pour équation

$$(28)\qquad (ux+vy+wz)\Sigma uu'-(u'x+v'y+w'z)\Sigma u^2=Q;$$

il enveloppe une développable dont la classe est égale à $2n-2$.

Enfin le paramètre de distribution des plans tangents le long de la génératrice $(u\ldots)$ a pour expression

$$(29)\qquad k=\frac{\Sigma u^2\Sigma u'\xi'}{p^2}.$$

Comme exemple, cherchons le paramètre de distribution des plans tangents le long de la génératrice $(u_2\ldots)$ de l'hyperboloïde représenté par les équations (15) du § 5, et, pour simplifier, supposons que le centre de la surface soit à l'origine, ce qui entraîne

$$\Sigma u_2\xi_3=\Sigma u_3\xi_2,$$
$$\Sigma u_3\xi_1=\Sigma u_1\xi_3,$$
$$\Sigma u_1\xi_2=\Sigma u_2\xi_1.$$

On a alors

$$u=At(t-1)u_1-B(t-1)u_2+Ctu_3,\qquad \ldots,$$
$$u'=A(2t-1)u_1-Bu_2\qquad +Cu_3,\qquad \ldots,$$

et pour $t=0$

$$u=u_2,\qquad v=v_2,\qquad w=w_2,$$
$$u'=Cu_3-Au_1-Bu_2,\qquad \ldots.$$

On tire de là

$$\Sigma u^2 = u_2^2 + v_2^2 + w_2^2,$$
$$\Sigma u'\xi' = -\mathrm{ABC},$$
$$\begin{aligned} vw' - v'w &= \mathrm{A}(w_2 v_1 - v_2 w_1) + \mathrm{C}(v_2 w_3 - v_3 w_2) \\ &= 2(u_3\xi_2 + v_3\eta_2 + w_3\zeta_2)(v_1 w_2 - v_2 w_1) \\ &\quad + 2(u_1\xi_2 + v_1\eta_2 + w_1\zeta_2)(v_2 w_3 - v_3 w_2) \\ &= 2\xi_2[u_1(v_2 w_3 - v_3 w_2) + u_3(v_1 w_2 - v_2 w_1)] \\ &\quad + 2(\eta_2 v_2 + \zeta_2 w_2)(v_1 w_3 - v_3 w_1) = 2\Delta\xi_2, \end{aligned}$$

en posant

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix},$$

d'où

$$\rho^2 = 4\Delta^2(\xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2);$$

on a donc enfin

$$k = -\frac{\mathrm{ABC}}{4\Delta^2}\,\frac{u_2^2 + v_2^2 + w_2^2}{\xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2} = \frac{\mathrm{V}}{2\rho^2},$$

en appelant V le volume du parallélépipède déterminé par les trois droites $(u_1 \ldots)$, $(u_2 \ldots)$ et $(u_3 \ldots)$ et ρ la distance de l'origine à la génératrice $(u_2 \ldots)$. On sait d'ailleurs que le parallélépipède construit sur trois génératrices quelconques d'un hyperboloïde a un volume constant (¹). Donc, si k est le paramètre de distribution des plans tangents pour une génératrice quelconque d'un hyperboloïde, ρ la distance du centre à cette génératrice, le produit $k\rho^2$ est constant.

10. *Plan tangent, paraboloïde des normales.* — Un point quelconque d'une surface gauche C_n ayant pour coordonnées

$$x = \frac{v\zeta - w\eta}{\Sigma u^2} + su, \qquad y = \ldots, \qquad z = \ldots,$$

ces équations seront celles de la surface gauche elle-même, si l'on y regarde s et t comme deux variables indépendantes. Les quantités $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ et $\frac{dz}{dt}$ seront proportionnelles aux cosinus directeurs d'une tangente à la surface et le plan tangent en un point quelconque sera ainsi complètement déterminé.

(¹) Ce théorème n'était pas connu quand nous l'avons énoncé dans les *Nouvelles Annales*, 3ᵉ série, t. IV, p. 248.

Soit l'axe des z une génératrice de la surface, on a pour les coordonnées de cette droite

$$u = v = 0, \qquad w = 1, \qquad \xi = \eta = \zeta = 0.$$

La condition $\Sigma(u\xi' + u'\xi) = 0$ donne alors $\zeta' = 0$, et les coordonnées de la génératrice infiniment voisine sont

$$u'dt, \quad v'dt, \quad 1 + w'dt, \quad \xi'dt, \quad \eta'dt, \quad 0.$$

Ceci posé, le plan $z = s$ mené par un point A de l'axe des z parallèlement au plan des yz rencontre cette génératrice infiniment voisine en un point B ayant pour coordonnées

$$x = \frac{-\eta' + su'}{1 + w'dt}\,dt, \qquad y = \frac{\xi' + sv'}{1 + w'dt}\,dt, \qquad z = s.$$

La normale à la surface gauche au point A est perpendiculaire à Oz et à AB; donc ses cosinus directeurs sont proportionnels aux quantités $\xi' + sv'$, $\eta' - su'$ et 0, et elle a elle-même pour coordonnées

$$\begin{aligned} u_N &= \xi' + sv', & v_N &= \eta' - su', & w_N &= 0, \\ \xi_N &= s^2u' - s\eta' & \eta_N &= s\xi' + s^2v', & \zeta_N &= 0. \end{aligned}$$

Si dans ces équations on regarde t comme une constante, s variant seul, elles représentent le paraboloïde des normales le long de la génératrice Oz.

Dans l'hypothèse actuelle, on a

$$P = u'\eta' - v'\zeta', \qquad Q = 0, \qquad \Sigma u'\xi = 0, \qquad p^2 = u'^2 + v'^2;$$

on a alors pour les coordonnées du point central de Oz

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = \frac{(u'\eta' - v'\xi')u}{\sqrt{u^2 + v'^2}}.$$

Si donc on suppose en outre que le point central a été pris pour origine, on a

$$(30) \qquad u'\eta' - v'\xi' = 0;$$

on a alors pour le paramètre de distribution des plans tangents

$$k = \frac{u'\xi' + v'\eta'}{u'^2 + v'^2} = \frac{\sqrt{\xi'^2 + \eta'^2}}{\sqrt{u'^2 + v'^2}}.$$

Si d'ailleurs nous appelons θ l'angle de la normale au point A avec la normale à l'origine, nous aurons

$$\cos\theta = \frac{\xi'(\xi'+sv')+\eta'(\eta'-su')}{\sqrt{\xi'^2+\eta'^2}\sqrt{(\xi'+sv')^2+(\eta'-su')^2}} = \frac{\sqrt{\xi'^2+\eta'^2}}{\sqrt{\xi'^2+\eta'^2+s^2(u'^2+v'^2)}},$$

et par suite

$$\tang\theta = s\frac{\sqrt{u'^2+v'^2}}{\sqrt{\xi'^2+\eta'^2}} = \frac{s}{k},$$

comme cela doit être.

Cherchons enfin le paramètre de distribution des plans tangents le long de la génératrice ($u_N \ldots$) du paraboloïde des normales.

Si nous désignons par des accents les dérivées prises par rapport à s, nous aurons

$$\begin{array}{lll} u_N = \xi'+sv', & v_N = \eta'-su', & w_N = 0, \\ \xi_N = s^2u'-s\eta', & \eta_N = s\xi'+s^2v', & \zeta_N = 0, \\ u'_N = v', & \eta'_N = -u', & w'_N = 0, \\ \xi'_N = 2su'-\eta', & \eta'_N = \xi'+2sv', & \zeta'_N = 0, \end{array}$$

$$\begin{aligned} \Sigma u_N^2 &= \xi'^2+\eta'^2+s^2(u'^2+v'^2), \\ \Sigma u'_N\xi'_N &= (u'\xi'+v'\eta'), \\ p^2 &= (u'\xi'+v'\eta')^2, \end{aligned}$$

et par suite

$$k_1 = \frac{\xi'^2+\eta'^2+s^2(u'^2+v'^2)}{u'\xi'+v'\eta'} = \frac{\xi'^2+\eta'^2}{\cos^2\theta(u'\xi'+v'\eta')} = \frac{k}{\cos^2\theta},$$

expression bien connue.

11. *Hyperboloïde osculateur.* — Nous avons trouvé au § 5 pour les coordonnées d'un hyperboloïde déterminé par trois de ses génératrices ($u_1 \ldots$), ($u_2 \ldots$), ($u_3 \ldots$) des expressions de la forme

$$u = \frac{A u_1}{(T_1-T_2)(T-T_1)} + \frac{B u_2}{(T_3-T_1)(T-T_2)} + \frac{C u_3}{(T_1-T_2)(T-T_3)}, \ldots.$$

Si nous supposons que les trois droites données soient trois génératrices infiniment voisines de la surface gauche C_n, nous obtiendrons l'hyperboloïde osculateur de cette surface.

Posons donc

$$T_1 = t-\delta t, \qquad T_2 = t, \qquad T_3 = t+\delta t.$$

On aura

$$\begin{aligned} u_1 &= u - u'\delta t + u''\frac{\delta t^2}{2}, & \dots, \\ u_2 &= u, & \dots, \\ u_3 &= u + u'\delta t + u''\frac{\delta t^2}{2}, & \dots. \end{aligned}$$

Si d'ailleurs on tient compte de l'équation $\Sigma u\xi = 0$ et de celles qu'on en déduit par des dérivations successives, on trouve, par des calculs faciles,

$$\begin{aligned} A &= -\ \delta t^2 \Sigma u'\xi' - \frac{\delta t^3}{2}\Sigma(u'\xi'' + u''\xi') - \frac{\delta t^4}{12}[2\Sigma(u'\xi''' + u'''\xi') + 3\Sigma u''\xi''] + \dots \\ B &= -4\,\delta t^2 \Sigma u'\xi' - 2\frac{\delta t^4}{3}\Sigma(u'\xi'' + u''\xi') + \dots \\ C &= -\ \delta t^2 \Sigma u'\xi' - \frac{\delta t^3}{2}\Sigma(u'\xi'' + u''\xi') - \frac{\delta t^4}{12}[2\Sigma(u'\xi''' + u'''\xi') + 3\Sigma u''\xi''] + \dots \end{aligned}$$

et l'on obtient, pour les coordonnées de l'hyperboloïde osculateur des expressions de la forme

$$u_h = \lambda u + 2\mu(T - t)u' + 2\nu(T - t)^2 u'', \quad \dots,$$

λ, μ et ν ayant les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} \lambda &= 4\Sigma u'\xi' - 2(T - t)\Sigma(u'\xi'' + u''\xi') + (T - t)^2\Sigma u''\xi'', \\ \mu &= 2\Sigma u'\xi' - \ (T - t)\Sigma(u'\xi'' + u''\xi'), \\ \nu &= \ \Sigma u'\xi'. \end{aligned}$$

Si α, β et γ sont les coordonnées du centre de l'hyperboloïde osculateur, on trouve

$$(31)\qquad \alpha = \frac{u\Sigma(u''\xi' - u'\xi'') + u'\Sigma(u\xi'' - u''\xi) + u''\Sigma(u'\xi - u\xi')}{S}, \qquad \dots,$$

en désignant par S le déterminant

$$\begin{vmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ u'' & v'' & w'' \end{vmatrix}.$$

Le dénominateur et les numérateurs des expressions (31) sont d'ordre $3(n - 2)$. Donc le lieu des centres des hyperboloïdes osculateurs d'une surface gauche rationnelle d'ordre n est une courbe gauche unicursale d'ordre $3(n - 2)$.

Les génératrices de la surface gauche pour lesquelles l'hyperboloïde osculateur se transforme en paraboloïde sont données par l'équation

$$S = 0;$$

elles sont donc au nombre de $3(n-2)$. Si cette équation est satisfaite identiquement, la surface est à plan directeur.

12. *Surfaces développables.* — Nous avons vu que la surface réglée est développable si l'on a, pour toute valeur de t,

$$\Sigma u'\xi' = 0. \tag{32}$$

Il est facile de voir, d'après cela, qu'il n'y a pas de surface développable non conique de degré inférieur à 4.

Si l'on prend, en effet, les dérivées successives de l'équation

$$\Sigma u\xi = 0,$$

il vient

$$\begin{aligned}
&\Sigma(u'\xi + u\xi') = 0,\\
&\Sigma(u\xi'' + u''\xi + 2u'\xi') = 0,\\
&\Sigma(u\xi''' + u'''\xi + 3u'\xi'' + 3u''\xi') = 0.
\end{aligned}$$

Mais si l'on prend la dérivée par rapport à t de l'équation (32), il vient

$$\Sigma(u'\xi'' + u''\xi') = 0.$$

On a dès lors

$$\left\{\begin{aligned}
&\Sigma u\xi = 0,\\
&\Sigma(u\xi' + u'\xi) = 0,\\
&\Sigma(u\xi'' + u''\xi) = 0,\\
&\Sigma(u\xi''' + u'''\xi) = 0.
\end{aligned}\right. \tag{33}$$

Ceci posé, soient $(u_s\ldots)$, $(u_t\ldots)$ deux génératrices d'une surface réglée; la condition pour qu'elles se rencontrent est

$$\Sigma(u_s\xi_t + u_t\xi_s) = 0. \tag{34}$$

Or le premier membre de cette équation et ses trois premières dérivées s'annulent pour $t = s$, en vertu des équations (33). Donc, si $u\ldots$ sont d'ordre inférieur à 4, l'équation (4) est satisfaite identiquement, ce qui montre que deux génératrices quelconques de la surface réglée se rencontrent : cette surface est donc un plan ou un cône.

12. Soient maintenant $(u\ldots)$ les coordonnées d'une génératrice quelconque d'une surface développable C_n.

Le point de l'arête de rebroussement situé sur cette génératrice a pour coordonnées (27)

$$x = \frac{\eta\zeta' - \eta'\zeta}{\Sigma u'\xi}, \qquad \ldots \tag{35}$$

Le plan tangent le long de cette génératrice a de même pour équation

$$(vw' - v'w)x + (wu' - w'u)y + (uv' - u'v)z = \Sigma u'\xi. \tag{36}$$

Il est facile de voir que les numérateurs et le dénominateur des expressions (35) ont un facteur commun, et qu'il en est de même des deux membres de l'équation (36).

Considérons, en effet, les valeurs de t pour lesquelles on a $\Sigma u'\xi = 0$, sans qu'on ait en même temps

$$u : v : w = u' : v' : w'. \tag{37}$$

Des équations

$$\Sigma u\xi = 0, \qquad \Sigma u'\xi = 0$$

on tire

$$\xi : \eta : \zeta = (vw' - v'w) : (wu' - w'u) : (uv' - u'v).$$

Des équations

$$\Sigma \xi' u = 0, \qquad \Sigma \xi' u' = 0$$

on tire de même

$$\xi' : y' : \zeta' = (vw' - v'w) : (wu' - w'u) : (uv' - u'v) = \xi : \eta : \zeta.$$

Donc les valeurs de t considérées annulent les numérateurs des expressions (35).

On verrait de même que les valeurs de t qui annulent $\Sigma u'\xi$, sans qu'on ait en même temps

$$\xi : \eta : \zeta = \xi' : \eta' : \zeta', \tag{38}$$

annulent le premier membre de l'équation (36).

Or les valeurs de t pour lesquelles les équations (37) sont satisfaites correspondent aux points de l'arête de rebroussement situés à l'infini. De même les valeurs de t qui satisfont aux équations (38) correspondent aux plans tangents de la surface C_n qui passent par l'origine. Si donc nous appelons m l'ordre de l'arête de rebroussement et c la classe de la surface développable, les numérateurs et les dénominateurs des expressions (35) ont un facteur commun d'ordre c, et les deux termes de l'équation (36) un facteur commun d'ordre m. D'ailleurs $\Sigma u'\xi$ est d'ordre $2(n-1)$; donc on a

$$(39) \qquad c+m=2(n-1).$$

Soit maintenant r le nombre des points stationnaires de l'arête de rebroussement et s le nombre de ses plans stationnaires.

On obtiendra le nombre des points stationnaires en exprimant que trois génératrices infiniment voisines de la surface passent par un même point, ce qui donne

$$(40) \qquad (\xi, \eta', \zeta'')=0.$$

On obtiendra les plans osculateurs stationnaires en exprimant que trois génératrices infiniment voisines de la surface sont situées dans un même plan, sans passer par le même point, ce qui donne

$$(41) \qquad (u, v', w'')=0.$$

Les équations (40) et (41) sont d'ordre $3(n-2)$ en t; mais des solutions de l'équation (40) il faut retrancher celles des équations (38), qui sont évidemment étrangères.

De même, des solutions de l'équation (41), il faut retrancher celles de l'équation (37).

D'ailleurs ces solutions étrangères sont racines doubles des équations (40) et (41), car elles annulent les dérivées des premiers membres de ces équations. On a donc enfin

$$(42) \qquad \begin{cases} r=3(n-2)-2c; \\ s=3(n-2)-2m. \end{cases}$$

Des équations (39) et (42) on déduit facilement

$$r=2m-n-2,$$
$$s=2c-n-2,$$

et comme ces nombres r et s ne peuvent être négatifs, on a nécessairement

$$m \gtreqless \frac{n+2}{2}, \qquad c \gtreqless \frac{n+2}{2}.$$

13. Les résultats qui précèdent nous permettent d'établir très simplement la classification bien connue des surfaces développables rationnelles, qui comprennent, ainsi que l'a démontré M. Schwarz, toutes celles des sept premiers ordres.

Développable du quatrième ordre : $n = 4$. On a

$$m + c = 6,$$

et les inégalités du § 12 démontrent qu'on doit prendre

$$m = 3, \qquad c = 3,$$

d'où

$$r = s = 0.$$

Ainsi la développable du quatrième ordre est de la troisième classe et son arête de rebroussement est une cubique gauche qui n'a ni point de rebroussement, ni plan stationnaire.

Développable du cinquième ordre : $n = 5$. On a

$$m + c = 8,$$

et les inégalités

$$m \gtreqless \frac{7}{2}, \qquad c \gtreqless \frac{7}{2}$$

obligent à prendre

$$m = c = 4,$$

d'où

$$r = s = 1.$$

La développable du cinquième ordre est donc de la quatrième classe et elle a pour arête de rebroussement une quartique gauche ayant un point de rebroussement et un plan stationnaire.

Développable du sixième ordre : $n = 6$. On a

$$m + c = 10, \qquad m \gtreqless 4, \qquad c \gtreqless 4.$$

Il y a trois cas à considérer :

1° $$m = 4, \qquad c = 6,$$

d'où

$$r = 0, \qquad s = 4.$$

La développable est de la sixième classe et elle est osculatrice à une quartique gauche unicursale ayant quatre plans stationnaires et pas de point de rebroussement.

2° $$m = 5, \qquad c = 5,$$

d'où

$$r = s = 2.$$

La développable est de la cinquième classe et elle a pour arête de rebroussement une quintique ayant deux points de rebroussement et deux plans stationnaires.

3° $$m = 6, \qquad c = 4,$$

d'où

$$r = 4, \qquad s = 0.$$

Ce cas est réciproque du premier; la développable est de la quatrième classe et elle a pour arête de rebroussement une sextique gauche ayant quatre points de rebroussement et pas de plan stationnaire.

Développables du septième ordre : $n = 7$. On a

$$m + c = 12,$$

$$m \gtreqless \frac{9}{2}, \qquad c \gtreqless \frac{9}{2}.$$

On obtient trois surfaces distinctes :

1° $$m = 5, \qquad c = 7,$$

d'où

$$r = 1, \qquad s = 5.$$

La développable est de la septième classe et elle est osculatrice à une quintique gauche ayant un point de rebroussement et cinq plans stationnaires.

2° $$m = 6, \qquad c = 6,$$

d'où

$$r = s = 3.$$

La développable est de la sixième classe ; son arête de rebroussement est une sextique gauche ayant trois points de rebroussement et trois plans stationnaires.

3° $$m = 7, \qquad c = 5,$$

d'où

$$r = 5, \qquad s = 1.$$

Ce cas est corrélatif du premier.

La développable est de la cinquième classe; son arête de rebroussement est une courbe du septième ordre ayant cinq points de rebroussement et un seul plan stationnaire.

14. Nous ne pousserons pas plus loin cette énumération et nous nous bornerons à montrer comment les résultats qui précèdent permettent encore de déterminer un maximum pour le nombre des points de rebroussement d'une courbe gauche unicursale.

On a

$$r = 2m - n - 2,$$

d'où

$$n = 2m - 2 - r, \qquad c = 2(n-1) - m = 3m - 6 - 2r.$$

Or on a

$$c \geqq \frac{n+2}{2},$$

ou, en remplaçant c et n par leurs valeurs,

$$6m - 12 - 4r \geqq 2m - r,$$

d'où

$$r \leqq \frac{4m-12}{3}.$$

On obtient donc une valeur maximum de r en prenant le plus grand entier contenu dans $\frac{4m-12}{3}$. Ainsi une cubique gauche n'a pas de point de rebroussement, une quartique gauche en a un au plus, une quintique gauche deux au plus, etc.