S. MANGEOT

Recherche des surfaces admettant la symétrie courbe des surfaces polyédrales

Bulletin de la S. M. F., tome 20 (1892), p. 84-90
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1892__20__84_1>

Recherche des surfaces admettant la symétrie courbe des surfaces polyédrales; par M. S. Mangeot.

L'Académie des Sciences a mis au concours, il y a quelques années, l'étude des surfaces qui admettent les plans de symétrie des polyèdres réguliers.

L'extension que j'ai donnée à l'idée de symétrie (1) m'a conduit à rechercher quelles sont les surfaces qui possèdent les surfaces de symétrie des surfaces polyédrales.

Pour qu'un système de plans soit symétrique par rapport à une

(1) *De la symétrie courbe*, thèse de Doctorat. Imprimerie Gauthier-Villars et fils.

surface, il faut évidemment, et il suffit, que les plans qui le composent soient deux à deux symétriques l'un de l'autre par rapport à la surface. Si

$$y^2 = kx^2$$

est l'équation, en axes rectangles, de deux plans du système, une surface de symétrie quelconque de l'ensemble des deux plans vérifie la relation

$$kx\frac{\partial z}{\partial x} = y\frac{\partial z}{\partial y},$$

et, dès lors, est exprimée par une équation telle que

$$xy^k = F(z).$$

La condition pour que deux autres plans (P), (P_1) du système, représentés par les équations

$$P = ax + by + cz + d = 0, \qquad P_1 = a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,$$

soient symétriques l'un de l'autre par rapport à cette même surface a pour expression

$$\begin{aligned}&[by^{k+1} + (cz + d)y^k + a\,F(z)][a_1y^{k+1} - c_1yF'(z) + kb_1F(z)]\\ &+[b_1y^{k+1} + (c_1z + d_1)y^k + a_1F(z)][ay^{k+1} - cy\,F'(z) + kb\,F(z)] = 0,\end{aligned}$$

et donne lieu aux relations

$$\begin{gathered}ab_1 + ba_1 = ac_1 + ca_1 = ad_1 + da_1 = 0,\\ bc_1 + cb_1 = bd_1 + db_1 = 0,\\ 2(aa_1 + k\,bb_1)F(z) = (2cc_1z + cd_1 + dc_1)F'(z),\end{gathered}$$

qui déterminent les fonctions P, P_1, $F(z)$. On trouve les deux solutions

$$P = ax + cZ, \qquad P_1 = \frac{a_1}{a}(ax - cZ), \qquad F(z) = h\,Z^{-\frac{a^2}{c^2}}$$

et

$$P = by + cZ, \qquad P_1 = \frac{b_1}{b}(by - cZ), \qquad F(z) = hZ^{-\frac{kb^2}{c^2}}$$

en posant $Z = z + \frac{d}{c}$ et désignant par h une constante arbitraire. Si l'on transporte l'origine des coordonnées au point de l'axe des z dont la cote est $-\frac{d}{c}$, on voit que l'équation de la surface est de la forme

$$xy^k z^{k'} = h,$$

k' étant une constante, et les deux plans (P), (P_1) sont ceux qui correspondent à l'une ou l'autre des deux formules

$$x^2 = \frac{z^2}{k}, \qquad \frac{y^2}{k} = \frac{z^2}{k'}.$$

L'interprétation de ces résultats conduit aux propositions suivantes :

1° Un système de plans ne peut offrir la symétrie par rapport à une surface courbe, indécomposable, que si les plans du système passent par un même point et sont au nombre de 2, 4 ou 6 : d'où il résulte que les surfaces polyédrales fermées ne peuvent avoir d'autres surfaces de symétrie que des plans;

2° Quand un système de plans présente la symétrie relativement à une surface courbe, il admet une infinité d'autres surfaces de symétrie;

3° Les seuls angles polyèdres convexes symétriques par rapport à des surfaces courbes sont les angles tétraèdres dont les quatre arêtes sont les diagonales d'un même parallélépipède rectangle;

4° Les systèmes de six plans qui possèdent la symétrie courbe sont ceux formés par les six plans diagonaux des parallélépipèdes rectangles.

Les surfaces de symétrie des systèmes de six plans ne diffèrent pas de celles des systèmes de quatre plans. Celles-ci, rapportées aux trois plans de symétrie qu'admet nécessairement le système, ont pour équation

$$x^m y^n z^r = \text{const.}, \tag{1}$$

les quatre plans du système étant définis par deux quelconques des relations

$$\frac{y^2}{n} = \frac{z^2}{r}, \qquad \frac{z^2}{r} = \frac{x^2}{m}, \qquad \frac{x^2}{m} = \frac{y^2}{n}.$$

Je trouve ainsi que les surfaces Σ qui correspondent à la formule (1) sont toutes les surfaces de symétrie des surfaces polyédrales. Le problème que je me suis proposé sera donc résolu si, me donnant les valeurs de m, n, r, je puis déterminer les surfaces S qui sont symétriques par rapport à chacune des surfaces Σ.

Je considère, à cet effet, les courbes définies par les deux équations

$$(2) \qquad \frac{x^2}{m} - \frac{y^2}{n} = \lambda, \qquad \frac{x^2}{m} - \frac{z^2}{r} = \mu,$$

λ et μ étant deux paramètres. Chacune d'elles est symétrique par rapport à l'une quelconque des surfaces Σ comme étant l'intersection de deux cylindres hyperboliques qui ont tous deux cette symétrie, et il en sera évidemment de même de chacune des surfaces de la congruence que forment ces courbes, c'est-à-dire des surfaces représentées par l'équation

$$(3) \qquad f\left(\frac{x^2}{m} - \frac{y^2}{n},\ \frac{x^2}{m} - \frac{z^2}{r}\right) = 0,$$

où f est le symbole d'une fonction arbitraire. Ces surfaces font donc partie des surfaces S. J'ajoute que ce sont toutes les surfaces S. En effet, soit S′ l'une quelconque de celles-ci. J'imagine une courbe C tracée à volonté sur S′, et un point $M(x', y', z')$ pris sur cette courbe. Le lieu des points symétriques du point M par rapport à toutes les surfaces Σ est une courbe C′, qui doit appartenir à la surface S′ : or les équations de C′ sont

$$\frac{x^2}{m} - \frac{y^2}{n} = \frac{x'^2}{m} - \frac{y'^2}{n}, \qquad \frac{x^2}{m} - \frac{z^2}{r} = \frac{x'^2}{m} - \frac{z'^2}{r},$$

et leur forme fait voir que, si le point M décrit la courbe C, la surface engendrée par C′, c'est-à-dire la surface S′, devra avoir une équation telle que (3).

On peut écrire l'équation (3) sous cette forme, plus symétrique,

$$(4) \qquad f\left(\frac{y^2}{m} - \frac{z^2}{r},\ \frac{z^2}{r} - \frac{x^2}{m},\ \frac{x^2}{m} - \frac{y^2}{n}\right) = 0.$$

On est parvenu, en définitive, au théorème suivant :

L'équation (4), *dans laquelle f désigne une fonction arbitraire, est l'équation générale des surfaces* S *qui admettent toutes les surfaces de symétrie des surfaces polyédrales; et ces surfaces de symétrie sont données par la formule* (1).

En particulier, les équations

$$f(x^2 + kz^2, y^2 + kz^2) = 0 \qquad (k < 0),$$
$$f(2x^2 - z^2, 2y^2 - z^2) = 0,$$
$$f(y^2 - z^2, z^2 - x^2, x^2 - y^2) = 0$$

définissent respectivement les surfaces qui ont la symétrie courbe de l'angle tétraèdre régulier, celle de l'angle polyèdre de l'octaèdre régulier, et celle de l'angle tétraèdre formé par les diagonales du cube; et les deux formules

$$f(x^2+z^2, y^2+z^2)=0, \qquad f(2x^2+z^2, 2y^2+z^2)=0$$

déterminent, la première, les surfaces dont chacune est symétrique par rapport à tous les paraboloïdes isoscèles ($xy = hz$) ayant le même sommet et les mêmes plans principaux; la seconde, les surfaces dont chacune est symétrique par rapport à tous les cônes du second ordre ($xy = hz^2$), ayant les mêmes plans principaux avec une même section principale équilatère.

Je me propose de rechercher celles des surfaces S qui sont réglées et celles qui sont de révolution.

Si l'on assujettit la courbe (2), génératrice de toutes les surfaces S, à s'appuyer sur une droite donnée, on trouve une relation telle que

$$(5) \qquad (a\lambda+b\mu+c)^2+a'\lambda+b'\mu+c'=0,$$

se réduisant à la forme

$$(6) \qquad (a_1\lambda+b_1\mu+c_1)^2+a'_1\lambda=0,$$

lorsque la droite rencontre l'axe des z, et à celle-ci

$$(7) \qquad (a_2\lambda+b_2\mu+c_2)^2+b'_2\mu=0,$$

quand la droite coupe l'axe des y. Cette relation représente la surface engendrée si l'on y suppose λ et μ remplacés par les valeurs $\frac{x^2}{m}-\frac{y^2}{n}$, $\frac{x^2}{m}-\frac{z^2}{r}$. On en conclut que celles des surfaces S sur lesquelles on peut appliquer une droite qui ne soit pas parallèle à l'une des droites D définies par les formules

$$\frac{x^2}{m}=\frac{y^2}{n}=\frac{z^2}{r}$$

sont des surfaces du second ou du quatrième ordre. Or considérons une surface S qui soit réglée : son équation aura nécessairement la forme (5). On reconnaît que, si elle n'est pas un des cylindres correspondant aux formules (2), celles de ses génératrices qui rencontrent l'axe des y ou l'axe des z ne sont parallèles à aucune des droites D. Il en résulte que son équation doit avoir à la fois l'une et l'autre des formes (6) et (7), et comme ces formes ne peuvent être identiques qu'autant que a'_1 et b'_2 sont nuls, on voit que la surface considérée est, dans tous les cas, du deuxième degré.

D'un autre côté, en partant de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$p\frac{m}{x}+q\frac{n}{y}=\frac{r}{z}$$

qui caractérise les surfaces S, et cherchant à y satisfaire en même temps qu'à l'équation aux dérivées partielles des surfaces de révolution, on trouve que celle-ci doit se réduire à la forme

$$qx-py=0,$$

lorsqu'on suppose l'axe de révolution non parallèle au plan des xy. Or la solution commune à ces deux équations est, on s'en assure aisément,

$$z=\sqrt{\frac{r(x^2+y^2)}{m+n}+\text{const.}}$$

On en conclut que les surfaces S qui sont de révolution doivent vérifier l'une ou l'autre des trois équations

$$\frac{x^2}{m}-\frac{y^2+z^2}{n+r}=\text{const.},$$
$$\frac{y^2}{n}-\frac{z^2+x^2}{r+m}=\text{const.},$$
$$\frac{z^2}{r}-\frac{x^2+y^2}{m+n}=\text{const.}$$

Donc, *les seules surfaces réglées, et les seules surfaces de révolution qui possèdent la symétrie courbe des surfaces polyédrales, sont des quadriques.*

J'indiquerai encore un résultat concernant les plans de symétrie du cube.

Rapportées aux trois droites qui joignent les centres des faces opposées du cube, les surfaces S_1 qui ont les surfaces de symétrie du système des six plans diagonaux du cube sont définies par l'équation

$$f(y^2-z^2,\ z^2-x^2,\ x^2-y^2)=0,$$

et ces surfaces de symétrie par la formule

$$xyz=\text{const.}$$

Je cherche celles des surfaces S_1 qui sont symétriques par rapport aux six plans précédents. Chacun des neuf plans

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = 0,$$
$$y = \pm z, \qquad z = \pm x, \qquad x = \pm y$$

étant alors un plan de symétrie de ces surfaces, leur équation doit pouvoir être ramenée, d'après un résultat connu, à la forme

$$\varphi(u, v, w) = 0,$$

en posant

$$u = x^2 + y^2 + z^2, \qquad v = y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2, \qquad w = x^2 y^2 z^2.$$

Comme l'équation aux dérivées partielles des surfaces S_1 est

$$\frac{p}{x} + \frac{q}{y} = \frac{1}{z},$$

la question revient à déterminer la fonction φ satisfaisant à la condition

$$\frac{1}{x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{1}{z}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0.$$

Cette relation, exprimée uniquement à l'aide de u, v, w, s'écrit ainsi

$$3\frac{\partial\varphi}{\partial u} + 2u\frac{\partial\varphi}{\partial v} + v\frac{\partial\varphi}{\partial w} = 0.$$

En l'intégrant, on trouve que φ est une fonction quelconque des deux quantités

$$u^2 - 3v, \quad 2u^3 - 9uv + 27w,$$

c'est-à-dire une fonction des deux expressions

$$(y^2 - z^2)^2 + (z^2 - x^2)^2 + (x^2 - y^2)^2,$$
$$(y^2 + z^2 - 2x^2)(z^2 + x^2 - 2y^2)(x^2 + y^2 - 2z^2).$$

On en conclut que l'équation arbitraire

$$\varphi[\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2, (\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)(\alpha - \beta)] = 0,$$

où l'on a

$$\alpha = y^2 - z^2, \qquad \beta = z^2 - x^2, \qquad \gamma = x^2 - y^2,$$

définit des surfaces, et les seules surfaces, possédant la symétrie plane du cube et la symétrie courbe du système de ses six plans diagonaux [1].

---

[1] J'ai fait connaître les résultats qui précèdent dans une Communication présentée à l'Académie des Sciences (séance du 29 juin 1891).