BULLETIN DE LA S. M. F.

V. SCHLEGEL

Sur une méthode pour représenter dans le plan les cubes magiques à n dimensions

Bulletin de la S. M. F., tome 20 (1892), p. 97-103
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1892__20__97_0>

Sur une méthode pour représenter dans le plan les cubes magiques à n dimensions; par M. Schlegel.

1. Pour fixer la notion d'un *cube magique à n dimensions* il faut d'abord se rappeler que le segment de droite, le carré et le cube peuvent être regardés comme les premiers termes d'une série de figures que l'on peut poursuivre dans l'espace à n dimensions ([1]).

Le terme général de cette série, c'est-à-dire une figure régulière à n dimensions et à 2^n sommets est ce que nous appelons le *cube à n dimensions*.

Représentons-nous un système formé de $r-1$ espaces à $n-1$ dimensions, équidistants et parallèles entre eux. Alors un cube à n dimensions peut être décomposé, au moyen de n systèmes pareils, normaux l'un à l'autre, en r^n cubes congrus (cellules).

Ainsi l'on trouve, pour $n=2$ et $r=5$, que le carré est décomposé en 25 carrés par 2 systèmes de 4 droites; ou, en posant $n=3$, $r=5$, le cube décomposé en 125 cubes par 3 systèmes de 4 plans. Remarquons aussi que la figure peut être regardée, de n manières différentes, comme agrégat de r^{n-1} séries linéaires de r cellules.

Imaginons encore qu'on ait distribué, aux r^n cellules, les nombres entiers de 1 à r^n, de sorte que toute série linéaire de nombres, dans toutes les n directions, donne la même somme s; alors cet agrégat de nombres est ce que nous appelons un *cube magique à n dimensions et de l'ordre r*.

On aura

$$s = \frac{(1+r^n)r^n}{2} : r^{n-1} = \frac{(1+r^n)r}{2}. \tag{1}$$

Si, en outre, chacune des 2^{n-1} séries diagonales donne la somme s, nous dirons que le cube magique est *parfait*.

Avant de traiter le problème mentionné dans le titre de ce Mémoire, nous donnons préalablement quelques autres remarques sur les cubes magiques.

Si r est un nombre impair, on peut augmenter la perfection du cube magique, en ajoutant la condition que les séries joignant

---

([1]) *Voir* par exemple mon Mémoire : *Quelques théorèmes de Géométrie à n dimensions* (*Bull. Soc. math. de France,* t. X, p. 172).

les milieux de deux figures limitantes opposées (arêtes, faces, solides, etc.) donnent la même somme s. Or le nombre des figures à p dimensions limitant un cube à n dimensions est

(2) $$2^{(n-p)}\, n^{\cdot p},$$

où

(3) $$n^{\cdot p} = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p}.$$

Donc le nombre des séries joignant les milieux de deux figures opposées est

(4) $$2^{n-p-1}\, n^{\cdot p}.$$

Et comme il y a $n-1$ espèces de figures limitantes, diverses par le nombre de leurs dimensions, il faudra prendre dans l'expression (4) pour p toutes les valeurs de 1 à $n-1$, pour obtenir le nombre entier des conditions particulières comprises en la condition susdite. (En posant $p=0$ on retrouverait le nombre des séries diagonales.) Ainsi, en posant pour le cube ordinaire $n=3$, on trouve que le nombre des séries joignant les milieux des arêtes ($p=1$) est 6, et que le même nombre relatif aux faces ($p=2$) est 3.

Mais l'ensemble de ces conditions (que nous appelons *conditions primaires*) ne suffit pas encore pour restreindre le nombre des cubes magiques, qui les remplissent, à un seul. Donc on peut encore ajouter des conditions que nous appelons *secondaires*. Ainsi, pour $n=2$, on peut ajouter la condition connue que l'on passe d'un nombre au suivant par le saut du cavalier.

Enfin remarquons que tout nombre compris dans un cube magique à n dimensions est situé également dans n séries linéaires, $n^{\cdot 2}$ carrés, $n^{\cdot 3}$ cubes ordinaires, enfin en $n^{\cdot s}$ cubes à s dimensions.

2. Pour représenter dans le plan le cube magique à n dimensions, nous remplaçons chacune des r^n cellules à n dimensions, faisant partie du cube, par un petit carré (*élément*) qui renferme le nombre appartenant à la cellule. Alors on obtient sans difficulté les représentations suivantes (pour $r=3$) :

1° Le *cube à* 0 *dimensions* est l'élément lui-même, représenté par un simple carré (*fig.* 1).

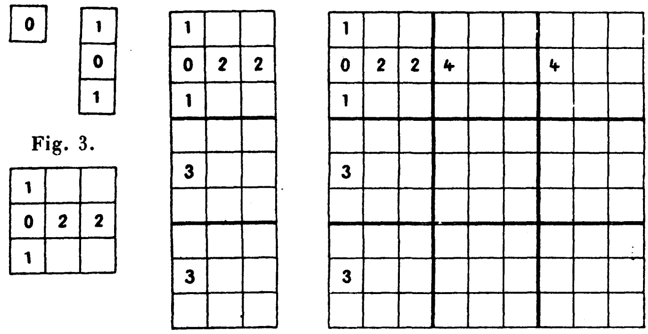
2° Le *cube à* 1 *dimension* fait partie de la série des nombres entiers commençant par 1 et est représenté par une bande composée de r carrés (*fig.* 2).

3° Le *cube à* 2 *dimensions* (le *carré* proprement dit) est représenté par r bandes de l'espèce précédente (*fig.* 3).

4° Le *cube à* 3 *dimensions* (le cube ordinaire). — Pour le représenter dans le plan nous l'imaginons décomposé en r carrés de l'espèce précédente. Ces carrés, placés l'un après l'autre, forment une bande qui est l'exacte image du cube (*fig.* 4).

5° Tout de même le *cube à* 4 *dimensions* est décomposé en r cubes à 3 dimensions. Donc il est représenté par un carré composé de r bandes de l'espèce précédente.

Fig 1. Fig. 2. Fig. 3. Fig. 4. Fig. 5.



On voit bien que cette méthode de représentation est susceptible d'être généralisée à volonté. Donc un cube magique à n dimensions est représenté par une bande, si n est impair, et par un carré, si n est pair. Alors la bande est composée de r carrés, et le carré de r bandes, et chacune de ces figures représente un cube à $(n - 1)$ dimensions, et ainsi de suite.

Il ne faut pas oublier que la décomposition d'un cube à n dimensions en cubes à $(n - 1)$ dimensions, impossible à l'égard de Géométrie, ne regarde ici qu'un ensemble de nombres, arrangé en forme de cube, arrangement qui donne bien lieu à la décomposition mentionnée. Aussi il importe peu d'imaginer que les nombres du cube magique à n dimensions soient renfermés en carrés plans au lieu de cellules à n dimensions.

Quant à l'image plane, chacun des petits carrés est situé dans n séries (ou bandes) rectilignes. Mais, tandis que dans le cube ces séries sont perpendiculaires l'une à l'autre, il faut les chercher dans l'image plane à l'aide des figures que nous venons de décrire. Ainsi on trouve que les groupes (0, 1, 1), (0, 2, 2), (o, 3, 3), (o, 4, 4) forment des séries rectilignes de petits carrés. On voit cela immédiatement dans les *fig.* 2 et 3. Quant aux *fig.* 4 et 5, il faut imaginer une superposition de carrés plus grands qui sont composés de 9 cellules et séparés l'un de l'autre par une double ligne. Alors on voit que les cellules (o, 3, 3) ou (o, 4, 4) sont de même superposées l'une à l'autre et forment une série rectiligne. On peut choisir à volonté une autre cellule que (o) et l'on trouvera aisément les séries qui la renferment. On voit aussi que généralement l'image plane d'un cube à $n+1$ dimensions, en comparaison de celui à n dimensions, contient une direction de plus, de sorte que cette image suffit complètement pour manifester l'égalité des sommes formées par les nombres de chaque série du cube magique. De même on ne rencontrera pas de difficultés à suivre les directions diagonales ou les autres directions qu'il faut prendre en considération dans le cube magique parfait de l'ordre impair.

Enfin il faut remarquer les deux théorèmes évidents :

1° *Toute image plane d'un cube magique à n dimensions et de l'ordre r, formée par un* carré, *représente également un cube magique à* $2s$ *dimensions et de l'ordre* $r^{\frac{n}{2}+1-s}$, *où* $2s < n$.

2° *Toute image plane d'un cube magique à n dimensions et de l'ordre r, formée par une* bande, *représente également un cube magique à* $(2s+1)$ *dimensions et de l'ordre* $r^{\frac{n+1}{2}-s}$, *où* $2s+1 < n$.

3. *Exemple.* — La méthode qui nous a servi à calculer l'exemple suivant [1] sera publié dans un Mémoire qui suivra. Elle est différente des méthodes employées par d'autres géomètres (Sauveur, Hugel, Scheffler) pour obtenir des cubes magiques à trois dimensions. Elle donne généralement la solution de ce problème : *Étant donné un cube magique à n dimensions et de l'ordre r, trouver à son aide un cube magique à* $n+1$ *dimensions et de l'ordre r.*

---

[1] Une série d'autres exemples, embrassant les cas : $n=3$ et $r=3$ à 9, $n=4$ et $r=4$ à 6, $n=5$ et $r=3$, est représentée par des Tableaux trop étendus pour être publiés ici.

Dans la résolution de ce problème il faut distinguer les cas : $r = 2\lambda + 1$, $r = 4\lambda + 2$, $r = 4\lambda$.

L'exemple suivant offre un cube magique parfait *à quatre dimensions de l'ordre* 3.

15	55	53	74	45	4	34	23	66
52	14	57	6	73	44	65	36	22
56	54	13	43	5	75	24	64	35
61	50	12	42	1	80	20	72	31
11	63	49	79	41	3	33	19	71
51	10	62	2	81	40	70	32	21
47	18	58	7	77	39	69	28	26
60	46	17	38	9	76	25	68	30
16	59	48	78	37	8	29	27	67

Cette figure représente encore, comme nous l'avons indiqué ci-dessus, un carré magique de l'ordre 9.

Au lieu du Tableau précédent on peut aussi faire usage, pour le même cube magique, de trois autres représentations en double projection, que l'on trouve dans mon Mémoire : *Sur une méthode pour représenter dans le plan les solides homogènes à n dimensions* (*Rendiconti del Circolo mat. di Palermo,* t. V, p. 1-7, *fig.* 2_a, 2_b et 3). En effet, on parvient aisément à placer les nombres aux sommets et aux milieux des arêtes, et, si l'on veut, aux milieux des faces.

Explications. — Voici d'abord les huit cubes magiques ordinaires limitant le cube à 4 dimensions :

1.

15	55	53	74	45	4	34	23	66
52	14	57	6	73	44	65	36	22
56	54	13	43	5	75	24	64	35

8.

47	18	58	7	77	39	69	28	26
60	46	17	38	9	76	25	68	30
16	59	48	78	37	8	29	27	67

2.

15	55	53	74	45	4	34	23	66
61	50	12	42	1	80	20	72	31
47	18	58	7	77	39	69	28	26

7.

56	54	13	43	5	75	24	64	35
51	10	62	2	81	40	70	32	21
16	59	48	78	37	8	29	27	67

3.

15	55	53
52	14	57
56	54	13
61	50	12
11	63	49
51	10	62
47	18	58
60	46	17
16	59	48

6.

34	23	66
65	36	22
24	64	35
20	72	31
33	19	71
70	32	21
69	28	26
25	68	30
29	27	67

4.

15	74	34
52	6	65
56	43	24
61	42	20
11	79	33
51	2	70
47	7	69
60	38	25
16	78	29

5.

53	4	66
57	44	22
13	75	35
12	80	31
49	3	71
62	40	21
58	39	26
17	76	30
48	8	67

Les cubes (1.8), (2.7), (3.6), (4.5) sont opposés l'un à l'autre.

Les huit *axes diagonaux* sont :

$|15.41.67|$, $|53.41.29|$, $|13.41.69|$, $|56.41.26|$,
$|34.41.48|$, $|66.41.16|$, $|35.41.47|$, $|24.41.58|$.

Les seize *lignes joignant les milieux des arêtes opposées* sont :

$|55.41.27|$, $|57.41.25|$, $|54.41.28|$, $|52.41.30|$,
$|23.41.59|$, $|22.41.60|$, $|64.41.18|$, $|65.41.17|$,
$|74.41.\ 8|$, $|\ 4.41.78|$, $|75.41.\ 7|$, $|43.41.39|$,
$|61.41.21|$, $|12.41.70|$, $|62.41.20|$, $|51.41.31|$.

Les douze *lignes joignant les centres des faces opposées* sont :

$|14.41.68|$, $|36.41.46|$, $|42.41.40|$, $|80.41.\ 2|$,
$|45.41.37|$, $|44.41.38|$, $|\ 5.41.77|$, $|\ 6.41.76|$,
$|50.41.32|$, $|49.41.33|$, $|10.41.72|$, $|11.41.71|$.

Les quatre *lignes joignant les centres des cubes opposés* sont :

$|73.41.\ 9|$, $|63.41.19|$, $|\ 1.41.81|$, $|79.41.\ 3|$.

Toutes les sommes le long des quatre directions principales des huit axes diagonaux et des lignes joignant les milieux des arêtes, faces et cubes opposés, font 123.

Outre cela, chacun des huit cubes limitants a un axe diagonal qui donne la même somme. Ces axes, avec les numéros donnés à ces cubes ci-dessus, sont :

(1) | 15.73.35 |, (2) | 53. 1.69 |, (3) | 13.63.47 |, (4) | 15.79.29 |,
(5) | 53. 3.67 |, (6) | 35.19.69 |, (7) | 13.81.29 |, (8) | 47. 9.67 |,

Ces axes forment ensemble une ligne continue et rentrant en elle-même.

Tout nombre est situé simultanément dans quatre séries linéaires (suivant les directions principales). Par exemple, ces séries sont, pour le nombre 54,

| 55.14.54 |, | 56.54.13 |, | 54. 5.64 |, | 54.10.59 |.

Puis tout nombre est situé dans six carrés, par exemple le nombre 54 dans les suivants :

15	55	53
52	14	57
56	54	13

56	54	13
51	10	62
16	59	48

55	50	18
14	63	46
54	10	59

55	45	23
14	73	36
54	5	64

56	54	13
43	5	75
24	64	35

54	5	64
10	81	32
59	37	27

Enfin, tout nombre est situé dans trois cubes à trois dimensions.