BULLETIN DE LA S. M. F.

E. GENTY

Note sur des couples de surfaces applicables

Bulletin de la S. M. F., tome 22 (1894), p. 36-44
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1894__22__36_1>

NOTE SUR DES COUPLES DE SURFACES APPLICABLES;

Par M. E. Genty.

Dans une Communication récente, M. Caronnet [1] s'est pro-

---

[1] *Bulletin de la Société mathématique*, t. XXI, p. 134.

posé de rechercher les couples de surfaces applicables l'une sur l'autre et telles que la distance des points correspondants soit constante. Il a trouvé deux groupes de telles surfaces; dans le premier groupe, les coordonnées d'un point quelconque dépendent de deux fonctions arbitraires de deux paramètres différents; les surfaces du second groupe sont réglées; elles dépendent de deux fonctions arbitraires d'un même paramètre et sont applicables l'une sur l'autre avec parallélisme des génératrices correspondantes.

Le regretté Ribaucour a étudié depuis longtemps les surfaces du premier groupe. Dans son *Mémoire* (couronné par l'Académie de Bruxelles) *sur les élassoïdes ou surfaces à courbure moyenne nulle,* il a établi le lien étroit qui rattache cette théorie avec celle de la correspondance avec la sphère par orthogonalité des éléments, et il a démontré la proposition remarquable dont voici l'énoncé :

Si les extrémités d'une droite de longueur constante sont les points correspondants de deux surfaces applicables l'une sur l'autre, le plan mené normalement à la corde par son point milieu enveloppe une surface minima.

Nous allons reprendre cette question et montrer avec quelle facilité on peut obtenir les résultats de MM. Ribaucour et Caronnet par les procédés de la Géométrie vectorielle.

Soient ρ et ϖ les vecteurs de deux points correspondants M et P de deux surfaces (S) et (Π). Le point O étant l'origine, on peut construire deux nouvelles surfaces (S_1) et (S_2) en menant par le point M une parallèle à OP et en portant sur cette droite, de part et d'autre du point M, deux longueurs égales à OP.

Les surfaces (S_1) et (S_2) auront pour équation vectorielle

$$\varpi_1 = \rho + \varpi,$$
$$\varpi_2 = \rho - \varpi,$$

et, si l'on veut qu'elles soient applicables l'une sur l'autre, on devra satisfaire à la condition

$$T^2(d\rho + d\varpi) = T^2(d\rho - d\varpi)$$

ou

$$S\,d\rho\,d\varpi = 0;$$

on voit donc que *la surface* (S) *et la surface* (H) *devront se correspondre par orthogonalité des éléments.*

Si l'on suppose que (H) soit une sphère ayant son centre à l'origine, la distance $M_1 M_2$ de deux points correspondants des surfaces (S_1) et (S_2) sera constante: c'est le résultat obtenu par M. Caronnet.

La recherche de ce groupe de surfaces revient donc à celle des surfaces qui correspondent à la sphère par orthogonalité des éléments. Soit alors

$$d\nu = \nu_1 du + \nu_2 dv$$

l'équation différentielle de la sphère unitaire rapportée aux paramètres de ses lignes de longueur nulle; ν étant un orienteur, on aura

$$(1)\quad \begin{cases} T^2\nu_1 = 0, \quad T^2\nu_2 = 0, \quad S\nu_1\nu_2 = F, \quad V\nu_1\nu_2 = iF\nu, \\ TV\nu_1\nu_2 = iF, \quad \nu_{11} = \dfrac{\partial \log F}{\partial u}\nu_1, \quad \nu_{12} = -F\nu, \quad \nu_{22} = \dfrac{\partial \log F}{\partial v}\nu_2, \end{cases}$$

$$(2)\qquad \frac{\partial^2 \log F}{\partial u \partial v} + F = 0,$$

en désignant par les indices 1 et 2, respectivement, les opérations $\dfrac{\partial}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial}{\partial v}$ effectuées sur des vecteurs.

Ceci posé, je dis que le vecteur $\dfrac{\nu_1}{F}$ est indépendant de u; il faut démontrer qu'on a

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\nu_1}{S\nu_1\nu_2}\right) = 0$$

ou

$$\nu_{11} S\nu_1\nu_2 - \nu_1(S\nu_{11}\nu_2 + S\nu_1\nu_{12}) = 0,$$

et l'on voit tout de suite que cette équation est vérifiée.

On reconnaîtrait de même que le vecteur $\dfrac{\nu_2}{F}$ est indépendant de v.

Soit alors ρ le vecteur d'une surface correspondant à la sphère par orthogonalité des éléments: on aura identiquement

$$S\,d\rho\, d\nu = 0,$$

d'où

$$S\rho_1\nu_1 = 0, \qquad S\rho_2\nu_2 = 0,$$
$$S\rho_1\nu_2 + S\rho_2\nu_1 = 0.$$

Les deux premières équations peuvent s'écrire

$$\mathrm{S}\rho_1 \frac{\nu_1}{\mathrm{F}} = 0, \qquad \mathrm{S}\rho_2 \frac{\nu_2}{\mathrm{F}} = 0,$$

et donnent immédiatement

$$(3) \qquad \begin{cases} \mathrm{S}\rho\nu_1 = \mathrm{FV}, \\ \mathrm{S}\rho\nu_2 = \mathrm{FU}, \end{cases}$$

U et V étant des fonctions de u et de v, respectivement.

La troisième peut s'écrire

$$\frac{\partial \mathrm{S}\rho\nu_2}{\partial u} + \frac{\partial \mathrm{S}\rho\nu_1}{\partial v} = 2\,\mathrm{S}\widehat{\rho\nu_{12}},$$

ou, en tenant compte des équations (1) et (3),

$$(4) \qquad \mathrm{S}\widehat{\nu\rho} = -\frac{1}{2\mathrm{F}}\left[\frac{\partial(\mathrm{FU})}{\partial u} + \frac{\partial(\mathrm{FV})}{\partial v}\right].$$

Les équations (3) et (4) donnent la solution du problème; si on les résout par rapport à ρ, il vient

$$\rho = \mathrm{V}\nu_2 + \mathrm{U}\nu_1 - \frac{1}{2\mathrm{F}}\left[\frac{\partial(\mathrm{FU})}{\partial u} + \frac{\partial(\mathrm{FV})}{\partial v}\right]\nu,$$

et alors les surfaces

$$\varpi = \rho + l\nu,$$
$$\varpi = \rho - l\nu,$$

où l est une constante, sont deux surfaces applicables l'une sur l'autre de telle sorte que la distance $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2$ de deux points correspondants soit constante.

Si dans l'équation

$$\varpi = \rho + l\nu$$

on regarde l comme un paramètre variable, elle représentera la congruence des droites M_1, M_2. Je dis que cette congruence est *isotrope* et que le point ρ est un point de sa surface moyenne.

Il faut, pour cela, qu'on ait identiquement

$$\mathrm{S}\,d\rho\,d\nu = 0;$$

ce qui donne les trois conditions

$$(5) \qquad \mathrm{S}\rho_1\nu_1 = 0, \qquad \mathrm{S}\widehat{\rho_2\nu_2} = 0,$$

$$(6) \qquad \mathrm{S}\rho_1\nu_2 + \mathrm{S}\rho_2\nu_1 = 0.$$

Or, si l'on différentie par rapport à u la première des équations (3), il vient

$$S\rho_1\nu_1 = -S\rho\nu_{11} + V\frac{\partial F}{\partial u} = -\frac{\partial \log F}{\partial u}S\rho\nu_1 + V\frac{\partial F}{\partial u} = 0;$$

on verrait de même qu'on a

$$S\rho_2\nu_2 = 0.$$

Si enfin on différentie les équations (3) par rapport à v et par rapport à u respectivement, il vient

$$S\nu_1\rho_2 = \frac{\partial(FV)}{\partial v} - S\widehat{\rho\nu_{12}} = \frac{\partial(FV)}{\partial v} + FS\nu\rho,$$

$$S\rho_1\nu_2 = \frac{\partial(FU)}{\partial u} - S\widehat{\rho\nu_{12}} = \frac{\partial(FU)}{\partial n} + FS\nu\rho,$$

et l'équation (6) est aussi vérifiée en vertu de l'équation (4).

Je dis maintenant que le plan moyen de la congruence, c'est-à-dire le plan mené par le point M normalement à v, enveloppe une surface minima.

De la valeur trouvée pour le vecteur ρ du point M de la surface moyenne, on déduit très simplement

$$(7)\qquad \begin{cases} \rho_1 = mF\nu + l\nu_1, \\ \rho_2 = n\,F\nu - l\nu_2, \end{cases}$$

où l'on a posé

$$mF = \frac{\partial p}{\partial u} - FV, \qquad nF = \frac{\partial p}{\partial v} - FU;$$

$$l = \frac{1}{2F}\left[\frac{\partial(FU)}{\partial u} - \frac{\partial(FV)}{\partial v}\right],$$

et enfin

$$p = -\frac{1}{2F}\left[\frac{\partial(FU)}{\partial u} + \frac{\partial(FV)}{\partial v}\right].$$

Or l'équation du plan moyen est

$$S(\varpi - \rho)\nu = 0.$$

Si l'on prend les dérivées par rapport à u et par rapport à v, il vient

$$S(\varpi - \rho)\nu_1 = mF,$$

$$S(\varpi - \rho)\nu_2 = nF.$$

En résolvant les trois équations qui précèdent, il vient pour le vecteur du point N de l'enveloppée moyenne

$$\varpi = \rho + m\nu_2 + n\nu_1.$$

Le vecteur $m\nu_2 + n\nu_1$, qui est évidemment tangent à l'enveloppée moyenne, touche aussi la surface moyenne; on a, en effet,

$$S(m\nu_2 + n\nu_1)(m F\nu + l\nu_1)(n F\nu - l\nu_2) = 0.$$

Donc *la droite qui joint le point central d'un rayon d'une congruence isotrope au point de contact du plan moyen avec l'enveloppée moyenne engendre une congruence dont les focales sont la surface moyenne et l'enveloppée moyenne.*

Si l'on écrit maintenant que les valeurs de ρ_1 et de ρ_2 tirées des équations (7) sont égales, on obtient sans difficulté les relations suivantes

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} &l F + \frac{\partial(n F)}{\partial u} = 0, \qquad &l F - \frac{\partial(m F)}{\partial v} = 0;\\ &\frac{\partial l}{\partial u} + m F = 0, \qquad &\frac{\partial l}{\partial v} = n F.\end{aligned}\right.$$

On a d'ailleurs, en tenant compte des relations (1) et (8),

$$\frac{\partial\varpi}{\partial u} = l\nu_1 + \frac{\partial m}{\partial u}\nu_2 + \frac{\partial n}{\partial u}\nu_1 + n\frac{\partial \log F}{\partial u}\nu_1 = \frac{\partial m}{\partial u}\nu_2;$$

$$\frac{\partial\varpi}{\partial v} = \frac{\partial n}{\partial v}\nu_1;$$

donc les lignes de longueur nulle de l'enveloppée moyenne ont pour image sphérique les lignes de longueur nulle de la sphère, ce qui caractérise les surfaces minima.

L'enveloppée moyenne est donc une surface minima; on aurait pu le démontrer encore en vérifiant directement la relation

$$\frac{\partial^2 p}{\partial u\,\partial v} + p F = 0,$$

qui exprime que le plan $S\nu\rho = p$ enveloppe une surface minima, lorsque u et v sont les paramètres des lignes de longueur nulle de la sphère.

L'équation des lignes asymptotiques de l'enveloppée moyenne est

$$S\, d\varpi\, d\nu = 0$$

ou

$$S\left(\frac{\partial m}{\partial u}\nu_2 + \frac{\partial n}{\partial v}\nu_1\right)(\nu_1 du + \nu_2 dv) = 0,$$

ou enfin

$$(9)\qquad \frac{\partial m}{\partial u} du^2 + \frac{\partial n}{\partial v} dv^2 = 0.$$

De même, si ν est un vecteur quelconque parallèle à la normale de la surface moyenne, l'équation des lignes asymptotiques de cette surface sera

$$S\, d\rho\, d\nu = 0.$$

Or on a

$$\nu \,||\, V(mF\nu + l\nu_1)(nF\nu - l\nu_2) \,||\, m\nu_2 - n\nu_1 - l\nu,$$

et si l'on prend

$$\nu = m\nu_2 - n\nu_1 - l\nu,$$

on trouve immédiatement, en tenant compte des relations (8),

$$\frac{\partial \nu}{\partial u} = \frac{\partial m}{\partial u}\nu_2 = \frac{\partial \varpi}{\partial u},$$
$$\frac{\partial \nu}{\partial v} = -\frac{\partial n}{\partial v}\nu_1 = -\frac{\partial \varpi}{\partial v},$$

de sorte que l'équation des lignes asymptotiques de la surface moyenne est

$$S\left(\frac{\partial m}{\partial u}\nu_2 du - \frac{\partial n}{\partial v}\nu_1 dv\right)[(mF\nu + l\nu_1)du + (nF\nu - l_2\nu)dv] = 0.$$

En développant le premier membre, on retrouve l'équation (9) : donc *les lignes asymptotiques se correspondent sur la surface moyenne et sur l'enveloppée moyenne d'une congruence isotrope*

On obtient les directions principales et les rayons principaux de courbure de l'enveloppée moyenne en résolvant l'équation vectorielle

$$d\varpi = \mathrm{R}\, d\nu,$$

ou

$$\frac{\partial m}{\partial u}\nu_2 du + \frac{\partial n}{\partial v}\nu_1 dv = \mathrm{R}(\nu_1 du + \nu_2 dv),$$

ce qui donne

$$\frac{\partial m}{\partial u} du = \mathrm{R}\, dv, \qquad \frac{\partial n}{\partial v} dv = \mathrm{R}\, du.$$

Si l'on élimine R entre ces équations, il vient, pour l'équation des lignes de courbure,

$$\frac{\partial m}{\partial u} du^2 - \frac{\partial n}{\partial v} dv^2 = 0.$$

Si, au contraire, on élimine du, dv, il vient

$$\mathrm{R}^2 = \frac{\partial m}{\partial u}\,\frac{\partial n}{\partial v},$$

ce qui montre de nouveau que l'enveloppée moyenne est bien une surface minima.

Si R et R′ sont les rayons principaux de courbure de cette surface, on a

$$\mathrm{RR}' = -\frac{\partial m}{\partial u}\,\frac{\partial n}{\partial v}.$$

Pour la surface moyenne, l'équation à résoudre prend la forme

$$d\rho = \mathrm{R}\, d\left(\frac{\nu}{t}\right)$$

ou

$$(10)\quad (m\mathrm{F}\nu + l\nu_1)du + (n\mathrm{F}\nu - l\nu_2)dv = \frac{\mathrm{R}}{t}\left(\frac{\partial m}{\partial u}\nu_2 du - \frac{\partial n}{\partial v}\nu_1 dv\right) - \frac{\mathrm{R}\,dt}{t^2}\nu,$$

où l'on a posé

$$t = \bar{\nu} = \overline{m\nu_2 - n\nu_1 - l\nu} = \sqrt{l^2 - 2mn\mathrm{F}}.$$

Si l'on projette l'équation (10) avec les vecteurs $m\mathrm{F}\nu + l\nu_1$ et $n\mathrm{F}\nu - l\nu_2$, il vient

$$m^2\mathrm{F}\, du + (mn\mathrm{F} - l^2)dv = \frac{l\mathrm{R}}{t}\,\frac{\partial m}{\partial u} du;$$

$$(mn\mathrm{F} - l^2)du + n^2\mathrm{F}\, dv = \frac{l\mathrm{R}}{t}\,\frac{\partial n}{\partial v} dv.$$

En éliminant du, dv, on obtient pour l'équation aux rayons de courbure principaux

$$\frac{l^2 R^2}{t^2} \frac{\partial m}{\partial u} \frac{\partial n}{\partial v} - \frac{l RF}{t}\left(n^2 \frac{\partial m}{\partial u} + m^2 \frac{\partial n}{\partial v}\right) + l^2 t^2 = 0.$$

Si R_1 et R'_1 sont les racines de cette équation, on a

$$R_1 R'_1 = \frac{t^4}{\frac{\partial m}{\partial u} \frac{\partial n}{\partial v}},$$

d'où

$$RR' R_1 R'_1 = \frac{D^4}{\sin^4 V},$$

en désignant par V l'angle des normales à la surface moyenne et à l'enveloppée moyenne et par D la distance entre les points correspondants de ces deux surfaces.

Remarquons enfin qu'on a

$$S\, d\varpi\, d\nu = 0,$$

ce qui montre que l'enveloppée moyenne et la surface ayant pour vecteur ν se correspondent par orthogonalité des éléments; on reconnaît d'ailleurs très simplement que la surface ayant pour vecteur $-i\nu$ n'est autre que la *surface adjointe* de l'enveloppée moyenne; on a, en effet,

$$-i d\nu = V d\varpi,$$

ce qui met en évidence la proposition.