BARBARIN

Résumé d'un mémoire sur la détermination d'un triangle au moyen des longueurs de ses bissectrices

Bulletin de la S. M. F., tome 22 (1894), p. 76-80
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1894__22__76_0>

RÉSUMÉ D'UN MÉMOIRE SUR LA DÉTERMINATION D'UN TRIANGLE AU MOYEN DES LONGUEURS DE SES BISSECTRICES;

Par M. Barbarin.

I. *Déterminer un triangle où l'on donne l'angle* A *et les longueurs des bissectrices des angles* B, C.

Soient $B - C = 4\theta$, $\omega = \frac{3\pi}{4} - \frac{3A}{4}$, $x = \tang\theta$, $y = \cos 2\theta$, $z = \tang\frac{\omega}{3}$, d_a, d_b, d_c, d'_a, d'_b, d'_c les longueurs, α, β, γ, α', β', γ' les inverses des longueurs des six bissectrices des angles A, B, C, les relations élémentaires entre les bissectrices et les angles conduisent aux équations du troisième degré de la forme générale

$$\frac{1 - x^2 + 2x\,\mathrm{tang}\frac{A}{2}}{1 - x^2 - 2x\,\mathrm{tang}\frac{A}{2}} - \frac{l_2}{l_1}\frac{P}{Q} = 0, \tag{1}$$

dans lesquelles l_1, l_2 sont les longueurs des bissectrices données, respectivement pour B et C, et P, Q des fonctions linéaires de x, dont les coefficients dépendent de la façon dont ces deux bissectrices sont associées, et des rapports d'inégalité entre A, B, C. L'équation (1) détermine x, et par conséquent les angles B, C, pourvu qu'elle ait une racine positive et inférieure à z. Il y a quatre combinaisons à faire, suivant que les bissectrices sont internes ou externes. Nous représentons par N le nombre des valeurs acceptables trouvées pour x dans chaque cas.

1re Combinaison : $d_b = l_1$, $d_c = l_2$.

$P = \mathrm{tang}\,\omega + x$, $\quad Q = \mathrm{tang}\,\omega - x$, $\quad N = 1$,

2e Combinaison : $d'_b = l_1$, $d'_c = l_2$.

A n'est pas l'angle moyen	$P = \cot\omega - x$,	$Q = \cot\omega + x$,	$N = 1$,
A est l'angle moyen....	$P = -\cot\omega + x$,	$Q = \cot\omega + x$,	$N = 1, 2$,

3e Combinaison : $d'_b = l_1$, $d_c = l_2$, avec $B \geqq C$.

$A > C$	$P = \mathrm{tang}\,\omega + x$,	$Q = 1 + x\,\mathrm{tang}\,\omega$,	$N = 0, 1, 2$,
$A < C$	$P = -\mathrm{tang}\,\omega - x$,	$Q = 1 + x\,\mathrm{tang}\,\omega$,	$N = 0, 1$.

4e Combinaison : $d_b = l_1$, $d'_c = l_2$, avec $B \geqq C$.

$A > B$	$P = 1 - x\,\mathrm{tang}\,\omega$,	$Q = \mathrm{tang}\,\omega - x$,	$N = 0, 1, 2$,
$A < B$	$P = -1 + x\,\mathrm{tang}\,\omega$,	$Q = \mathrm{tang}\,\omega - x$,	$N = 0, 1, 2$.

Supposons les angles B, C connus par la résolution de l'une des équations (1). Pour achever la détermination du triangle, il faut mesurer la longueur l_3 de la bissectrice interne ou externe de A qui est concourante avec les bissectrices données de longueur l_1, l_2. Pour fixer les idées, soient $d_b = l_1$, $d_c = l_2$, nous chercherons $d_a = l_3$ en calculant $\frac{1}{d_a} = \alpha$. Si l'on pose

$$n^2 = \frac{\beta\gamma}{\alpha^2}, \qquad p^2 = \frac{\beta^2 + \gamma^2}{\alpha^2},$$

on peut tirer α de l'une des équations

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} & 2y^3 - 2(\cos 2\omega + 2n^2 \sin^2 A) y^2 \\ & \qquad - (1 - \cos A) y + (1 - \cos A) \cos 2\omega = 0, \\ & 2y^3 \sin\frac{A}{2} + 2(\cos A - p^2 \sin^2 A) y^2 \\ & \qquad - \left[2 \sin\frac{A}{2} + \cos 2\omega (1 + \cos A) \right] y + 1 - \cos A = 0, \end{aligned} \right.$$

où y a été calculé d'après l'équation (1). Mais il est intéressant d'avoir une équation donnant α indépendamment de θ. Pour cela, il n'y a qu'à éliminer y entre les équations (2), et si l'on fait, pour abréger,

$$u = 1 + z^2, \qquad v = 1 - z^2, \qquad t = u^2 - 16 z^2,$$

puis

$$X_2 = 4u^2 + t, \qquad X'_2 = u^2 + t, \qquad X_3 = u(2u^2 + t), \qquad X_4 = 4u^4 - t^2,$$
$$Y_1 = up^2 - 2vn^2, \qquad Y_3 = 2u^3 n^2 - vtp^2,$$

l'équation résultante a la forme

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} & [u^3 X_2^2 - X_4 (X_3 + 4v^2 Y_1)]^2 \\ & \quad - u[u^3 X_2 X'_2 + 2(Y_3 + 4v^2 Y_1)(u^2 t + 2v Y_3)] \\ & \qquad\qquad \times [X_4 X'_2 + 2X_2 (u^2 t + 2v Y_3)] = 0, \end{aligned} \right.$$

et la racine commune aux équations (2) est

$$(4)\qquad y = \frac{v[X_4 X'_2 + 2X_2(u^2 t + 2v Y_3)]}{u^3 X_2^2 - X_4 (X_3 - 4v^2 Y_1)}.$$

L'équation (3) est de degré pair et du troisième degré en $\frac{1}{\alpha^2} = d_a^2$. Le coefficient de son terme en $\frac{1}{\alpha^6}$ est négatif ou nul ; donc elle a une racine positive qui peut aussi se calculer en fonction des données et de θ par l'une des équations (2) ou (4).

Donc *il existe entre l'angle* A *et les longueurs des trois bissectrices concourantes internes une relation du troisième degré par rapport à ces longueurs, et qui, résolue en fonction de la bissectrice de l'angle* A, *admet une solution unique.*

Quand on aura ainsi déterminé α, les côtés du triangle s'obtiendront par les équations linéaires

$$2\alpha\cos\frac{A}{2}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c},\qquad 2\beta\cos\frac{B}{2}=\frac{1}{c}+\frac{1}{a},\qquad 2\gamma\cos\frac{C}{2}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$$

Les autres combinaisons de bissectrices donneront lieu à des calculs de même nature, et l'on est ainsi conduit à cette proposition générale :

Entre l'angle A *et les longueurs de trois bissectrices concourantes du triangle* ABC, *il existe une relation de la forme* (3), *qui est du troisième degré par rapport à la bissectrice de l'angle* A *et admet pour cette dernière autant de solutions que l'équation* (1) *correspondante a de racines positives et moindres que* z.

Considérons encore la combinaison $d_b = l_1$, $d_c = l_2$; on a

$$\frac{d'a}{da}=\frac{\alpha}{\alpha'}=\cot 2\theta;$$

donc si l'on fait

$$\frac{\beta\gamma}{\alpha'^2}=N^2,\qquad \frac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha'^2}=P^2,$$

$$Y_1=uP^2-2vN^2,\quad Y'_3=-2u^3N^2-vtP^2,\quad Y_4=2(u^4+4z^2t)N^2-vu^3P^2,$$

il existe, entre les longueurs des trois bissectrices non concourantes telles que d_b, d_c, d'_a *et l'angle* A, *une relation de la forme*

$$(5)\quad\left\{\begin{aligned}&[vu^3(X_2-4uY_1)^2-(X_3-4v^2Y_1)(vX_4+4uY_4)]^2\\&\quad-u[2(X_3-4v^2Y_1)(vu^2t+8z^2Y'_3)+vu^3X'_2(X_2-4uY_1)]\\&\qquad\times[2(X_2-4uY_1)(vu^2t+8z_2Y'_3)+X'_2(vX_4+4uY_4)]=0,\end{aligned}\right.$$

du quatrième degré en d'_a *et admettant pour cette ligne autant de valeurs que l'équation* (1) *correspondante a de racines admissibles.*

II. *Déterminer un triangle où l'on donne les longueurs de trois bissectrices des angles* A, B, C.

1° Les longueurs données se rapportent à trois bissectrices concourantes.

Les relations de la forme (3) se réduisent à deux types ne différant entre eux que par le signe du coefficient de n^2 ou de $l_1 l_2$; il suffit donc d'envisager l'équation (3) elle-même, qui présente de curieuses propriétés. Comme les indices des polynomes X et Y y représentent leurs degrés en $z^2 = Z$, on voit qu'elle est du quatorzième degré. En la développant par rapport à v, elle admet la racine double $v^2 = 0$, et, par suite, son degré s'abaisse à douze. De plus, si l'on y change Z en $\frac{1}{Z} = Z'$ et si l'on pose $1 - Z' = v'$, la propriété des polynomes u et X, d'être tous réciproques, fait que l'équation (3) se transforme précisément en cette même équation où le coefficient de n^2 a seul changé de signe. Par suite, *dans l'équation du douzième degré, les coefficients extrêmes ou équidistants des extrêmes sont égaux au signe près de* n^2.

En particulier,

$$A_0 = 320(p^2 + 2n^2)^2(1 - p^2 - 2n^2), \qquad A_{12} = 320(p^2 - 2n^2)^2(1 - p^2 + 2n^2)$$

et, si les longueurs données l_1, l_2, l_3 satisfont à l'une des relations

$$\pm l_1 \pm l_2 \pm l_3 = 0,$$

le degré s'abaisse encore d'une unité par la suppression d'une racine nulle ou infinie.

L'équation (3) résolue fait connaître z et A, et le problème proposé est ramené au précédent. Toutefois, z doit être positif et moindre que 1, et les longueurs données doivent permettre que la valeur correspondante de y tirée de l'équation (4) soit positive et inférieure à 1.

2° Les longueurs données sont celles de trois bissectrices non concourantes.

Les relations de la forme (5) se réduisent encore à deux types ne différant entre eux que par le signe du coefficient de n^2. L'équation (5) a absolument les mêmes propriétés que l'équation (3). Le degré seul diffère; il vaut 16 en général, sauf les simplifications particulières.

Pour ne citer qu'un seul cas particulier de la théorie générale, prenons le plus intéressant, celui où $l_1 = l_2$; il conduit à la proposition suivante, qui mérite d'être signalée :

Tout triangle qui a deux bissectrices égales est isoscèle si ces bissectrices sont ensemble internes ou externes, à condition que, dans ce dernier cas, l'une d'elles appartienne à l'angle moyen. Mais si elles sont de nature différente, ou si, étant externes, aucune d'elles n'appartient à l'angle moyen, le triangle n'est pas nécessairement isoscèle, excepté toutefois quand le troisième angle vaut 120° *ou* 60°.

III. *Construction graphique des racines des équations* (1) *et* (3).

En faisant $\frac{\beta-\gamma}{\beta+\gamma} = m$, l'équation (1) se trouve résolue par l'intersection des deux hyperboles

$$1 - x^2 = 2 \operatorname{tang} \frac{A}{z} x\eta,$$

$$x(mx - \eta) + \operatorname{tang}\omega(x - m\eta) = 0.$$

En faisant $\sin\frac{A}{2} = \lambda = \frac{v}{u}$, et prenant, par exemple, $n^2 = \frac{1}{2}$, $p = 2$, l'équation (3) se trouve résolue par l'intersection des courbes

$$Y = \frac{(4\lambda^2+1)(4\lambda^2-2) + 2(-4\lambda^3+12\lambda^2-1)(-8\lambda^4+16\lambda^2+2\lambda-3)}{(4\lambda^2+1)^2-(4\lambda^2-1)(5-4\lambda^2)(-4\lambda^3+12\lambda^2-1)},$$

$$Y = \frac{(4\lambda^2+1)^2-(4\lambda^2-1)(5-4\lambda^2)(-4\lambda^3+12\lambda^2-1)}{(4\lambda^2-1)(4\lambda^2-2)(5-4\lambda^2)+2(4\lambda^2+1)(-8\lambda^4+16\lambda^2+2\lambda-3)},$$

la première du huitième degré, la seconde du septième, qui sont tangentes au point $\lambda = 0$, $Y = -1$ avec la droite $Y + 1 - \lambda = 0$ pour tangente commune, et ont deux points d'intersection distincts dans le voisinage de la valeur $\lambda = \frac{1}{2}$.

Ainsi, quand on donne les longueurs des trois bissectrices internes, deux valeurs de z seules peuvent convenir, et à chacune ne répond qu'un seul triangle. Il y a, par conséquent, deux solutions et pas davantage. Les autres cas se traiteront semblablement.