BULLETIN DE LA S. M. F.

P. VERNIER

Sur les formes binaires dont les variables sont des intégrales fondamentales d'une équation différentielle linéaire du second ordre

Bulletin de la S. M. F., tome 22 (1894), p. 133-135

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1894__22__133_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1894, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LES FORMES BINAIRES DONT LES VARIABLES SONT DES INTÉGRALES FONDAMENTALES D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE DU SECOND ORDRE;

Par M. Paul Vernier.

Dans la théorie des intégrales algébriques des équations linéaires du second ordre, on peut faire jouer un rôle considérable au théorème suivant :

Théorème. — *Si une forme binaire dont les deux variables sont deux intégrales fondamentales de l'équation* $\frac{d^2y}{dx^2} = \mathrm{P}y$ *est égale à une racine d'une fonction rationnelle de* x, *elle renferme, à une même puissance, tous les facteurs linéaires, qui forment un système réduit de racines pour l'équation irréductible vérifiée par l'un de ses facteurs linéaires.*

J'indiquerai ici une démonstration très simple de ce théorème.

1. Établissons d'abord un lemme.

Soit $f(y_1, y_2)$ une fonction homogène du $m^{\text{ième}}$ degré des deux variables y_1 et y_2. Si l'on pose

$$f''_{y_1^2} f''_{y_2^2} - f''^2_{y_1 y_2} = \mathrm{H}(f), \tag{1}$$

la fonction $\mathrm{H}(f)$ est le hessien de la forme f; c'est une fonction homogène de degré $2(m-2)$ par rapport aux mêmes variables. Lorsque y_1 et y_2 sont deux intégrales distinctes $y_1(x)$, $y_2(x)$ de l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} = \mathrm{P}y$, les deux formes binaires f et $\mathrm{H}(f)$ sont deux fonctions de x, dont la seconde peut s'exprimer explicitement au moyen de la première. Posons, pour le démontrer, $f(y_1, y_2) = \mathrm{X}$, en désignant par X une fonction explicite de la variable x.

Nous aurons

$$y_1 f'_{y_1} + y_2 f'_{y_2} = m\mathrm{X}, \tag{2}$$

$$y_1^2 f''_{y_1^2} + 2y_1 y_2 f''_{y_1 y_2} + y_2^2 f''_{y_2^2} = m(m-1)\mathrm{X} \tag{A}$$

et, d'autre part, en désignant les dérivées par des accents,

$$f'_{y_1} y'_1 + f'_{y_2} y'_2 = \mathrm{X}' \tag{3}$$

Si l'on prend les dérivées des deux membres des équations (2) et (3), en traitant la forme f comme fonction composée et en remplaçant y''_1, y''_2 par leurs valeurs Py_1, Py_2, nous obtenons les égalités suivantes :

$$\text{(B)}\qquad y_1y'_1f''_{y_1^2}+(y_1y'_2+y_2y'_1)f''_{y_1y_2}+y_2y'_2f''_{y_2^2}\equiv(m-1)X',$$

$$\text{(C)}\qquad y'^2_1f''_{y_1^2}+2y'_1y'_2f''_{y_1y_2}+y'^2_2f''_{y_2^2}\equiv X''-mPX.$$

Or, si je considère la forme quadratique binaire

$$(f''_{y_1^2},\ f''_{y_1y_2},\ f''_{y_2^2}),$$

et que je désigne par (A, B, C) la transformée qu'on en déduit par la substitution $\begin{bmatrix} y_1, y'_1 \\ y_2, y'_2 \end{bmatrix}$ dont le déterminant est une constante b, on reconnaît immédiatement que les éléments A, B, C de la nouvelle forme sont identiquement les premiers membres des équations (A), (B), (C); on a donc

$$B^2-AC=(m-1)^2X'^2-m(m-1)X(X''-mPX),$$

d'où l'on déduit immédiatement

$$B^2-AC=b^2(f''^2_{y_1y_2}-f''_{y_1^2}f''_{y_2^2})=-b^2H(f).$$

De là, en posant, pour abréger,

$$\text{(4)}\qquad T=\frac{X'}{mX}=\frac{1}{m}\frac{d\log X}{dx},$$

on conclut

$$\text{(5)}\qquad b^2H(f)\equiv m^2(m-1)X^2\left(\frac{dT}{dx}+T^2-P\right).$$

2. Il résulte immédiatement de cette formule que si la forme $f(y_1, y_2)$ est égale à la racine d'une fonction rationnelle de x, son covariant $H(f)$ jouit de la même propriété. En effet, si X est racine d'une fonction rationnelle, sa dérivée logarithmique $\frac{X'}{X}$ est une fonction rationnelle; le facteur $\frac{dT}{dx}+T^2-P$ est donc aussi une fonction rationnelle et le produit de ce facteur par X^2 est, aussi bien que X, la racine d'une fonction rationnelle; il est même rationnel, lorsque X est la racine carrée d'une fonction rationnelle.

Or, lorsqu'une forme est égale à la racine d'une fonction rationnelle, les diverses substitutions linéaires qui correspondent aux divers contours que la variable peut décrire dans le plan en revenant au même point la laissent identique à elle-même, à un facteur constant près. Supposons en effet que, par suite d'un contour fermé, décrit par la variable, les deux intégrales fondamentales y_1, y_2 soient remplacées par les deux fonctions linéaires

$$\alpha y_1 + \beta y_2, \quad \gamma y_1 + \delta y_2$$

et désignons par $f_1(y_1, y_2)$ la fonction en laquelle se trouve changée par cette substitution la racine primitive $f(y_1, y_2)$. Si cette forme est égale à la racine X d'une fonction rationnelle, comme cette fonction X se change en elle-même, multipliée par une racine de l'unité, lorsque la variable revient au même point, après avoir décrit un contour dans le plan, il doit en être de même de $f(y_1, y_2)$, de sorte qu'on a, et cela *identiquement,*

$$f_1(y_1, y_2) = r f(y_1, y_2),$$

en désignant par r une racine de l'unité.

Ainsi, les substitutions linéaires qui correspondent aux divers circuits par lesquels la variable peut revenir au même point n'ont d'autre effet que de multiplier la forme $f(y_1, y_2)$ par une racine de l'unité. Il résulte de là que les facteurs linéaires de cette forme ne font que s'échanger entre eux, à un facteur constant près, lorsque la variable décrit un contour fermé; d'où il résulte que si cette forme renferme une puissance de degré λ d'un facteur linéaire, elle renferme aussi les puissances du même degré de tous les facteurs linéaires qui composent un système réduit de racines pour l'équation irréductible vérifiée par le facteur linéaire considéré. Car, si l'on fait décrire à la variable le circuit par lequel ce facteur linéaire se change en un autre facteur de cette équation, la forme transformée renfermera la puissance du degré λ de ce facteur, et, comme elle ne diffère que par un facteur constant de la forme primitive, celle-ci renferme aussi comme facteur la même puissance de ce facteur.

La proposition annoncée est donc démontrée.