BULLETIN DE LA S. M. F.

J. ANDRADE

Sur une propriété mécanique des lignes géodésiques

Bulletin de la S. M. F., tome 22 (1894), p. 186-189
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1894__22__186_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1894, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR UNE PROPRIÉTÉ MÉCANIQUE DES LIGNES GÉODÉSIQUES;

Par M. J. Andrade.

I. Lorsqu'un mobile assujetti à rester sur une surface est abandonné à lui-même avec une vitesse initiale, il décrit une géodésique de la surface tangente à la direction de la vitesse initiale. Si une force, ne dépendant que de la position du même mobile, vient à agir sur lui, la trajectoire réelle différera peu de la géodésique tangente à la vitesse initiale, pourvu que celle-ci ait une valeur suffisamment grande.

Cette proposition extrêmement vraisemblable, admise quelquefois comme évidente, mérite d'être précisée davantage.

II. Pour abréger le langage, je dirai qu'une surface est *régulière* autour d'un arc géodésique OM_0M_1 parcouru dans le sens où l'on rencontre dans l'ordre énoncé les trois points consécutifs de cet arc, si cet arc satisfait aux conditions suivantes :

1° L'arc considéré est intérieur à un domaine D de la surface, domaine aux divers points duquel existe un plan tangent et restent finies les deux courbures principales;

2° On peut, à l'intérieur de ce domaine D, *séparer* deux domaines, l'un Ω entourant le point O, l'autre Δ comprenant à son intérieur l'arc M_0M_1 de manière que les géodésiques Γ, *contenues* dans le domaine D et joignant un point quelconque O' de Ω à un point quelconque de Δ, soient déterminées. De plus, soit un arc $\mu_0\mu_1$ de la géodésique Γ qui soit contenu dans le domaine Δ; tout élément linéaire ds de la surface qui s'appuie sur l'arc $\mu_0\mu_1$ peut se mettre sous la forme

$$(1) \qquad ds^2 = du^2 + G\,dv^2,$$

les variables u et v restant finies et la fonction $G(u, v)$ ne s'annulant jamais dans le domaine Δ, où elle reste d'ailleurs finie et continue ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres.

III. On peut alors énoncer le théorème suivant :

Si une surface est régulière autour de la géodésique OM_0M_1 *parcourue dans le sens où l'on rencontre consécutivement les trois points* O, M_0, M_1, *et si on lance un mobile en la position initiale* M_0 *avec une vitesse tangente à cette géodésique et dans le sens* M_0M_1, *puis qu'on soumette le mobile à une force* F *finie et continue dans le domaine* D, *on aura pu choisir la grandeur* V_0 *de la vitesse initiale assez grande pour que l'arc* M_0M_1 *de géodésique pris dans sa totalité diffère aussi peu qu'on voudra de la trajectoire du mobile parcourue durant un temps égal à celui qu'un mobile libre sur la surface et lancé avec la même vitesse initiale mettrait à parcourir l'arc géodésique* M_0M_1.

Étudions d'abord le mouvement du mobile en prenant des coordonnées polaires de pôle O; soient u et v les coordonnées polaires d'un point de la trajectoire. Tout élément linéaire appuyé en ce point aura la forme (1), où nous supposerons que la ligne géodésique OM_0M_1 ait pour équation $v = 0$. Posons alors

$$(2)\qquad \begin{cases} u = V_0 t + \xi + u_0, & (u_0 = \text{arc } OM_0 \text{ sur la géodésique}). \\ v = \eta, \end{cases}$$

Si le travail virtuel de la force F est représenté par l'expression $Q_u\,\delta u + Q_v\,\delta v$, les équations du mouvement seront

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\xi'}{dt} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial G}{\partial u}\eta'^2 + Q_u, \\[2ex] \dfrac{d\eta'}{dt} = \dfrac{-\eta'\left(\dfrac{\partial G}{\partial u}\xi' + \dfrac{\partial G}{\partial v}\eta'\right)}{G} + \dfrac{1}{2G}\dfrac{\partial G}{\partial u}\eta'^2 + \dfrac{Q_v}{G} - \dfrac{\eta'}{G}\dfrac{\partial G}{\partial u}V_0, \\[2ex] \dfrac{d\xi}{dt} = \xi', \qquad \dfrac{d\eta}{dt} = \eta'. \\ \text{Conditions initiales : } \xi_{(0)} = \xi'_{(0)} = v_0 = v'_0 = 0. \end{cases}$$

Prolongeons *un peu* l'arc M_0M_1 en M_2 et soit A l'arc M_0M_2, soit b une quantité positive que nous ferons tendre ultérieurement vers zéro et de l'ordre de $\frac{1}{V_0}$.

Lorsque les variables ξ, η, ξ', η' sont toutes moindres que b et que t positif est moindre que la quantité positive $\frac{A-b}{V_0}$, nous pourrons prendre, comme limite supérieure des modules des seconds membres des équations (3), une expression M de la forme

$$M = KV_0 b + P,$$

du moins lorsque V_0 est suffisamment grand, K et P désignant deux nombres positifs définis par les domaines Ω, Δ, D. Soit alors T la plus petite des quantités

$$\frac{A-b}{V_0}, \quad \frac{b}{M}$$

et supposons enfin que les composantes Q_u, Q_v admettent des dérivées partielles du premier ordre, continues dans le domaine Δ.

La méthode des approximations successives de M. Picard, modifiée par M. Lindelöf, nous apprend que les intégrales du système (3) seront pour $t < T$ *toutes* moindres que b.

Ici, on distinguera deux cas :

Premier cas : $A < \frac{1}{K}$. Alors, en posant $\frac{P}{b} = \left(\frac{1}{A} - K\right) V_0$, on voit qu'en faisant grandir indéfiniment V_0, la trajectoire réelle diffère aussi peu qu'on veut de l'arc M_0M_2 et à plus forte raison de l'arc M_0M_1.

Deuxième cas : $A \geqq \frac{1}{K}$. Soit N la partie entière du rapport $A : \frac{1}{K}$, j'envisage un domaine Θ compris dans le domaine Δ, domaine limité par les géodésiques $v = -\beta$, $v = \beta$; et, par les courbes $u = u_0$, $u = A + u_0 \equiv u_2$.

L'arc M_0M_2 sera comme le diamètre de ce trapèze.

Je partagerai ce trapèze en $(2N+1)$ autres trapèzes par $2N$ valeurs de u équidistantes de u_0 et de u_2 et je partagerai la durée $\frac{A}{V_0}$ en $(2N+1)$ durées partielles égales.

Le premier arc de la trajectoire correspondant à cette première durée rentre évidemment dans le premier cas; pour étudier le second arc, on prendra *provisoirement* des coordonnées polaires dont le pôle O′ est la projection géodésique de O sur la tangente géodésique à l'extrémité μ_1 du premier arc de la trajectoire, et ainsi de suite.

Les propriétés des triangles géodésiques permettent aisément de *raccorder* ces divers systèmes de coordonnées, à l'aide desquelles chaque arc partiel rentrera dans le premier cas pourvu que b soit suffisamment petit [on prendra $(2N+1)\,b$ notablement plus petit que β].

En revenant aux coordonnées fixes u et v, et faisant tendre β vers zéro, et désignant par (β) une petite quantité de l'ordre de β, on voit qu'à tous les instants compris entre les époques o et $\frac{A}{V_0}$, sauf peut-être aux époques $\frac{A}{V_0}[1-(\beta)]$, les écarts entre les coordonnées du mobile sur lequel agit la force et les coordonnées du mobile libre qui partirait de M_0 avec la même vitesse *initiale* sont eux-mêmes de l'ordre de β.

Le théorème énoncé est donc démontré, sinon pour l'arc OM_2, du moins pour l'arc OM_1 qui y est contenu.

IV. Au théorème précédent je rattacherai des considérations qui touchent d'assez près la question de la stabilité.

Considérons sur une surface un domaine Δ limité par un contour simple. Nous dirons que le domaine est *ouvert,* si ce domaine ne contient aucune géodésique qui y serait fermée et si l'on peut assigner un maximum aux arcs géodésiques qui traversent Δ.

Nous dirons encore que le domaine Δ est régulier s'il est compris dans un domaine D dans lequel nous puissions tracer un domaine Ω qui entoure Δ, de manière que les conditions énoncées au paragraphe II soient satisfaites.

La remarque que j'avais en vue peut alors s'énoncer ainsi :

Si un mobile soumis à une force finie et assujetti à demeurer sur une surface demeure confiné sur un domaine D *régulier et ouvert, l'énergie cinétique du mobile restera nécessairement limitée.*

La force, bien entendu, est fonction de la position du mobile, mais ne dérive pas d'une fonction des forces; car, dans ce cas, la remarque serait sans intérêt.