Bulletin de la S. M. F.

G. Halphen

Sur un point de la théorie du contact

Bulletin de la S. M. F., tome 2 (1873-1874), p. 94-96
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1873-1874__2__94_0>

Sur un point de la théorie du contact; par M. Halphen.

(Séance du 25 mars 1874)

Quand deux surfaces se touchent le long d'une ligne, il peut se présenter, en certains points de cette ligne, des particularités sur lesquelles je me propose de dire quelques mots. L'étude de ces particularités se fait aisément au moyen des conditions analytiques du contact supposé.

En chaque point de la ligue de contact C, les dérivées partielles des divers ordres d'une coordonnée par rapport à deux autres, prises relativement aux deux surfaces, satisfont à des équations de condition, que l'on peut obtenir directement, ainsi que je vais l'expliquer brièvement pour le cas le plus simple : celui où les deux surfaces S, S′ ont, le long de C, un contact du 1er ordre.

Désignons par z et z' les ordonnées de S et de S′. En chaque point de C, on a, outre $z-z'=0$,

$$(1) \qquad \frac{d(z-z')}{dx}=0, \qquad \frac{dz(-z')}{dy}=0.$$

Les dérivées de tous les ordres des premiers membres de ces deux équations, prises le long de C, sont aussi nulles en chaque point de C. En dérivant une fois, on obtient deux équations contenant $\frac{dy}{dx}$. Éliminant cette quantité, on a une relation entre les dérivées partielles jusqu'au 2me ordre. Dérivant une seconde fois, on introduit $\frac{d^2y}{dx^2}$, et l'élimination conduit à une nouvelle relation entre les dérivées partielles jusqu'au 3me ordre. Continuant ainsi, on obtient, à chaque nouvelle dérivation, une relation nouvelle entre les dérivées partielles relatives aux deux surfaces.

Si les deux surfaces S et S′ avaient, le long de C, un contact d'un ordre plus élevé, on formerait facilement, et d'une manière anologue, les relations nécessaires. On peut aussi, par un autre procédé, parvenir d'un seul coup à ce résultat pour le cas général.

Soient

$$z=\varphi(x,y), \quad z'=\varphi'(x,y)$$

les équations des deux surfaces. Nous en concluons

$$z-z'=\varphi(x,y)-\varphi'(x,y)=F=(x,y).$$

Il est clair que $F(x,y)=0$ est l'équation de la projection, sur le plan des xy, de la ligne commune aux deux surfaces S, S′. Une portion de cette projection est la projection de la ligne C. Soit $f(x,y)=0$ l'équation de cette projection. On a donc

$$(2) \qquad z-z'=F(x,y)=\chi(x,y)\,[f(x,y)]^m,$$

m étant un nombre positif, et $\chi(x,y)$ ne contenant plus le facteur $f(x,y)$. Si l'on prend un point (x,y) à distance infiniment petite du 1[er] ordre d'un point M arbitraire de la courbe $f(x,y)=0$, $\chi(x,y)$ a une valeur finie, et $[f(x,y)]^m$ est infiniment petit de l'ordre m. On a donc, sur les surfaces S, S′, deux points dont la distance $z-z'$ est infiniment petite d'ordre m. Donc $m-1$ est l'ordre du contact des deux surfaces le long de la ligne C. Donc :

Si deux surfaces ont un contact d'ordre $m-1$ le long d'une ligne dont la projection a pour équation $f(x,y)=0$, leurs ordonnées satisfont à une relation telle que (2).

Je n'ai pas besoin d'insister sur la marche à suivre pour obtenir, au moyen de la relation (2), les équations dont il a été parlé plus haut, et dont je n'ai pas à faire usage.

Je fais observer que l'équation (2) s'applique à tous les cas, sans excepter ceux où m est fractionnaire, cas dans lesquels la ligne C est une ligne singulière sur l'une au moins des deux surfaces. Je déduis maintenant quelques conséquences relatives au cas où m est entier, et où la ligne C est une ligne simple de chacune des deux surfaces.

Soit A un point de la ligne C ; je le suppose de multiplicité μ sur cette courbe, et simple sur les deux surfaces. Je suppose de plus que la courbe complémentaire D d'intersection des deux surfaces y passe aussi, et que ν soit la multiplicité de A sur D (je n'exclus pas le cas où $\nu=0$). Cela étant, l'équation (2) montre immédiatement qu'au point A les deux surfaces ont un contact d'ordre $m\mu+\nu-1$. Donc :

Théorème. — *Si deux surfaces ont, tout le long d'une ligne, simple sur chacune d'elles, un contact d'ordre $m-1$, et qu'un point particulier de cette ligne, simple sur les deux surfaces, et multiple d'ordre μ sur la ligne elle-même, soit de multiplicité ν sur la ligne complémentaire d'intersection des deux surfaces, le contact des deux surfaces est, en ce point, d'ordre $m\mu+\nu-1$.*

La réciproque est vraie ; c'est-à-dire que si, en un point A, les surfaces ont un contact d'ordre $M-1$, supérieur à $m-1$, on a nécessairement $m\mu+\nu=M$. De là résulte que, sur la courbe D, le point A a une multiplicité au moins égale au reste de la division de M par m, et, sur la ligne C, une multiplicité au plus égale au plus grand entier contenu dans $\frac{M}{m}$.

De notre théorème résulte ce corollaire que :

Si un point de la ligne de contact des surfaces ci-dessus, simple sur les *deux surfaces, est, sur cette ligne, de multiplicité* μ, *le contact des deux surfaces est, en ce point, au moins d'ordre* $m\mu - 1$.

Il est entendu que tout ceci s'applique, quelle que soit la nature des points multiples considérés. Ainsi ce qui résulte du théorème pour le cas d'un point double en résulte également pour le cas d'un point de rebroussement ordinaire, etc.

Un exemple du contact de deux surfaces le long d'une ligne est offert par la considération d'une surface mobile et de son enveloppe. Ces deux surfaces se touchent le long de la *caractéristique*, qui est l'intersection de deux surfaces consécutives. Si la caractéristique a un point multiple d'ordre μ, et d'ailleurs simple sur la surface mobile, c'est que les deux surfaces consécutives ont, en ce point, un contact d'ordre $\mu - 1$. Nous en concluons, conformément à notre corollaire, et en faisant $m = 2$:

Si, dans une série de surfaces, deux surfaces consécutives ont, en un point, un contact d'ordre $\mu - 1$, *la surface enveloppée a, en ce point, avec l'enveloppe, un contact d'ordre au moins égal à* $2\mu - 1$.