E. GENTY

Note sur la déformation infinitésimale des surfaces

Bulletin de la S. M. F., tome 22 (1894), p. 221-227
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1894__22__221_0>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

NOTE SUR LA DÉFORMATION INFINITÉSIMALE DES SURFACES;

Par M. E. Genty.

Dans un Mémoire non encore publié relatif à la déformation infinitésimale des surfaces, j'ai obtenu quelques propositions, dont l'énoncé intéressera peut-être les lecteurs du *Bulletin*.

1. M. Bianchi dit que deux surfaces (A) et (B) sont *associées*, lorsqu'elles se correspondent point par point, avec parallélisme des plans tangents, de telle sorte qu'aux asymptotiques de l'une corresponde sur l'autre un réseau conjugué.

Soient x, y et z; x_1, y_1 et z_1 les coordonnées de deux points correspondants A *et* B, *de deux surfaces* (A) et (B) *qui se correspondent point par point. Pour que ces deux surfaces soient associées, il faut et il suffit que les expressions $z_1 dy - y_1 dz$, $x_1 dz - z_1 dx$, $y_1 dx - x_1 dy$ soient des différentielles exactes, de telle sorte qu'on puisse poser*

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} z_1\,dy - y_1\,dz &= d\xi,\\ x_1\,dz - z_1\,dx &= d\eta,\\ y_1\,dx - x_1\,dy &= d\zeta.\end{aligned}\right.$$

ξ, η et ζ sont alors les coordonnées d'un point M d'une surface (M) correspondant à (A) par orthogonalité des éléments.

2. Si les premiers membres des équations (1) sont des différentielles exactes, il en sera de même des expressions $z\,dy_1 - y\,dz_1$, $x\,dz_1 - z\,dx_1$, $y\,dx_1 - x\,dy_1$, et l'on pourra poser

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} z\,dy_1 - y\,dz_1 &= d\xi_1,\\ x\,dz_1 - z\,dx_1 &= d\eta_1,\\ y\,dx_1 - x\,dy_1 &= d\zeta_1.\end{aligned}\right.$$

ξ_1, η_1 et ζ_1 seront les coordonnées d'un point N définissant une surface (N) qui correspond à (B) par orthogonalité des éléments.

On aura d'ailleurs

$$\begin{aligned} d\xi - d\xi_1 &= d(yz_1 - y_1 z), \\ d\eta - d\eta_1 &= d(zx_1 - z_1 x), \\ d\zeta - d\zeta_1 &= d(xy_1 - x_1 y), \end{aligned}$$

ou, en disposant convenablement des constantes introduites par les intégrations,

$$(3) \qquad \begin{cases} \xi - \xi_1 = yz_1 - y_1 z, \\ \eta - \eta_1 = zx_1 - z_1 x, \\ \zeta - \zeta_1 = xy_1 - x_1 y. \end{cases}$$

3. Soient X, Y et Z les cosinus directeurs de la normale au point A de (A), u et v les paramètres arbitraires auxquels on rapporte la surface, et posons

$$\begin{aligned} D_A &= -\mathbf{S}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial u}, \\ D'_A &= -\mathbf{S}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} = -\mathbf{S}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u}, \\ D''_A &= -\mathbf{S}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial v}, \end{aligned}$$

où nous désignons par le signe $\mathbf{S}$ une somme étendue à trois termes jouant le même rôle par rapport aux trois axes coordonnés.

Les quantités D_A, D'_A et D''_A seront, à un facteur commun près, pour la surface (A), les déterminants de Gauss D, D′ et D″; nous les appellerons les *coefficients de forme* de (A).

On aura de même, pour les coefficients de forme de (B),

$$\begin{aligned} D_B &= -\mathbf{S}\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial u}, \\ D'_B &= -\mathbf{S}\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} = -\mathbf{S}\frac{\partial x_1}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u}; \\ D''_B &= -\mathbf{S}\frac{\partial x_1}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial v}; \end{aligned}$$

et la condition qui exprime qu'aux asymptotiques de l'une des surfaces correspond sur l'autre un réseau conjugué prend la forme

$$(4) \qquad D_A D''_B - 2 D_A D'_B + D''_A D_B = 0.$$

Or, si l'on pose

$$\mathbf{S}\, x_1 X = p,$$

p sera la distance de l'origine au plan tangent en B à (B) et l'on aura

$$D_B = -\left(\frac{\partial^2 p}{\partial u^2} - \alpha\frac{\partial p}{\partial u} - \alpha'\frac{\partial p}{\partial v} + ep\right),$$

$$D'_B = -\left(\frac{\partial^2 p}{\partial u\,\partial v} - \beta\frac{\partial p}{\partial u} - \beta'\frac{\partial p}{\partial v} + fp\right),$$

$$D''_B = -\left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2} - \gamma\frac{\partial p}{\partial u} - \gamma'\frac{\partial p}{\partial v} + gp\right),$$

e, f et g désignant les coefficients de l'élément linéaire de la représentation sphérique de (A), α, α', β, β', γ et γ' les symboles de Christoffel dérivés de cet élément linéaire.

Si enfin dans l'équation (4) on remplace D_B, D'_B et D''_B par les expressions qui précèdent, il vient

$$(5)\quad \begin{cases} D_A\left(\dfrac{\partial^2 p}{\partial v^2} - \gamma\dfrac{\partial p}{\partial u} - \gamma'\dfrac{\partial p}{\partial v} + gp\right) - 2D'_A\left(\dfrac{\partial^2 p}{\partial u\,\partial v} - \beta\dfrac{\partial p}{\partial u} - \beta'\dfrac{\partial p}{\partial v} + fp\right) \\ \qquad + D''_A\left(\dfrac{\partial^2 p}{\partial u^2} - \alpha\dfrac{\partial p}{\partial u} - \alpha'\dfrac{\partial p}{\partial v} + ep\right) = 0. \end{cases}$$

C'est l'équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre d'où dépend la recherche d'une surface (B) associée à une surface donnée (A). *Elle a pour caractéristiques les asymptotiques de* (A).

On a d'ailleurs

$$x_1 = pX + \frac{\dfrac{\partial p}{\partial u}\left(Z\dfrac{\partial Y}{\partial v} - Y\dfrac{\partial Z}{\partial v}\right) + \dfrac{\partial p}{\partial v}\left(Y\dfrac{\partial Z}{\partial u} - Z\dfrac{\partial Y}{\partial u}\right)}{h},$$

avec les expressions analogues pour y_1 et z_1.

Ainsi :

Toute solution p de l'équation (5) *détermine :*

1° *Une surface* (B) *associée à* (A) ;

2° *Deux surfaces* (M) *et* (N) *correspondant respectivement à* (A) *et* (B) *par orthogonalité des éléments;*

3° *Quatre couples de surfaces applicables dont la construction est bien connue;*

4° *Enfin, une déformation infinitésimale des surfaces* (A), (B), (M) *et* (N) *définie par les relations*

$$(\mathrm{A}') \quad \begin{cases} x' = x + \varepsilon\xi, \\ y' = y + \varepsilon\eta, \\ z' = z + \varepsilon\zeta, \end{cases} \qquad (\mathrm{B}') \quad \begin{cases} x'_1 = x_1 + \varepsilon_1\xi_1, \\ y'_1 = y_1 + \varepsilon_1\eta_1, \\ z'_1 = z_1 + \varepsilon_1\zeta_1; \end{cases}$$

$$(\mathrm{M}') \quad \begin{cases} \xi' = \xi + \varepsilon_2 x, \\ \eta' = \eta + \varepsilon_2 y, \\ \zeta' = \zeta + \varepsilon_2 z, \end{cases} \qquad (\mathrm{N}') \quad \begin{cases} \xi'_1 = \xi_1 + \varepsilon_3 z_1, \\ \eta'_1 = \eta_1 + \varepsilon_3 y_1, \\ \zeta'_1 = \zeta_1 + \varepsilon_3 z_1. \end{cases}$$

L'équation (5) admet pour solution particulière le cosinus de l'angle de la normale en A à (A) avec une direction fixe quelconque.

Pour cette solution, l'associée de (A) se réduit à un point fixe B; la surface (M) est un plan et la déformation correspondante de (A) consiste dans une rotation autour de OB, suivie d'une translation. La surface est donc simplement déplacée, mais non déformée. A toute autre solution de l'équation (3) correspond une déformation effective de (A).

4. Des relations (1) et (2) on tire

$$dx = \frac{\mathrm{Y}\,d\zeta - \mathrm{Z}\,d\eta}{p}, \qquad dx_1 = \frac{\mathrm{Y}\,d\zeta_1 - \mathrm{Z}\,d\eta_1}{q},$$

où $q = \mathbf{S}\, x\mathrm{X}$ désigne la distance de l'origine au plan tangent en A à (A), avec des expressions analogues pour les différentielles des autres coordonnées.

Donc le point M_1, qui a pour coordonnées

$$\frac{\mathrm{X}}{p}, \quad \frac{\mathrm{Y}}{p}, \quad \frac{\mathrm{Z}}{p},$$

définit une surface (M_1) associée à M; *c'est la polaire réciproque de* (B) *par rapport à l'origine.*

De même l'associée de (N) est la polaire réciproque de (A) par rapport à l'origine.

5. Par des calculs très simples, on obtient, pour les coefficients

de forme des surfaces (M), (N), (A′), etc., les expressions suivantes :

$$D_M = \frac{p}{bh}(D_A D'_B - D'_A D_B),$$

$$D'_M = \frac{p}{bh}(D_A D''_B - D'_A D'_B) = \frac{p}{bh}(D'_A D'_B - D''_A D_B),$$

$$D''_M = \frac{p}{bh}(D'_A D''_B - D''_A D'_B);$$

$$D_N = \frac{bq}{ap} D_S,$$

$$D'_N = \frac{bq}{ap} D'_S,$$

$$D''_N = \frac{bq}{ap} D''_S;$$

$$D_{A'} = D_A + \frac{\varepsilon b}{p} D_M,$$

$$D'_{A'} = D'_A + \frac{\varepsilon b}{p} D'_M,$$

$$D''_{A'} = D''_A + \frac{\varepsilon b}{p} D''_M;$$

$$D_{B'} = D_B + \frac{\varepsilon_1 b}{p} D_M,$$

$$D'_{B'} = D'_B + \frac{\varepsilon_1 b}{p} D'_M,$$

$$D''_{B'} = D''_B + \frac{\varepsilon_1 b}{p} D''_M;$$

$$D_{M'} = D_M + \frac{\varepsilon_2 b}{p} D_A,$$

$$D'_{M'} = D'_M + \frac{\varepsilon_2 b}{p} D'_A,$$

$$D''_{M'} = D''_M = \frac{\varepsilon_2 b}{p} D''_A;$$

$$D_{N'} = D_N + \frac{\varepsilon_3 a}{q} D_B,$$

$$D'_{N'} = D'_N + \frac{\varepsilon_3 a}{q} D'_B,$$

$$D''_{N'} = D'_N + \frac{\varepsilon_3 a}{q} D''_B,$$

où l'on a posé

$$a = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \overline{OA},$$
$$b = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = \overline{OB}.$$

Soient d'abord u et v les paramètres du réseau conjugué commun à (A) et (B). On aura

$$D'_A = D'_B = 0$$

et, par suite,

$$D_M = D''_M = D_N = D''_N = 0.$$

Donc *au réseau conjugué commun aux deux surfaces associées* (A) *et* (B) *correspondent les asymptotiques des surfaces* (M) *et* (N).

Soient maintenant u et v les paramètres des asymptotiques de (A). On aura

$$D_A = D''_A = D'_B = D'_M = D'_N = D'_{B'} = D'_{N'} = 0;$$

on peut donc énoncer la proposition suivante :

Aux asymptotiques de (A) *correspondent : les réseaux conjugués des surfaces* (B) *et* (N) *qui restent conjugués dans la déformation infinitésimale correspondante de ces deux surfaces; un réseau conjugué sur* (M); *les asymptotiques de la surface* (N_1) *associée à* (N).

On a

$$D_{A'} D''_{B'} - D'_{A'} D'_{B'} + D''_{A'} D_{B'} = 0.$$

Donc aux asymptotiques de (A') *correspond sur* (B') *un réseau conjugué et inversement.*

6. Reprenons enfin les équations (3)

$$\xi - \xi_1 = y z_1 - y_1 z,$$
$$\eta - \eta_1 = z x_1 - z_1 x,$$
$$\zeta - \zeta_1 = x y_1 - x_1 y.$$

La normale en M à (M) étant parallèle à OB et la normale en N à (N) étant parallèle à OA, ces équations montrent que (M) et (N) sont les deux nappes de la surface focale de la congruence engendrée par la droite MN ; et, comme les asymptotiques se correspondent sur ces deux surfaces, on a immédiatement la proposition suivante de Ribaucour :

Considérons une déformation infinitésimale d'une surface (A) *et, par chaque point* A *de* (A), *menons, dans le plan tangent à cette surface, la droite perpendiculaire au déplacement que subit le point* A *dans la déformation; les droites ainsi construites forment une congruence telle que les asymptotiques se correspondent sur les deux nappes de la surface focale.*

On a, d'ailleurs,

$$\mathrm{S}(\xi - \xi_1)^2 = \mathrm{S}(yz_1 - y_1 z)^2$$

ou

$$\overline{\mathrm{MN}} = ab \sin \mathrm{V},$$

V étant l'angle des directions OA et OB.