BULLETIN DE LA S. M. F.

E. CARVALLO

Sur l'intégration d'une équation aux dérivées partielles de la Physique mathématique

Bulletin de la S. M. F., tome 22 (1894), p. 234-240
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1894__22__234_1>

SUR L'INTÉGRATION D'UNE ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE;

Par M. E. Carvallo.

1. M. Poincaré [1] a étudié l'équation aux dérivées partielles, dite *des télégraphistes,* qu'il a ramenée à la forme

$$\frac{d^2 U}{dt^2} = \frac{d^2 U}{dx^2} + U.$$

Il a montré que la propagation de l'ébranlement U se fait avec une vitesse constante égale à l'unité. Cet important résultat a provoqué d'intéressantes Notes de MM. Picard [2] et Boussinesq [3] sur le même sujet.

Je me propose d'aborder ici la même équation, mais *avec se-*

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* t. CXVII, p. 1027, déc. 1893.
(2) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* t. CXVIII, p. 16, janv. 1894.
(3) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* t. CXVIII, p. 162, janv. 1894.

cond membre,

$$\frac{d^2U}{dt^2} - \frac{d^2U}{dx^2} - U = F(x, t),$$

qui a aussi un grand intérêt en Physique mathématique.

2. Rappelons d'abord quelques résultats relatifs à l'équation des cordes vibrantes :

1° L'équation

$$\frac{d^2U}{dt^2} = a^2 \frac{d^2U}{dx^2}$$

se ramène à la forme

$$\frac{d^2U}{du\,dv} = 0$$

par le changement de variables

$$2u = t + \frac{x}{a}, \qquad 2v = t - \frac{x}{a}$$

et a pour intégrale générale

$$U = f\left(t - \frac{x}{a}\right) + \varphi\left(t + \frac{x}{a}\right).$$

Les fonctions arbitraires f et φ se déterminent par deux conditions aux limites variables suivant les cas.

2° De cette intégrale on conclut que le mouvement se propage d'un point à un autre avec la vitesse a, ce qui conduit, par induction, à découvrir l'intégrale de l'équation à second membre

$$\frac{d^2U}{dt^2} = a^2 \frac{d^2U}{dx^2} + F(x, t).$$

Imaginons en effet que la corde parte du repos et que, à partir de l'époque $t = 0$, agissent brusquement des forces normales à la corde et représentées par la fonction donnée $F(x, t)$. Les hypothèses sont alors celles-ci

$$\begin{array}{lll} U(x,t) = 0, & \dfrac{d}{dt}U(x,t) = 0, & \text{pour } t = 0, \\ F(x,t) = 0, & & \text{pour } t < 0. \end{array}$$

Il y a lieu de penser que le point x subit à l'époque t les actions de tous les points ξ qui sont à une distance de lui dont la valeur r est inférieure à at, l'action du point ξ se faisant d'ailleurs sentir avec un retard $\frac{r}{a}$ égal au temps que met cette action à parcourir la distance r. D'après cette induction, l'intégrale cherchée doit être de la forme

$$U = \int_{x-at}^{x+at} f\left(\xi, t - \frac{r}{a}\right) d\xi.$$

En portant cette valeur de U dans l'équation à intégrer, on peut déterminer f de façon que l'expression de U soit bien l'intégrale cherchée. Le calcul est un peu encombrant ; comme il est compris à titre de cas particulier dans celui qui va suivre, je me dispense de le reproduire ici et j'aborde tout de suite le cas qui fait l'objet de ce travail.

3. Je considère l'équation

$$\text{(I)} \qquad \frac{d^2 U}{dt^2} = a^2 \frac{d^2 U}{dx^2} - k^2 U + F(x, t).$$

C'est, si l'on veut, l'équation du mouvement d'une corde qui, outre les forces d'élasticité, subirait la force $F(x, t)$ et une réaction proportionnelle à l'élongation $-k^2 U$.

Je suppose, comme précédemment,

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} U(x, t) = 0, \quad \dfrac{d}{dt} U(x, t) = 0, & \text{pour } t = 0, \\ F(x, t) = 0, & \text{pour } t < 0. \end{cases}$$

Au numéro précédent, la fonction $f\left(\xi, t - \frac{r}{a}\right)$, introduite pour former l'intégrale cherchée, était une solution de l'équation à intégrer, privée de son second membre et où on a remplacé x par r. Il est alors à prévoir que la fonction $f\left(t - \frac{r}{a}\right)$ devra être remplacée ici par une intégrale de l'équation

$$\frac{d^2 U}{dt^2} = a^2 \frac{d^2 U}{dr^2} - k^2 U.$$

C'est en effet ce que nous allons trouver ; mais, pour ne rien préjuger, je considérerai une fonction quelconque $f(t, r)$, variable d'ailleurs avec le point ξ et que je désignerai par $f(\xi, t, r)$. En outre, je suppose qu'il existe une vitesse de propagation que je désigne par v. M. Poincaré nous a enseigné que l'on a $v = a$; mais il est intéressant de retrouver ici cet important résultat. Ainsi je pose

$$\text{(III)} \qquad \mathrm{U}(x, t) = \int_{x-vt}^{x+vt} f(\xi, t, r)\, d\xi,$$

r désignant toujours la valeur absolue de la distance du point x au point ξ variable dans le champ de l'intégration.

Je porterai cette valeur dans l'équation (I) et je montrerai que l'on peut déterminer la fonction f de façon que (III) soit l'intégrale cherchée de (I). Je calcule donc les dérivées de l'expression (III) que j'écris

$$\text{(III)} \quad \mathrm{U}(x, t) = \int_{x-vt}^{x} f(\xi, t, r = x-\xi)\, d\xi + \int_{x}^{x+vt} f(\xi, t, r = \xi - x)\, d\xi.$$

Il vient, pour les dérivées par rapport à t,

$$\text{(III)}' \quad \begin{cases} \dfrac{d\mathrm{U}}{dt} = \displaystyle\int_{x-vt}^{x} \frac{\partial}{\partial t} f(\xi, t, r = x-\xi)\, d\xi + \int_{x}^{x+vt} \frac{\partial}{\partial t} f(\xi, t, r = \xi - x)\, d\xi \\ \qquad + v f(\xi = x - vt, t, r = vt) + v f(\xi = x + vt, t, r = vt), \end{cases}$$

puis

$$\text{(III)}'' \quad \begin{cases} \dfrac{d^2\mathrm{U}}{dt^2} = \displaystyle\int_{x-vt}^{x} \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(\xi, t, r = x-\xi)\, d\xi + \int_{x}^{x+vt} \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(\xi, t, r = \xi - x)\, d\xi \\ \qquad + 2v \dfrac{\partial}{\partial t} f(\xi = x - vt, t, r = vt) + 2v \dfrac{\partial}{\partial t} f(\xi = x + vt, t, r = vt) \\ \qquad - v^2 \dfrac{\partial}{\partial \xi} f(\xi = x - vt, t, r = vt) + v^2 \dfrac{\partial}{\partial \xi} f(\xi = x + vt, t, r = vt) \\ \qquad + v^2 \dfrac{\partial}{\partial r} f(\xi = x - vt, t, r = vt) + v^2 \dfrac{\partial}{\partial r} f(\xi = x + vt, t, r = vt). \end{cases}$$

Pour les dérivées par rapport à x, j'obtiens

$$\text{(III)}_1 \quad \begin{cases} \dfrac{d\mathrm{U}}{dx} = \displaystyle\int_{x-vt}^{x} \frac{\partial}{\partial r} f(\xi, t, r = x-\xi)\, d\xi - \int_{x}^{x+vt} \frac{\partial}{\partial r} f(\xi, t, r = \xi - x)\, d\xi \\ \qquad - f(\xi = x - vt, t, r = vt) + f(\xi = x + vt, t, r = vt), \end{cases}$$

puis

$$
(\mathrm{III})_2 \left\{
\begin{aligned}
\frac{d^2\mathrm{U}}{dx^2} = &\int_{x-vt}^{x} \frac{\partial^2}{\partial r^2} f(\xi, t, r = x - \xi)\, d\xi + \int_{x}^{x+vt} \frac{\partial^2}{\partial r^2} f(\xi, t, r = \xi - x)\, d\xi \\
&- \frac{\partial}{\partial r} f(\xi = x - vt, t, r = vt) - \frac{\partial}{\partial r} f(\xi = x + vt, t, r = vt) \\
&+ \frac{\partial}{\partial r} f(\xi = x, t, r = 0) + \frac{\partial}{\partial r} f(\xi = x, t, r = 0) \\
&- \frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi = x - vt, t, r = vt) + \frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi = x + vt, t, r = vt).
\end{aligned}
\right.
$$

Je porte les valeurs obtenues pour U, $\frac{d^2\mathrm{U}}{dt^2}$, $\frac{d^2\mathrm{U}}{dx^2}$ dans l'équation (I); il vient

$$
(\mathrm{I})' \left\{
\begin{aligned}
\mathrm{F}(x, t) = &\int_{x-vt}^{x+vt} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2\right] f(\xi, t, r)\, d\xi \\
&+ \left[2v\frac{\partial}{\partial t} + (-v^2 + a^2)\frac{\partial}{\partial \xi} + (v^2 + a^2)\frac{\partial}{\partial r}\right] f(\xi = x - vt, t, r = vt) \\
&+ \left[2v\frac{\partial}{\partial t} + (\ \ v^2 - a^2)\frac{\partial}{\partial \xi} + (v^2 + a^2)\frac{\partial}{\partial r}\right] f(\xi = x + vt, t, r = vt) \\
&- 2a^2 \frac{\partial}{\partial r} f(\xi = x, t, r = 0).
\end{aligned}
\right.
$$

Cette équation doit être satisfaite quels que soient x et t. Examinons le premier terme du second membre et supposons pour un instant que la fonction soumise au signe $\int$ ne soit pas nulle. Par hypothèse, $f(t, r)$ est une fonction déterminée quand $\mathrm{F}(t)$ est donnée ; mais cette dernière fonction, rien n'empêche de la donner à volonté pour chaque point ξ intérieur au segment d'intégration qui s'étend de $x - vt$ à $x + vt$. L'équation (I)$'$ ne saurait être alors satisfaite, puisque le premier terme dépendrait de la distribution des valeurs de $\mathrm{F}(\xi, t)$ à l'intérieur du champ d'intégration, tandis que les autres termes n'en dépendent pas. Ainsi, il faut que $f(\xi, t, r)$ soit, pour tous les points ξ, une solution de l'équation

$$
(1) \qquad \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2\right) f = 0.
$$

De même, si $v^2 - a^2$ était différent de zéro, rien n'empêcherait de donner à $\frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi = x - vt,\ t,\ r = vt)$ telle valeur qu'on voudrait sans rien changer aux autres termes de l'équation. Celle-ci ne peut donc être satisfaite que si l'on a

$$v = a.$$

La *vitesse de propagation est égale à a*. C'est le résultat de M. Poincaré.

Enfin on trouve, par un raisonnement tout semblable, que l'équation (I)′ fournit encore les conditions

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + a\,\frac{\partial}{\partial r}\right) f(\xi = x - at \quad \text{ou} \quad x + at,\ t,\ r = at) = 0,$$

$$-2a^2\,\frac{\partial}{\partial r} f(x,\ t,\ r = 0) = \mathrm{F}(x,\ t).$$

Ces équations doivent avoir lieu pour toutes les valeurs de x. Je supprimerai désormais l'écriture des lettres ξ et x qui n'interviendront plus dans le calcul et j'écrirai ces équations

$$(2)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + a\,\dfrac{\partial}{\partial r}\right) f(t,\ r = at) = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial r} f(t,\ r = 0) = -\dfrac{1}{2a^2}\,\mathrm{F}(t). \end{cases}$$

La première s'écrit encore

$$0 = \frac{d}{dt} f(t,\ at),$$

d'où

$$(3)\qquad f(t,\ at) = \text{const.} = f(0,\ 0).$$

Ces équations ne suffisent pas encore à exprimer les conditions du problème : il faut encore que la fonction $\mathrm{U}(x,\ t)$ satisfasse aux conditions initiales, savoir

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{U}(x,\ t) &= 0 \\ \frac{d}{dt}\,\mathrm{U}(x,\ t) &= 0 \end{aligned}\right\} \text{pour } t = 0.$$

Or la fonction

$$\mathrm{U}(x,\ t) = \int_{x-at}^{x+at} f(\xi,\ t,\ r)\, d\xi$$

est nulle pour $t = 0$, puisque le champ de l'intégration est alors nul. Quant à $\frac{d\mathrm{U}}{dt}$, calculée plus haut, elle se réduit, pour cette valeur de t, à

$$\left(\frac{dU}{dt}\right)_0 = 2a f(x, 0, 0).$$

Ainsi, la constante $f(0, 0)$ qui figure dans l'équation (3) doit être nulle. En résumé, les conditions du problème se réduisent à celle-ci :

f est la solution de l'équation aux dérivées partielles

$$(1) \qquad \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2\right) f = 0$$

qui satisfait aux conditions aux limites suivantes

$$(2) \qquad \begin{cases} f(t, at) = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial r} f(t, r = 0) = -\dfrac{1}{2a^2} F(t). \end{cases}$$

Si, en particulier, on suppose $k = 0$, ces équations donnent

$$f(t, r) = \frac{1}{2a} \int_0^{t - \frac{r}{a}} F(\theta)\, d\theta.$$

Lorsque k est différent de zéro, la solution $f(t, r)$ des équations (1), (2) est plus difficile à obtenir, mais elle a une existence certaine et unique. On peut en trouver un développement en série par la méthode d'approximations successives de M. Picard [1], en partant de la solution que je viens d'indiquer pour $k = 0$. Le problème proposé est donc entièrement résolu par la formule

$$U = \int_{x-at}^{x+at} f(\xi, t, r)\, d\xi.$$

La méthode employée ici est très générale. Elle s'étend d'abord à l'espace à trois dimensions [2], puis, d'autre part, à des cas où les équations du mouvement renfermeraient des termes proportionnels aux vitesses. Elle a donc un grand intérêt en Physique mathématique.

(1) *Journal de Mathématiques*, 1890. Chap. II.
(2) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXIX, p. 1003, déc. 1894.