P. ADAM

Sur la déformation des surfaces

Bulletin de la S. M. F., tome 23 (1895), p. 106-111
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1895__23__106_1>

SUR LA DÉFORMATION DES SURFACES;

Par M. Paul Adam.

Soient (S) et (S_1) deux surfaces de coordonnées x, y, z et x_1, y_1, z_1, applicables l'une sur l'autre.

Ainsi qu'il est facile de s'en assurer, les deux surfaces (S') et (S'_1) de coordonnées

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} x' &= x + h(z+z_1) - k(y+y_1), & x'_1 &= x_1 - h(z+z_1) + k(y+y_1), \\ y' &= y + k(x+x_1) - g(z+z_1), & y'_1 &= y_1 - k(x+x_1) + g(z+z_1), \\ z' &= z + g(y+y_1) - h(x+x_1), & z'_1 &= z_1 - g(y+y_1) + h(x+x_1), \end{aligned} \right.$$

g, h, k désignant trois constantes arbitraires, sont aussi applicables l'une sur l'autre.

Cela est vrai, quelle que soit la position relative des deux surfaces (S) et (S_1); or, si l'on change cette position, ce qui peut se faire en déplaçant seulement la surface (S_1), par exemple, on introduira dans les formules (1) trois constantes arbitraires nouvelles (abstraction faite de constantes purement additives); par conséquent

Tout couple de surfaces applicables l'une sur l'autre est un cas particulier d'un couple dépendant de six constantes arbitraires dont on peut écrire immédiatement les coordonnées.

Voici une application simple et intéressante de la transformation (1).

Prenons pour les surfaces (S) et (S_1) l'alysséide et l'hélicoïde gauche à plan directeur

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{u^2+a^2}\cos v, & x_1 &= u\sin v,\\ y &= \sqrt{u^2+a^2}\sin v, & y_1 &= u\cos v,\\ z &= a\log\frac{u+\sqrt{u^2+a^2}}{a}, & z_1 &= av, \end{aligned}$$

en ayant soin d'écrire l'x_1 et l'y_1 de l'hélicoïde $u\sin v$ et $u\cos v$, au lieu de les écrire, comme on le fait habituellement, $u\cos v$ et $u\sin v$.

Faisons $g = h = 0$ et changeons y'_1 en $-y'_1$; nous aurons, pour les surfaces (S') et (S'_1),

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} x' &= \left(\sqrt{u^2+a^2} - ku\right)\cos v - k\sqrt{u^2+a^2}\sin v,\\ y' &= k\sqrt{u^2+a^2}\cos v + \left(\sqrt{u^2+a^2} + ku\right)\sin v,\\ z' &= a\log\frac{u+\sqrt{u^2+a^2}}{a}, \end{aligned}\right.$$

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} x'_1 &= \left(k\sqrt{u^2+a^2} + u\right)\sin v + ku\cos v,\\ y'_1 &= ku\sin v + \left(k\sqrt{u^2+a^2} - u\right)\cos v,\\ z'_1 &= av. \end{aligned}\right.$$

Sur la surface (S'), les courbes (u) sont des ellipses situées dans des plans parallèles à xOy et ayant leurs centres sur Oz. Les coefficients angulaires des axes de ces ellipses, rapportées dans leurs plans à des parallèles à Ox et à Oy, sont définis par l'équation

$$(4)\qquad km^2 + 2m - k = 0;$$

cette équation ne dépendant pas de u, les axes de toutes les ellipses (u) sont dans deux plans rectangulaires passant par Oz.

Ces ellipses, rapportées à leurs axes, ont pour équation

$$\frac{x''^2}{(\sqrt{k^2+1}\sqrt{u^2+a^2}+ku)^2}+\frac{y''^2}{(\sqrt{k^2+1}\sqrt{u^2+a^2}-ku)^2}=1;$$

celle qui correspond à $u=0$ est un cercle de rayon $a\sqrt{k^2+1}$.

Le lieu des extrémités des axes de ces ellipses se compose des deux courbes planes

$$(5)\qquad \begin{cases} x''=\dfrac{a}{2}\left[\sqrt{k^2+1}\left(e^{\frac{z'}{a}}+e^{-\frac{z'}{a}}\right)+k\left(e^{\frac{z'}{a}}-e^{-\frac{z'}{a}}\right)\right], \\ y''=\dfrac{a}{2}\left[\sqrt{k^2+1}\left(e^{\frac{z'}{a}}+e^{-\frac{z'}{a}}\right)-k\left(e^{\frac{z'}{a}}-e^{-\frac{z'}{a}}\right)\right], \end{cases}$$

qui ne sont autres que la méridienne

$$x=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{z}{a}}+e^{-\frac{z}{a}}\right)$$

de l'alysséide, déplacée parallèlement à Oz, pour la première courbe, de la quantité négative δ définie par

$$e^{\frac{\delta}{a}}=\sqrt{k^2+1}-k,$$

et pour la seconde, de la quantité δ', égale et de signe contraire à δ, définie par

$$e^{\frac{\delta'}{a}}=\sqrt{k^2+1}+k.$$

Les deux courbes planes (5) correspondent à des valeurs de v données par

$$\operatorname{tang} 2v=-k.$$

Les autres courbes (v) tracées sur (S') ne sont pas planes; mais leurs projections sur xOy sont des hyperboles de centre O qui se réduisent à leurs asymptotes quand $\operatorname{tang} v=-k$.

En résumé, le mode de génération de (S') est le suivant :

On prend une alysséide (S) *et l'on considère deux des méri-*

diens (M) *et* (M′) *de cette surface situés dans deux plans rectangulaires; on laisse le méridien* (M) *fixe et l'on donne au second* (M′), *parallèlement à l'axe de l'alysséide, une translation arbitraire: la surface* (S′) *est le lieu des ellipses dont les plans sont perpendiculaires à l'axe de l'alysséide et dont les sommets se trouvent sur* (M) *et sur* (M′) *déplacé.*

Passons maintenant à la surface (S'_1). Pour cette surface, les courbes (u) ont comme projections sur le plan xOy des ellipses de centre O dont les axes ont leurs coefficients angulaires définis par l'équation (4). Donc :

Les courbes (u) *de la surface* (S'_1) *sont tracées sur des cylindres elliptiques dont les plans principaux sont les mêmes et coïncident avec les plans de symétrie de la surface* (S′) (*plans contenant les axes des ellipses* (u) *tracées sur cette dernière surface*).

L'équation des ellipses sections droites de ces cylindres rapportées à leurs axes est

$$(6)\qquad \frac{x''^2_1}{(u\sqrt{k^2+1}+k\sqrt{u^2+a^2})^2}+\frac{y''^2_1}{(u\sqrt{k^2+1}-k\sqrt{u^2+a^2})^2}=1.$$

En particulier, la courbe $u=0$ est une hélice circulaire tracée sur un cylindre de rayon k; les autres courbes (u) de (S'_1) tournent constamment dans le même sens autour de leurs cylindres respectifs quand z croît de $-\infty$ à $+\infty$; leur forme rappelle donc celle de l'hélice circulaire; pour $u=\pm ka$, l'ellipse (6) se réduit à une droite et l'on obtient deux courbes planes qui sont des sinusoïdes.

Quant aux courbes (v) de (S'_1), elles sont dans des plans parallèles à xOy; d'ailleurs, d'après les équations (2) et (3), x'_1 et y'_1 se déduisent de y' et de $-x'$, en changeant u en $\sqrt{u^2+a^2}$ et *vice versa;* les valeurs de u et de $\sqrt{u^2+a^2}$ tirées des deux premières (2) sont donc celles tirées des deux premières (3), où l'on remplacerait y' par x'_1 et x' par $-y'_1$; d'après cela :

Les courbes (v) *tracées sur* (S'_1) *sont des hyperboles dont les plans sont parallèles à* xOy, *et qui, en projection sur* xOy, *sont symétriques par rapport à* Oy *des hyperboles conjuguées de celles obtenues plus haut pour les projections des courbes* (v) *de* (S').

Pour $\tang 2v = -k$, l'hyperbole tracée sur (S'_1) se réduit à deux droites rectangulaires situées dans les plans de symétrie de (S').

D'après ce qui précède, (S'_1) *est une sorte d'hélicoïde engendré par une hyperbole variable.*

En faisant $k = 0$, (S') et (S'_1) se réduisent à l'alysséide (S) et à l'hélicoïde (S_1).

L'application que nous venons de faire nous a conduit, pour (S') et (S'_1), à un couple rappelant, comme forme, le couple (S), (S_1).

Mais la transformation (1) peut remplacer un couple (S), (S_1) par un autre (S'), (S'_1) complètement différent.

Voici, à cet égard, un exemple remarquable où l'on passe d'un système de *deux cylindres* à un autre comprenant *un paraboloïde elliptique*.

Considérons les surfaces (S) et (S_1)

$$\begin{aligned}
x &= u^2 - v^2 + 2av,\\
y &= 2u^2 + v^2 - 2av - 2\int \sqrt{b^2 + 3u^2}\, du,\\
z &= 2bu;\\
x_1 &= u^2 + 2v^2 - 2av - 2\int \sqrt{b^2 + 3u^2}\, du,\\
y_1 &= -u^2 + v^2 + 2\int \sqrt{b^2 + 3u^2}\, du,\\
z_1 &= 2\int \sqrt{a^2 - 3v^2}\, dv.
\end{aligned}$$

Comme z et $x + y$ ne dépendent que de u, et que z_1 et $x_1 + y_1$ ne dépendent que de v, ces équations représentent *deux cylindres;* on s'assure d'ailleurs sans peine que ces deux cylindres s'appliquent l'un sur l'autre *avec correspondance des courbes* (u) *et* (v).

Appliquons à ces deux surfaces la transformation (1) en faisant

$g = h = 0$, $k = -1$; il vient les deux surfaces (S') et (S'_1)

$$
\begin{aligned}
x' &= 2u^2 + v^2,\\
y' &= -2av,\\
z' &= 2bu;\\
x'_1 &= -2\int\sqrt{b^2+3u^2}\,du,\\
y'_1 &= u^2 + 2v^2,\\
z'_2 &= 2\int\sqrt{a^2-3v^2}\,dv,
\end{aligned}
$$

dont la première est le *paraboloïde elliptique*

$$x' = \frac{y'^2}{4a^2} + \frac{z'^2}{2b^2}.$$

Je reviendrai, dans un prochain article, sur ce dernier couple (S'), (S'_1).