BULLETIN DE LA S. M. F.

A. DEMOULIN

Sur un théorème de Ribaucour et sur une propriété caractéristique des surfaces spirales

Bulletin de la S. M. F., tome 23 (1895), p. 198-203
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1895__23__198_1>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR UN THÉORÈME DE RIBAUCOUR ET SUR UNE PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE DES SURFACES SPIRALES;

Par M. A. Demoulin.

1. Une des propriétés les plus importantes de la théorie de la correspondance par orthogonalité des éléments a été énoncée par Ribaucour à la page 230 de son *Étude des élassoïdes ou surfaces à courbure moyenne nulle* [1]. Voici en quoi elle consiste :

Soient deux surfaces (M) *et* (M_1) *qui se correspondent par orthogonalité des éléments; si, par les points de* (M_1), *on mène des droites* D *parallèles aux normales de* (M), *elles forment*

[1] *Mémoires couronnés et Mémoires des savants étrangers publiés par l'Académie royale de Belgique*, in-4, t. XLIV; 1881.

une congruence (D) *qui jouit des propriétés suivantes : 1° elle admet la surface* (M_1) *comme surface moyenne; 2° les plans focaux de* D *sont perpendiculaires aux tangentes asymptotiques de* (M) *en* M.

La démonstration de ce théorème est aisée par l'emploi des formules de Codazzi; nous allons en faire connaître une autre, plus élémentaire, fondée sur une méthode que nous avons proposée, il y a deux ans [1], pour la détermination des surfaces (M_1) qui correspondent à une surface donnée (M), par orthogonalité des éléments. Nous rappellerons d'abord brièvement cette méthode.

2. Supposons que les coordonnées rectangulaires x, y, z d'un point quelconque M de (M) soient exprimées au moyen de deux paramètres u et v; appelons x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point correspondant M_1. On a, par hypothèse,

$$\mathrm{S}\, dx\, dx_1 = dx\, dx_1 + dy\, dy_1 + dz\, dz_1 = 0$$

ou

$$du^2\, \mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial u} + du\, dv\left(\mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v} + \mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial u}\right) + dv^2\, \mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial v} = 0$$

On tire de là, du et dv étant arbitraires,

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial u} &= 0,\\ \mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v} + \mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial u} &= 0,\\ \mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial v} &= 0. \end{aligned}\right.$$

Pour intégrer ce système de trois équations simultanées aux inconnues x_1, y_1, z_1, posons

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{S}\, x_1\frac{\partial x}{\partial u} &= \mathrm{H},\\ \mathrm{S}\, x_1\frac{\partial x}{\partial v} &= \mathrm{K}. \end{aligned}\right.$$

---

[1] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, séance du 27 mars 1893.

Différentiant ces égalités successivement par rapport à u et à v, et tenant compte des relations (1), nous aurons

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathbf{S}\, x_1 \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \frac{\partial H}{\partial u},\\ &\mathbf{S}\, x_1 \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial H}{\partial v} + \frac{\partial K}{\partial u}\right),\\ &\mathbf{S}\, x_1 \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \frac{\partial K}{\partial v}. \end{aligned}\right.$$

Si l'on élimine entre les équations (2) et (3) les inconnues x_1, y_1, z_1, on obtiendra deux équations auxquelles doivent satisfaire les fonctions H et K. Ces fonctions une fois connues, trois des équations (2) et (3) nous donneront x_1, y_1, z_1.

3. Cela rappelé, observons que la perpendiculaire D, abaissée du point M_1 sur le plan tangent en M, peut être représentée par les équations

$$(4)\qquad \mathbf{S}\, X \frac{\partial x}{\partial u} = H,$$

$$(5)\qquad \mathbf{S}\, X \frac{\partial x}{\partial v} = K.$$

Prenons pour u et v les paramètres des asymptotiques de (M); x, y, z vérifient alors deux équations de la forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} = a \frac{\partial \theta}{\partial u} + b \frac{\partial \theta}{\partial v}, \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = a' \frac{\partial \theta}{\partial u} + b' \frac{\partial \theta}{\partial v};$$

il en résulte

$$\frac{\partial H}{\partial u} = aH + bK, \qquad \frac{\partial K}{\partial v} = a'H + b'K.$$

Je dis que les équations (4) et (5) représentent les plans focaux de la droite D. Pour le démontrer, il suffit de faire voir que chacun de ces plans touche son enveloppe en un point de D. Or le point de contact du plan (4) avec son enveloppe est à l'intersection des trois plans

$$\mathbf{S}\, X \frac{\partial x}{\partial u} = H, \qquad \mathbf{S}\, X \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \frac{\partial H}{\partial u}, \qquad \mathbf{S}\, X \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial H}{\partial v}$$

dont les deux premiers passent par D. On démontrera de même que le second plan focal de D est représenté par l'équation (5).

Mais les plans (4) et (5) sont respectivement perpendiculaires aux directions asymptotiques $\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)$ et $\left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)$; la seconde partie du théorème de Ribaucour est donc démontrée.

4. On peut déduire de là, par la Géométrie, que les développables de la congruence (D) et les lignes asymptotiques de la surface (M) se correspondent. Néanmoins, nous croyons qu'il ne sera pas sans intérêt d'établir ce théorème par l'Analyse.

Reprenons les équations de la droite D

$$\mathbf{S}\,X\frac{\partial x}{\partial u} = H, \qquad \mathbf{S}\,X\frac{\partial x}{\partial v} = K.$$

Cette droite engendrera un élément de développable si les équations ci-dessus sont compatibles avec celles que l'on obtient en les différentiant totalement par rapport à u et à v, savoir :

$$\mathbf{S}\,X\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\,du + \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\,dv\right) = \frac{\partial H}{\partial u}\,du + \frac{\partial H}{\partial v}\,dv,$$

$$\mathbf{S}\,X\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\,du + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\,dv\right) = \frac{\partial K}{\partial u}\,du + \frac{\partial K}{\partial v}\,dv.$$

Éliminons X, Y, Z entre ces quatre équations; nous obtiendrons l'équation différentielle des développables de la congruence

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\,du + \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\,dv & \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\,du + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\,dv & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\,du + \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}\,dv & \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}\,du + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}\,dv & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\,du + \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\,dv & \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\,du + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\,dv & \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial H}{\partial u}\,du + \frac{\partial H}{\partial v}\,dv & \frac{\partial K}{\partial u}\,du + \frac{\partial K}{\partial v}\,dv & H & K \end{vmatrix} = 0.$$

A cause du choix des paramètres u et v, cette équation se réduit à

$$du\,dv \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial H}{\partial v} & \frac{\partial K}{\partial u} & H & K \end{vmatrix} = 0.$$

Le coefficient de $du\,dv$ n'est pas nul, si les lignes asymptotiques de la surface (M) forment deux familles distinctes; les développables de la congruence (D) sont donc définies par les équations $u =$ const., $v =$ const., ce qui démontre le théorème.

5. Il nous reste à établir la première partie du théorème de Ribaucour. Soient (X_1, Y_1, Z_1) et (X_2, Y_2, Z_2) les coordonnées des points focaux de D. Il suit des considérations du n° 3 que l'on a

$$\mathrm{S}\, X_1 \frac{\partial x}{\partial u} = H, \qquad \mathrm{S}\, X_1 \frac{\partial x}{\partial v} = K, \qquad \mathrm{S}\, X_1 \frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial H}{\partial v},$$
$$\mathrm{S}\, X_2 \frac{\partial x}{\partial u} = H, \qquad \mathrm{S}\, X_2 \frac{\partial x}{\partial v} = K, \qquad \mathrm{S}\, X_2 \frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial K}{\partial u}.$$

De ces équations et des équations

$$\mathrm{S}\, x_1 \frac{\partial x}{\partial u} = H, \qquad \mathrm{S}\, x_1 \frac{\partial x}{\partial v} = K, \qquad \mathrm{S}\, x_1 \frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial H}{\partial v} + \frac{\partial K}{\partial u}\right),$$

on déduit les suivantes :

$$\mathrm{S}\left(\frac{X_1 + X_2}{2} - x_1\right) \frac{\partial x}{\partial u} = 0,$$
$$\mathrm{S}\left(\frac{X_1 + X_2}{2} - x_1\right) \frac{\partial x}{\partial v} = 0,$$
$$\mathrm{S}\left(\frac{X_1 + X_2}{2} - x_1\right) \frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} = 0,$$

lesquelles donnent, si l'on observe que le déterminant $\left| \frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} \; \frac{\partial x}{\partial u} \; \frac{\partial x}{\partial v} \right|$ n'est pas nul,

$$\frac{X_1 + X_2}{2} = x_1, \qquad \frac{Y_1 + Y_2}{2} = y_1, \qquad \frac{Z_1 + Z_2}{2} = z_1.$$

Ces égalités expriment que (M_1) est la surface moyenne de la congruence (D).

6. Je ne sortirai pas de la théorie de la correspondance par orthogonalité des éléments en démontrant le théorème suivant, qui caractérise les surfaces spirales :

Soit (M) *une surface rapportée à trois axes rectangulaires*

Ox, Oy, Oz. *Projetons un point quelconque* M *de* (M) *sur le plan* xOy *en* P, *et appelons* P′ *un point situé dans le plan* xOy *et tel que le triangle* POP′ *soit rectangle en* O *et de similitude constante. Cela posé, si la droite* MP′ *est tangente en* M *à la surface* (M), *celle-ci sera une surface spirale.*

Soient (x, y, z) les coordonnées du point M; celles du point P′ seront $(-my, mx, 0)$, m désignant une constante, et la propriété supposée à la surface (M) se traduira par l'équation

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x - my) + \frac{\partial z}{\partial y}(y + mx) = z.$$

La théorie des équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre nous apprend que la surface (M) est le lieu d'une série simplement infinie de courbes satisfaisant aux équations différentielles

$$\frac{dx}{x - my} = \frac{dy}{y + mx} = dz.$$

Or ces équations sont précisément celles qui définissent les génératrices des surfaces spirales (*voir* G. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. I, p. 108). La surface (M) est donc bien une surface spirale.

On sait que la surface (M) et le plan xOy se correspondent par orthogonalité des éléments, M et P′ étant des points correspondants. Il suit de là et d'un théorème que j'ai démontré ailleurs [1] que la surface (M) est applicable sur une surface spirale; mais, en vertu du théorème ci-dessus, la surface (M) est une spirale; ce théorème permet donc de distinguer les spirales parmi les surfaces qui sont applicables sur des spirales.

---

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, séance du 12 février 1894.