Bulletin de la S. M. F.

Touche

Calcul de la résistance des fluides à un disque mince

Bulletin de la S. M. F., tome 24 (1896), p. 39-42
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1896__24__39_1>

CALCUL DE LA RÉSISTANCE DES FLUIDES A UN DISQUE MINCE;

Par M. Touche.

Nous avons établi ([1]) que, dans des conditions particulières et déterminées, la courbe orthogonale aux trajectoires fluides a pour équation

$$\frac{dx'}{x'} = -\frac{\cos\alpha'}{\sin\alpha'}\,d\alpha'\left[1+\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2\right],$$

x' étant l'abscisse de la courbe orthogonale, α' l'angle d'inclinaison sur l'axe des x de la tangente à cette courbe et $\frac{ds_1}{ds}$ le rapport à l'élément de trajectoire mn ou ds, de l'élément de courbe orthogonale nr ou ds_1, choisi de telle sorte que l'on ait en r la même pression qu'en m. Cette équation est établie dans le cas particulier où ds_1 est constamment égal à ds'_1, l'élément de courbe orthogonale nr' ou ds'_1 étant de longueur telle que la tangente en r' à la trajectoire qui passe par ce point soit parallèle à la tangente à la trajectoire qui passe par le point m.

Examinons le cas où le corps est immergé dans un fluide d'une très grande étendue et où ce corps est terminé par une surface conique de dimension très grande. Dans ce cas, l'élément mr' ou mr (puisque mr' n'est autre que mr), pour lequel les tangentes en m et en r aux trajectoires qui passent par ces points sont parallèles, fera partie d'une droite passant par le sommet O du cône, car il n'y a aucune raison pour que, suivant une telle droite, les tangentes aux trajectoires ne soient pas parallèles.

Menons par le point m une parallèle à l'axe des x. Nous voyons

---

([1]) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* t. CXXI, n° 3, 15 juillet 1895, p. 157, *Calcul des trajectoires fluides.*

que $\frac{nr}{mr}$ ou $\frac{ds_1}{ds}$ est la tangente d'un angle, somme de deux autres, l'un dont la tangente est $\frac{y'}{x'}$ et l'autre dont la tangente est $\frac{dx'}{dy'}$, de telle sorte que $\frac{ds_1}{ds}$ a pour valeur

$$\frac{\frac{y'}{x'} + \frac{dx'}{dy'}}{1 - \frac{dx'}{dy'}\frac{y'}{x'}}.$$

Au lieu du cas général du cône de grande dimension, prenons le cas particulier du disque de grande dimension. Nous avons calculé, pour ce cas, la courbe orthogonale aux trajectoires, en partant du disque, c'est-à-dire de la valeur 90° pour α', en faisant décroître α' de dix en dix minutes jusqu'à la valeur de $61^\circ 30'$ pour α', puis de cinq en cinq minutes.

Nous avons trouvé que la courbe orthogonale diffère d'abord peu d'une parabole, qu'elle s'en éloigne ensuite, mais en conservant une courbure bien régulière et qu'elle devient asymptotique à une droite partant du centre O du disque et inclinée sur l'axe des x de l'angle de 56°. Il suit de là que l'impulsion du disque ne s'étend pas à toute la masse fluide, car cette impulsion ne peut se transmettre que suivant les courbes orthogonales aux trajectoires; il reste dans l'intérieur du cône, dont l'arête est inclinée de 34° sur l'axe des y, une portion de cette masse qui n'est pas influencée par le mouvement du disque, et suivant cette arête il doit y avoir une inflexion brusque du fluide.

Si, près de la surface du disque, nous prenons deux petites longueurs égales, l'une sur la courbe trajectoire, l'autre sur la courbe orthogonale, la projection de la première sur l'axe des x étant dx et celle de la seconde dx', et si nous remarquons que $\frac{ds_1}{ds}$ devient nul près de la surface du disque, ainsi que le montre la valeur obtenue plus haut pour $\frac{ds_1}{ds}$, l'équation de la courbe orthogonale nous donne

$$\frac{dx'}{x'} = - d\alpha'.$$

Cette dernière équation montre que la section d'une petite nappe fluide comprise entre le disque et la tangente à la trajectoire inclinée de l'angle $d\alpha'$ sur le disque doit être constante, et par suite que la vitesse doit être constante le long du disque.

Cette vitesse constante doit être celle qui existe après l'inflexion brusque, c'est-à-dire celle qui existe avant l'inflexion brusque, multipliée par $\sin 34^\circ$, car le produit de la vitesse par la surface de section doit être constant pour un même filet fluide.

La pression sur l'unité de surface du disque pour une vitesse du disque égale à 1^m sera

$$\frac{\rho}{2}(1 - \sin^2 34^\circ),$$

en appelant ρ la densité divisée par la valeur g de la pesanteur.

Appliquons cette expression au cas de l'air.

A Paris, à 60 mètres au-dessus du niveau de la mer, à la température zéro et à la pression de $0^m,76$, la densité de l'air est : $1,293187$; la valeur de g est $9^m,80896$.

On trouve alors $0^{kg},0453061$ pour la pression sur l'unité de surface de la partie antérieure du disque, relative à la vitesse de 1^m du fluide ambiant. Cette pression correspond à un disque de très grande étendue ; mais on peut la considérer comme relative à un disque de grandeur limitée, sans commettre une grande erreur.

A l'arrière d'un disque mince, on a une poupe fluide formée de tourbillons. Au contact d'une poupe fluide et du fluide ambiant, le fluide est entraîné comme l'est le bois rifflé par le fer du rabot, de manière à former un tourbillon. La considération de ce tourbillon détermine la dépression qui a lieu à l'arrière, laquelle, comme nous allons le voir, est indépendante du rayon du tourbillon. Les tourbillons de la poupe fluide se déplacent constamment par rapport au disque, sans que la dépression qu'ils déterminent change sensiblement de valeur.

Considérons donc un tourbillon. En appelant ds^2 une surface élémentaire normale au rayon du tourbillon, dP la différentielle de la pression comptée suivant ce rayon, m la masse du volume fluide ds^3, r la portion du tourbillon comprise entre le centre et le point considéré et v la vitesse avec laquelle le fluide se meut dans le tourbillon en décrivant la circonférence de rayon r, il nous vient

$$ds^2\, dP = \frac{mv^2}{r}.$$

Or, m a pour valeur $\rho\, ds^3$ et il vient

$$dP = \rho v^2 \frac{dr}{r},$$

la différentielle dr étant prise de longueur égale à ds.

Or, v_1 étant la vitesse à l'extrémité du rayon du tourbillon et r_1 la valeur de r correspondante, on a

$$v = v_1 \frac{r}{r_1}$$

et par suite

$$dP = \rho \frac{v_1^2}{r_1^2} r\, dr$$

et en intégrant, depuis le centre du tourbillon, jusqu'à l'extrémité du rayon r_1,

$$P - P_1 = \frac{\rho}{2} v_1^2,$$

P étant la pression à l'extérieur du tourbillon et P_1 la pression au centre. Remarquons que la dépression $P - P_1$ qui existe à l'arrière du disque est indépendante du rayon du tourbillon.

En appliquant au cas de l'air, nous trouvons pour la dépression $0^{kg},0206125$; cette dépression à l'arrière du disque s'ajoute à la pression de l'avant pour former un total qui représente la résistance. Elle est alors égale à $0^{kg},0659186$.