BULLETIN DE LA S. M. F.

M. PETROVITCH

Remarques algébriques sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre

Bulletin de la S. M. F., tome 24 (1896), p. 58-80

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1896__24__58_0>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

REMARQUES ALGÉBRIQUES SUR LES FONCTIONS DÉFINIES PAR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE;

Par M. Michel Petrovitch.

1. Les remarques qui suivent concernent les valeurs réelles de la variable indépendante x, pour lesquelles les intégrales d'une équation différentielle algébrique de premier ordre peut prendre des valeurs fixes, données à l'avance. Dans tout ce qui suit, je supposerai cette valeur fixe égale à zéro ou à l'infini; on y ramène facilement les cas où il n'en est pas ainsi. Ces remarques s'appliquent également aux valeurs réelles de x, qui rendent les intégrales réelles maximum ou minimum, pour leurs points d'inflexion, leurs directions asymptotiques, etc.

Dans un travail antérieur j'ai donné, sous une forme simple et pratique, les conditions nécessaires et suffisantes pour que les zéros ou les infinis de l'intégrale ne varient pas avec la constante d'intégration, et un procédé simple pour calculer les ordres des zéros et des infinis mobiles. Voici les résultats principaux trouvés à cet égard.

Soit

$$F(x, y, y') = \sum_{i=1}^{i=s} \varphi_i(x) y^{m_i} y'^{n_i}$$

un polynome en y et y', où les m_i et les n_i sont des entiers positifs et les $\varphi_i(x)$ des fonctions quelconques de x. Formons le tableau de $2s$ nombres entiers et positifs

$$M_i = m_i + n_i, \qquad N_i = n_i,$$

et traçons dans le plan deux axes : sur l'un, nous compterons les M_i et sur l'autre les N_i, et marquons les s points (M_i, N_i). Par les points le plus rapproché et le plus éloigné de ON, traçons une ligne polygonale brisée, dont chaque sommet serait (M_i, N_i), et telle qu'aucun point $(M_i N_i)$ ne soit au-dessus d'elle.

Ceci étant, envisageons l'équation différentielle

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1}$$

I. Pour que l'intégrale générale de (1) ait des zéros mobiles d'ordre λ, il faut et il suffit que la ligne polygonale de F ait un côté de coefficient angulaire λ.

II. Pour qu'elle ait des infinis mobiles d'ordre λ, il faut et il suffit que le polygone ait un côté de coefficient angulaire $-\lambda$.

D'après ces théorèmes, si le polygone de F n'a pas de côté à coefficient angulaire positif, les zéros de l'intégrale ne varient pas avec la constante d'intégration, et j'ai montré, d'ailleurs, comment on peut les calculer tous dans ce cas. Mais, s'il y a de tels côtés, ces zéros varient certainement avec la constante et leur étude est alors impossible dans le cas général, ne connaissant ni la façon dont la constante d'intégration (par exemple la valeur $y = y_0$ pour $x = x_0$) entre dans l'expression de l'intégrale générale, ni la forme de cette intégrale, considérée comme fonction de x. C'est dans ce cas que les remarques simples qui suivent peuvent présenter quelque intérêt.

2. Supposons que le polygone de F n'ait aucun côté à coefficient angulaire compris entre 0 et 1. Désignons par $F_1(x, y, y')$ l'ensemble de termes dans F contenant y, et par $F_2(x, y')$ l'ensemble de termes sans y, de sorte qu'on ait

$$F(x, y, y') = F_1(x, y, y') + F_2(x, y').$$

Alors, *dans tout intervalle réel de $x = a$ jusqu'à $x = b$, dans lequel la courbe* $F_2(x, y') = 0$ (où l'on considère x et y' comme coordonnées des points de la courbe) *n'a aucune branche réelle, les zéros des intégrales réelles sont fixes et doivent rendre infinie au moins une fonction $\varphi_i(x)$.*

Il suffit, pour le voir, de remarquer que, le polygone de F n'ayant aucun côté à coefficient angulaire compris entre 0 et 1, l'intégrale y ne peut avoir des zéros mobiles dont l'ordre serait compris entre 0 et 1, et que, par suite, aucune valeur $x = \alpha$, finie, ne coïncidant avec au moins un infini des fonctions $\varphi_i(x)$ et annulant y, ne peut rendre infinie la dérivée y'. On en conclut que la valeur de y' pour $x = \alpha$ est racine de l'équation

$$F_2(\alpha, y') = 0.$$

Et comme, lorsque α varie de a jusqu'à b, les racines de cette équation sont imaginaires, la proposition est démontrée.

Ainsi, par exemple, si, la condition du polygone étant remplie, l'équation différentielle étant de degré pair en y' et mise sous la forme

$$F(x, y, y') = \sum_{i=0}^{i=\mu} f_i(x, y) y'^{\mu - i} = 0,$$

tous les $f_i(x, 0)$ ayant les indices d'une certaine parité sont nuls, et tous les autres, de parité contraire, différents de zéro et de même signe lorsque x varie de $x = a$ jusqu'à $x = b$, chacun des polynomes en y'

$$F(x, 0, y'), \quad F(x, 0, -y')$$

ne présentera que des permanences lorsque x varie dans l'intervalle (a, b); pour tout zéro $x = \alpha$ de y, compris dans cet intervalle et ne coïncidant avec aucun infini fixe d'une des fonctions $f_i(x, 0)$, les valeurs correspondantes de y' sont donc imaginaires, d'après le théorème de Descartes, et, par suite, les zéros de y dans l'intervalle (a, b) seront fixes et connus à l'avance.

De même, envisageons l'équation

$$P(x, y) y'^2 + Q(x, y) y' + S(x, y) = 0,$$

et soient m, n, p les exposants les plus petits de y dans P, Q, S. Le polygone de F n'aura aucun côté à coefficient angulaire compris entre 0 et 1 si la condition $p \leqq n \leqq m$ est remplie. Moyennant cette condition, dans tout intervalle de $x = a$ jusqu'à $x = b$, dans lequel la fonction

$$[Q(x, 0)]^2 - 4 P(x, y) S(x, y)$$

est constamment négative, les intégrales réelles ne peuvent avoir que des zéros fixes, coïncidant avec au moins un des infinis des fonctions en x, figurant comme coefficients dans P, Q, S.

3. Envisageons maintenant les intégrales réelles, *uniformes* dans un intervalle donné, des équations du premier ordre. Ce qui suit s'appliquerait d'ailleurs également aux intégrales non uniformes dans l'intervalle considéré, mais n'ayant pour chaque valeur de x, comprise dans cet intervalle, qu'une seule valeur réelle.

En écrivant l'équation sous la forme

$$F(x, y, y') = \sum_{i=0}^{i=\mu} f_i(x, y) y'^{\mu-i} = 0,$$

on peut, sans faire aucune hypothèse sur le polygone de l'équation, faire la remarque suivante :

Si pour les valeurs de x comprises entre a et b toutes les fonctions $f_i(x, 0)$ non nulles et dont les indices sont d'une même parité ont constamment le même signe et $f_\mu(x, 0) \neq 0$, deux zéros consécutifs d'une intégrale particulière quelconque, réelle et uniforme dans l'intervalle (a, b), comprennent au moins un pôle de la même intégrale; toute intégrale réelle holomorphe dans cet intervalle ne peut s'annuler plus d'une fois entre a et b.

Car si $x = \alpha$ et $x = \beta$ étaient deux zéros consécutifs de $y(x)$, compris entre a et b, et si aucun pôle de y n'est compris dans l'intervalle (α, β), le produit

$$y'(\alpha) y'(\beta)$$

doit être négatif ou nul, d'après le théorème de Rolle. Or, les conditions précédentes étant remplies, si tous les $f_i(x, 0)$ étaient de même signe dans l'intervalle (a, b), les premiers membres des équations algébriques en y'

$$(2) \quad \begin{cases} f_0(\alpha, 0) y'(\alpha)^\mu + f_1(\alpha, 0) y'(\alpha)^{\mu-1} + \ldots + f_\mu(\alpha, 0) = 0, \\ f_0(\beta, 0) y'(\beta)^\mu + f_1(\beta, 0) y'(\beta)^{\mu-1} + \ldots + f_\mu(\beta, 0) = 0 \end{cases}$$

ne présenteraient que des permanences, et, par conséquent, aucune des quantités $y'(\alpha)$ et $y'(\beta)$ ne saurait être réelle et positive; si, au contraire, les $f_i(x, 0)$, correspondant aux indices des parités différentes, sont de signes différents, les équations (2), après y avoir changé y' en $-y'$, ne présenteraient que des permanences, et, par suite, aucune des quantités $y'(\alpha)$ et $y'(\beta)$ ne saurait être réelle et négative. Donc le produit $y'(\alpha)y'(\beta)$ ne saurait être négatif, ce qui démontre la proposition.

4. Supposons que, les conditions du paragraphe précédent étant remplies, le polygone de F n'ait aucun côté à coefficient angulaire entier négatif. Alors, d'après le théorème énoncé au début, les pôles de toute intégrale particulière uniforme sont fixes et connus à l'avance : soient

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n$$

ces pôles. Dans tout intervalle (a, b) satisfaisant aux conditions du n° 3 et ne comprenant aucune valeur a_i, une intégrale uniforme quelconque ne peut avoir plus d'un zéro, d'où le résultat suivant :

Si le polygone de l'équation $F = 0$ *n'a aucun côté à coefficient angulaire entier négatif, et si le nombre de valeurs a_i, compris dans un intervalle (a, b) supposé remplissant les conditions du numéro précédent, est k, une intégrale réelle uniforme quelconque ne peut s'annuler plus de $k+1$ fois dans l'intervalle (a, b).*

Appliquons ces considérations à l'équation du premier degré

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \tag{3}$$

où P et Q sont deux polynomes en x et y de degrés respectifs m et n. Pour que le polygone n'ait aucun côté à coefficient angulaire entier négatif, il faut et il suffit que $m \neq n+2$. Il est d'ailleurs facile à voir que, dans ce cas, les pôles a_i de y sont fixes et l'on peut en trouver toutes les valeurs possibles ; car, si l'on pose $y = \frac{1}{z}$, l'équation se transforme en

$$z^{m-n-2}\frac{dz}{dx} = \frac{P_1(x, z)}{Q_1(x, z)},$$

où P_1 et Q_1 sont des polynomes en z, ne contenant aucune puissance de z en facteur. Comme la dérivée $\frac{dz}{dx}$ doit rester finie pour

$x = a_i$, car a_i est un zéro d'un ordre entier pour z, on voit que

1° Si $m > n + 2$, les a_i sont racines de $P_1(a_i, 0) = 0$;

2° Si $m < n + 2$, les a_i sont racines de $Q_1(a_i, 0) = 0$.

Supposons, pour fixer les idées, que $m > n + 2$; on calculerait alors toutes les valeurs possibles a_i, comme on vient de le voir. On peut toujours supposer que $P(x, 0)$ n'est pas identiquement nul, car, s'il en était ainsi, tous les zéros de l'intégrale générale, sans faire aucune hypothèse sur sa nature, seraient fixes, faciles à calculer et il n'en serait plus question. En effet, on aurait alors

$$P(x, y) = y T(x, y),$$

où T est également un polynome en x et y, et l'équation (3), qu'on peut alors écrire sous la forme

$$y = e^{\int \frac{T(x,y)}{Q(x,y)} dx},$$

montre que tout zéro de y est une racine de $Q(x, 0) = 0$.

Supposons donc que $P(x, y)$ ne contient pas y en facteur. Les zéros simples de y sont alors mobiles, mais les zéros multiples b_i sont fixes et sont racines de l'équation $P(x, 0) = 0$.

Soit (a, b) un intervalle réel, ne contenant aucune des valeurs fixes et connues a_i et b_i et tel que la fraction rationnelle en x

$$\frac{P(x, 0)}{Q(x, 0)} \tag{4}$$

garde un signe invariable lorsque x varie de a jusqu'à b. Alors *aucune intégrale réelle, uniforme dans cet intervalle, ne peut s'annuler plus d'une fois entre a et b.* Car si α et β étaient deux zéros consécutifs dans cet intervalle, comme ils ne peuvent être que des zéros simples, il faudrait, d'après le théorème de Rolle, que le produit

$$y'(\alpha) y'(\beta) = \frac{P(\alpha, 0) P(\beta, 0)}{Q(\alpha, 0) Q(\beta, 0)},$$

soit négatif, ou que α et β comprennent au moins un pôle de y, ce qui n'est pas.

Si l'intervalle (a, b) comprenait k valeurs a_i, racines de

$P_1(x, 0) = 0$ sans comprendre aucune valeur b_i et sans changer de signe entre a et b, *l'intégrale y s'annulerait au plus $k+1$ fois dans cet intervalle.*

Si l'on cherchait la limite supérieure du nombre de zéros compris dans un intervalle quelconque (a, b), on le fractionnera en sous-intervalles, dans lesquels il n'y a aucune valeur a_i, b_i et dans lesquels la fraction rationnelle (4) garde un signe invariable. Si λ est le nombre de tels sous-intervalles, le nombre de zéros simples, compris dans l'intervalle (a, b), sera au plus égal à λ, et en y ajoutant le nombre μ de zéros multiples b_i, compris entre a et b, on obtient $\lambda + \mu$ comme limite supérieure du nombre total des zéros de y dans cet intervalle.

Ces remarques simples s'appliquent à bien d'autres types d'équations et, en particulier, toutes les fois que y', définie par l'équation

$$F(x, 0, y') = 0,$$

n'a pour chaque valeur de x, comprise entre a et b, qu'une seule valeur réelle. Le raisonnement s'applique également lorsque y' a plusieurs déterminations réelles pour $y = 0$, et pour des valeurs de x variant dans l'intervalle (a, b), pourvu que toutes ces déterminations aient le même signe dans cet intervalle. Il est facile d'énoncer, pour ces équations, des conditions suffisantes, pour que les zéros et les infinis d'une intégrale, méromorphe dans un intervalle donné, se séparent mutuellement à la façon de la fonction $\tang x$, etc.

5. Arrêtons-nous maintenant sur l'équation de Riccati qui, par sa forme spéciale et par ses relations étroites avec les équations linéaires, permet une étude plus détaillée des zéros et des infinis réels des intégrales.

Envisageons l'équation

$$y' + \varphi_1 y^2 + \varphi_2 y + \varphi_3 = 0, \tag{1}$$

où φ_1, φ_2, φ_3 sont des fonctions données de x, uniformes et sans points essentiels dans un intervalle donné de $x = a$ jusqu'à $x = b$. En y posant

$$y = \frac{1}{\varphi_1}\frac{u'}{u} + \frac{\varphi_1\varphi_2 - \varphi_1'}{2\varphi_1}, \tag{2}$$

la fonction u est intégrale de l'équation

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \varpi(x) u = 0, \tag{3}$$

où

$$\varpi(x) = \varphi_1 \varphi_3 - \frac{d}{dx}\left(\frac{\varphi_1 \varphi_2 - \varphi_1'}{2\varphi_1}\right) - \left(\frac{\varphi_1 \varphi_2 - \varphi_1'}{2\varphi_1}\right)^2.$$

En même temps, la dérivée logarithmique $\frac{u'}{u}$ est l'intégrale générale de

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u'}{u}\right) + \left(\frac{u'}{u}\right)^2 + \varpi(x) = 0. \tag{4}$$

Posons

$$\chi(x) = \tfrac{1}{2}(\varphi_1 \varphi_2 - \varphi_1'), \tag{5}$$

$$w(x) = u' + \chi(x) u, \tag{6}$$

l'intégrale y sera

$$y = \frac{1}{\varphi_1(x)} \frac{w(x)}{u(x)}. \tag{7}$$

Marquons sur l'axe réel Ox les zéros réels de $\varphi_1(x)$ et les pôles réels de φ_1, φ_2, φ_3. Dans tout intervalle (a, b), ne contenant aucune de ces valeurs, la fonction u restera finie et l'intégrale y de (1) jouira des propriétés suivantes :

1° Supposons d'abord que, dans l'intervalle considéré (a, b), la fonction $\varpi(x)$ soit constamment positive et la fonction $\chi(x)$ constamment décroissante. Alors, d'après la formule (4), la dérivée logarithmique $\frac{u'}{u}$ est constamment décroissante dans cet intervalle et il en est de même du rapport

$$\frac{w(x)}{u(x)} = \frac{u'}{u} + \chi(x).$$

Or, pour toute valeur de x, qui annule u, ce rapport passe du négatif au positif. D'autre part, pour toute valeur de x qui annule w, on a $u(x) \neq 0$ [car autrement, d'après la formule (6), on aurait à la fois $u = 0$, $u' = 0$, ce qui est impossible en vertu d'une propriété connue de l'équation (3), la fonction $\varpi(x)$ restant holomorphe dans l'intervalle considéré], et comme le rapport $\frac{w}{u}$ décroît, il passe du positif au négatif pour cette valeur de x; puis, x continuant à croître, il décroît indéfiniment en prenant des valeurs négatives de plus en plus grandes, jusqu'à ce que u devienne nulle. Alors il devient infini et change de signe en passant de $-\infty$ à $+\infty$. Ensuite, x continuant à croître, ce rapport recommence à décroître, en prenant des valeurs positives de plus en plus petites, jusqu'à ce qu'il s'annule, etc.

On en conclut que *les zéros et les infinis de l'intégrale générale y de l'équation* (1), *compris dans l'intervalle* (a, b), *se séparent mutuellement, de sorte que cette intégrale s'annule et devient infinie alternativement pour des valeurs croissantes de x.*

De plus, si $\varphi_1(x)$ est constamment positive entre a et b, l'intégrale oscille entre $+\infty$ et $-\infty$, en décroissant toujours et avec passage brusque de $-\infty$ à $+\infty$; au contraire, si $\varphi_1(x)$ est constamment négative, l'intégrale oscille de $+\infty$ à $-\infty$ en croissant constamment et avec passage brusque de $+\infty$ à $-\infty$.

2° Supposons que, dans l'intervalle (a, b), la fonction $\varpi(x)$ ne soit pas constamment positive ou que $\chi(x)$ ne soit pas constamment décroissante. Alors le rapport $\frac{w}{u}$ peut tantôt croître, tantôt décroître. Désignons par ξ_1 et ξ_2 deux infinis consécutifs de l'intégrale y, c'est-à-dire deux zéros consécutifs de u, compris entre a et b, et soit ε une quantité positive très petite. La valeur de

$$\frac{w(\xi_1+\varepsilon)}{u(\xi_1+\varepsilon)}$$

sera très grande et positive; celle de

$$\frac{w(\xi_2-\varepsilon)}{u(\xi_2-\varepsilon)}$$

très grande et négative. Donc le rapport $\frac{w}{u}$ s'annule un nombre impair de fois entre ξ_1 et ξ_2. On en conclut que *deux infinis consécutifs quelconques de l'intégrale y, compris dans l'intervalle* (a, b), *comprennent au moins un, et en général un nombre impair de zéros de cette intégrale.*

Proposons-nous maintenant de déterminer le nombre de ces zéros ou de ces infinis compris dans un intervalle donné (a, b).

Occupons-nous d'abord des infinis. Tout infini de y est soit un zéro de $\varphi_1(x)$, soit un pôle de φ_1, φ_2, φ_3, soit un zéro de u. Toutes ces valeurs, sauf les zéros de u, sont fixes et connues à l'avance; les seuls infinis mobiles de y sont les zéros de u, et nous allons chercher le nombre de ces infinis mobiles dans l'intervalle donné.

A cet effet, commençons par rappeler quelques résultats connus, relatifs aux équations linéaires du second ordre, dus à Sturm, en les complétant sur plusieurs points et en les appliquant directement à l'équation (1) de Riccati.

Considérons les deux équations

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \varpi(x) u = 0,$$

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \chi(x) v = 0,$$

où ϖ et χ sont deux fonctions holomorphes dans l'intervalle (a, b). Alors :

1° Si, dans cet intervalle, on a constamment $\chi(x) \geqq \varpi(x)$, deux zéros consécutifs de u comprennent au moins un zéro de v.

2° Si l'on a

$$\frac{v'(a)}{v(a)} \leqq \frac{u'(a)}{u(a)}, \qquad u(a)v(a) \geqq 0,$$

et si dans l'intervalle (a, b), on a constamment $\chi(x) \geqq \varpi(x)$, la fonction v s'annulera au moins autant de fois que u entre les limites a et b, et si l'on considère par ordre de grandeur, à partir de $x = a$, les différentes valeurs de x qui annulent u et v, les valeurs de x qui annulent u seront respectivement plus grandes que celles de même rang qui annulent v.

Ceci étant, partageons l'intervalle donné en sous-intervalles, dans lesquels $\varpi(x)$ garde un signe invariable, et envisageons d'abord un tel sous-intervalle (a', b') *où* $\varpi(x)$ *est constamment négative*.

Soit $-$ M la plus grande valeur que $\varpi(x)$ prend entre les limites (a', b') et envisageons l'équation

$$\frac{d^2 v}{dx^2} - \mathrm{M} v = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$v = C_1 e^{x\sqrt{M}} + C_2 e^{-x\sqrt{M}}.$$

Soit A la valeur attribuée à y pour $x = a$; la valeur $\theta(a) = \frac{u'(a)}{u(a)}$ sera, d'après la formule (2),

$$\theta(a) = 2A\varphi_1(a) + \varphi'_1(a) - \varphi_1(a)\varphi_2(a),$$

et l'on peut évidemment choisir les constantes d'intégration C_1 et C_2, de sorte que les conditions de Sturm soient remplies. On en conclut, d'après le théorème précédent, que u ne peut s'annuler plus d'une fois entre a' et b'. Par conséquent, *y ne peut avoir plus d'un infini mobile dans cet intervalle.*

Envisageons maintenant un sous-intervalle (a'', b'') *dans lequel $\varpi(x)$ est constamment positive.* Dans cet intervalle, la fonction $\varpi(x)$ peut s'annuler une ou plusieurs fois et avoir un ou plusieurs pôles; partageons-le :

1° En intervalles (α, α') dans lesquels la fonction $\varpi(x)$ reste holomorphe;

2° En intervalles très petits (β, β') dans le voisinage d'un pôle de $\varpi(x)$.

I. — Intervalles (α, α').

Soient M et N la plus grande et la plus petite valeur que prend la fonction $\varpi(x)$ dans un tel intervalle (en supposant $N \neq 0$), et considérons les deux équations

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2 v}{dx^2} + Mv = 0, \\ &\frac{d^2 w}{dx^2} + Nw = 0, \end{aligned} \right.$$

dont les intégrales respectives sont

$$v = C_1 \sin(x\sqrt{M} + C_2),$$
$$w = C_3 \sin(x\sqrt{N} + C_4).$$

Comme on peut toujours choisir les constantes C_1, C_2, C_3,

C_1, de sorte qu'on ait à la fois

$$\frac{v'(a)}{v(a)} \leqq \theta(a), \qquad \frac{w'(a)}{w(a)} \geqq \theta(a),$$
$$u(a)w(a) \geqq 0, \qquad u(a)v(a) \geqq 0,$$

d'après le théorème de Sturm, $u(x)$ s'annulera dans l'intervalle (a, b) au moins autant de fois que w et au plus autant de fois que v.

Il s'ensuit que si l'on convient de représenter par $E(\xi)$ le nombre d'unités entières contenues dans ξ, le nombre des zéros de $u(x)$, et, par suite, *le nombre des infinis mobiles de l'intégrale y, compris dans l'intervalle* (α, α'), *sera*

$$\textit{au moins égal à } E\left[\frac{(\alpha'-\alpha)\sqrt{N}}{\pi}\right]$$
$$\textit{au plus égal à } E\left[\frac{(\alpha'-\alpha)\sqrt{M}}{\pi}\right]+1.$$

Le nombre des infinis, compris dans un intervalle (α, α') fini, est donc toujours limité. On peut toujours les séparer, c'est-à-dire partager l'intervalle (α, α') en plusieurs autres tels que, dans aucun d'eux, y ne pût avoir plus d'un infini. Car si

$$E\left[\frac{(\alpha'-\alpha)\sqrt{M}}{\pi}\right]=n,$$

on fractionnera l'intervalle (α, α') en $n+1$ autres intervalles (α_i, α_{i+1}) tels que chacun soit plus petit que $\frac{\pi}{\sqrt{M}}$ et l'on est certain d'avoir ainsi les infinis de y séparés, chacun des tels sous-intervalles ne pouvant comprendre qu'un infini au plus.

Voici maintenant comment on peut quelquefois calculer ces infinis avec une approximation suffisante, lorsqu'on se donne la valeur $y = A_i$ pour une extrémité $x = \alpha_i$ de l'intervalle cité (α_i, α_{i+1}), qui ne comprend plus d'un tel infini.

Soient K_1 et K_2 deux nombres compris entre 0 et π et tels que

$$(9) \qquad \begin{cases} \operatorname{tang} K_1 \geqq -\dfrac{\sqrt{N}}{\theta(\alpha_i)}, \\[2ex] \operatorname{tang} K_2 \leqq -\dfrac{\sqrt{M}}{\theta(\alpha_i)}, \end{cases}$$

$\theta(\alpha_i)$ étant complètement déterminée par la formule

$$\theta(\alpha_i) = 2A_i \varphi_1(\alpha_i) + \varphi_1'(\alpha_i) - \varphi_1(\alpha_i)\varphi_2(\alpha_i),$$

M et N étant la plus grande et la plus petite valeur de $\varpi(x)$ dans l'intervalle (α_i, α_{i+1}). Les deux fonctions

$$v = C\sin\left[(x-\alpha_i)\sqrt{M} - K_2\right],$$
$$w = C'\sin\left[(x-\alpha_i)\sqrt{N} - K_1\right],$$

où C et C′ sont des constantes arbitraires, satisfont à deux équations (8). On peut évidemment choisir les constantes C et C′, de sorte que les conditions

$$u(\alpha_i)\,w(\alpha_i) \geqq 0, \qquad u(\alpha_i)\,v(\alpha_i) \geqq 0,$$

soient remplies, et l'on s'assure facilement qu'en vertu des inégalités (9), les conditions

$$\frac{v'(\alpha_i)}{v(\alpha_i)} \leqq \theta(\alpha_i), \qquad \frac{w'(\alpha_i)}{w(\alpha_i)} \geqq \theta(\alpha_i)$$

sont aussi remplies. Toutes les quatre conditions du théorème de Sturm seront donc remplies.

Ceci étant, désignons par x_1, x_2 et ξ les plus petites valeurs respectives de x, immédiatement supérieures à α_i, qui annulent w, v et u. D'après le théorème de Sturm, on aura

$$x_2 < \xi < x_1.$$

Mais, comme l'on a

$$x_1 = \alpha_i + \frac{K_1}{\sqrt{N}}, \qquad x_2 = \alpha_i + \frac{K_2}{\sqrt{M}},$$

on aura

$$\alpha_i + \frac{K_2}{\sqrt{M}} < \xi < \alpha_i + \frac{K_1}{\sqrt{N}}.$$

On connaîtra ainsi deux limites, entre lesquelles sera compris l'infini considéré ξ de y.

Si ces deux limites ne surpassent pas α_{i+1}, *on sera certain qu'il existe entre elles un infini de* y, qui est d'ailleurs le seul infini compris dans l'intervalle (α_i, α_{i+1}).

Si la limite inférieure x_2 surpasse α_{i+1}, *on sera certain que* y *ne devient pas infini dans l'intervalle* (α_i, α_{i+1}).

Le seul cas où l'on ne peut rien décider est celui où α_{i+1} est compris entre x_1 et x_2. Tout ce qu'on saura, dans ce cas, c'est que y ne peut devenir infinie plus d'une fois dans l'intervalle (α_i, α_{i+1}).

La détermination des limites x_1 et x_2 dépend de la détermination des limites suffisamment rapprochées, entre lesquelles peuvent varier les deux nombres K_1 et K_2, tout en satisfaisant aux conditions (9). Or, étant donnée la valeur $y = A_i$ pour $x = \alpha_i$, la valeur $\theta(\alpha_i)$ sera donnée par la formule

$$\theta(\alpha_i) = 2 A_i \varphi_1(\alpha_i) + \varphi_1'(\alpha_i) - \varphi_1(\alpha_i)\varphi_2(\alpha_i);$$

M et N sont aussi connus, et, par suite, les limites entre lesquelles doivent varier K_1 et K_2 seront connues. On choisira, dans ces limites, deux valeurs de K_1 et K_2 telles que la différence

$$x_2 - x_1 = \frac{K_2}{\sqrt{M}} - \frac{K_1}{\sqrt{N}}$$

soit la plus petite possible.

On obtiendra de nouvelles limites plus rapprochées de ξ en appliquant ces mêmes calculs à l'intervalle (x_2, x_1) qu'on vient de déterminer. Mais, pour cela, il faudra calculer la valeur exacte ou suffisamment approchée de $\theta(x_2)$, ce qu'on peut faire de la manière suivante. La fonction

$$\theta(x) = 2\varphi_1(x)y + \varphi_1'(x) - \varphi_1(x)\varphi_2(x) \tag{10}$$

reste holomorphe pour toute valeur de x comprise entre les limites α_i et $\alpha_i + \frac{K}{\sqrt{M}}$, puisque, entre ces limites, y n'a pas d'infinis. Par conséquent, on aura

$$\theta(x_2) = \theta\left(\alpha_i + \frac{K_2}{\sqrt{M}}\right) = \theta(\alpha_i) + \frac{\theta'(\alpha_i)}{1}\frac{K_2}{\sqrt{M}} + \frac{\theta''(\alpha_i)}{1.2}\left(\frac{K_2}{\sqrt{M}}\right)^2 + \ldots, \tag{11}$$

où il faut remplacer y par A_i et les dérivées $\theta'(\alpha_i)$, $\theta''(\alpha_i)$, ... par leurs valeurs respectives, qu'on trouve en différentiant la formule (10) et en y remplaçant les dérivées successives de y par leurs valeurs tirées de l'équation de Riccati donnée. La convergence de la série (11) est assurée à l'avance.

En continuant ainsi de proche en proche, on pourra rapprocher les limites qui comprennent ξ et calculer celui-ci avec une approximation suffisante.

Envisageons maintenant l'intervalle entier (α, α'). Supposons que, x variant de $x=\alpha$ jusqu'à $x=\alpha'$, la fonction $\varpi(x)$ varie constamment dans un même sens (en croissant ou en décroissant) et étudions la variation de la distance de deux infinis consécutifs de y, que x rencontrera pendant cette variation.

En prenant comme limite inférieure α de l'intervalle (α, α') un infini $x=\xi$ de y, on peut déterminer les constantes d'intégration dans les formules

$$v = C_1 \sin(x\sqrt{M} + C_2),$$
$$w = C_3 \sin(x\sqrt{N} + C_4),$$

de manière qu'on ait à la fois

$$v(\xi) = 0, \qquad w(\xi) = 0;$$

on aura alors

$$v = C_1 \sin[(x-\xi)\sqrt{M}],$$
$$w = C_3 \sin[(x-\xi)\sqrt{N}].$$

D'après le théorème de Sturm, la valeur du zéro ξ' de $u(x)$ qui suit immédiatement ξ doit être plus grande que la première valeur au delà de ξ qui annule v et plus petite que la première valeur de x au delà de ξ qui annule v, d'où résulte

$$\frac{\pi}{\sqrt{M}} < \xi' - \xi < \frac{\pi}{\sqrt{N}}$$

ou

$$\xi' - \xi = \frac{\pi}{\sqrt{\varpi(\gamma)}},$$

γ désignant une certaine valeur comprise entre ξ et ξ'. On aura de même pour le zéro ξ'' de $u(x)$, immédiatement supérieur à ξ',

$$\xi'' - \xi' = \frac{\pi}{\sqrt{\varpi(\gamma')}},$$

γ' désignant une quantité comprise entre ξ' et ξ'', etc.

Distinguons maintenant les deux cas suivants :

Premier cas. — Supposons que la fonction $\varpi(x)$ aille constamment en décroissant dans l'intervalle considéré (α, α'). On aura alors dans cet intervalle

$$\varpi(\gamma) > \varpi(\gamma') > \varpi(\gamma'') > \ldots$$

et, par suite,

$$\xi' - \xi < \xi'' - \xi' < \xi''' - \xi'' < \ldots.$$

Ceci montre que *la différence de deux infinis consécutifs de y augmente de plus en plus lorsqu'on va de α jusqu'à α', mais elle ne peut pas dépasser la quantité* $\frac{\pi}{\sqrt{N}}$.

Si, x croissant de α jusqu'à l'infini, la fonction $\varpi(x)$ reste constamment positive et tend asymptotiquement vers une limite ρ, l'intégrale y aura, dans l'intervalle (α, ∞), une infinité d'infinis et la différence de deux infinis consécutifs tend asymptotiquement vers la limite $\frac{\pi}{\sqrt{\rho}}$. Lorsqu'on aura calculé quelques-uns des plus petits infinis ξ_i de y, la formule

$$\xi_n - \xi_{n-1} = \frac{\pi}{\sqrt{\rho}}$$

donne les suivants avec assez d'approximation.

Si la limite ρ est égale à zéro, cette différence augmente indéfiniment. Dans ce cas, il peut encore exister dans l'intervalle (α, ∞) une infinité d'infinis de y, mais la comparaison avec les fonctions précédentes v et w ne peut plus décider s'il en est ainsi ou non. Pour le décider, on peut procéder comme ceci.

D'abord, *si $x = \infty$ est un zéro simple de $\varpi(x)$, l'intégrale y deviendra infinie une infinité de fois dans l'ntervalle* (α, ∞), puisque la limite inférieure du nombre de ces infinis est égale à

$$\lim \mathrm{E}\left[\frac{(x-\alpha)\sqrt{\varpi(x)}}{\pi}\right] = \infty, \qquad \text{pour } x = \infty.$$

Supposons donc que $x = \infty$ soit un zéro multiple de $\varpi(x)$. Alors l'expression $x\sqrt{\varpi(x)}$ tend, pour $x = \infty$, vers une limite finie et déterminée λ, pouvant d'ailleurs être égale à zéro. Distinguons les trois cas suivants.

1° $\lambda < \frac{1}{2}$. — On peut dans ce cas trouver un nombre h, suffisamment grand, mais fini, et tel que pour toute valeur de x plus grande que h, on ait

$$x\sqrt{\varpi(x)} < \tfrac{1}{2}$$

ou

$$\varpi(x) < \frac{1}{4x^2}.$$

Si l'on envisage alors l'équation linéaire

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{1}{4x^2}v = 0, \tag{12}$$

d'après le théorème de Sturm, lorsque x varie de h jusqu'à ∞, une intégrale v quelconque de (12) s'annulera au moins autant de fois que l'une quelconque des intégrales u de l'équation

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \varpi(x)u = 0. \tag{13}$$

Et comme l'intégrale particulière $v = \sqrt{x}$ de (12) ne s'annule point pour de grandes valeurs de x, il en est de même de u. *Le nombre des infinis de y dans l'intervalle* (α, ∞) *est alors fini.*

Ceci comprend, comme cas particulier, le cas où $\lambda = 0$, comme il en sera toujours lorsque le degré de multiplicité du zéro $x = \infty$ de $\varpi(x)$ surpasse 2.

2° $\lambda > \frac{1}{2}$. — Alors à tout intervalle, à partir d'une valeur finie $x = h$, on peut faire correspondre une quantité ε positive, suffisamment petite et telle qu'on ait dans cet intervalle

$$x\sqrt{\varpi(x)} > \tfrac{1}{2} + \varepsilon.$$

ou

$$\varpi(x) > \frac{(\frac{1}{2} + \varepsilon)^2}{x^2}.$$

Si l'on envisage alors l'équation

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{(\frac{1}{2} + \varepsilon)^2}{x^2}V = 0. \tag{14}$$

u s'annulera dans un intervalle quelconque entre h et ∞, au moins autant de fois qu'une intégrale quelconque V de (13). Or, l'équation (14) admet comme intégrale particulière la fonction

$$V = \sqrt{x}\cos\left[\sqrt{\varepsilon + \varepsilon^2}\log x\right].$$

qui s'annule pour une infinité de valeurs réelles de x, données par la formule

$$\alpha_n = e^{\frac{(2n+1)\pi}{2\sqrt{\varepsilon+\varepsilon^2}}},$$

grandissant au delà de toute limite, et dont le nombre dans l'intervalle (h, ∞) est infini, quoique la différence

$$\alpha_n - \alpha_{n-1} = e^{2n\rho}(e^{\rho} - e^{-\rho}) \qquad \left(\rho = \frac{\pi}{2\sqrt{\varepsilon + \varepsilon^2}}\right).$$

augmente indéfiniment avec n. Par suite, la fonction $u(x)$ s'annulera un nombre infini de fois dans cet intervalle. *L'intégrale y aura donc une infinité d'infinis dans l'intervalle* (α, ∞).

3° $\lambda = \frac{1}{2}$. Trois cas peuvent se présenter.

Si, pour les valeurs de x croissantes à partir d'une valeur h suffisamment grande, on a constamment

$$\varpi(x) < \frac{1}{4x^2},$$

on se trouve dans le cas 1°.

Si à tout intervalle (h', h''), compris dans l'intervalle (h, ∞), on peut faire correspondre un nombre positif ε tel que x variant entre les limites h' et h'', on ait constamment

$$\varpi(x) > \frac{(\frac{1}{2} + \varepsilon)^2}{x^2},$$

on se trouve dans le cas 2°.

Si ni l'une ni l'autre de ces circonstances ne se présente, on ne peut rien décider.

Deuxième cas. — Supposons que la fonction $\varpi(x)$ aille constamment en croissant dans l'intervalle (α, α'). On aura alors

$$\varpi(\gamma) < \varpi(\gamma') < \varpi(\gamma'') < \cdots$$

et, par suite,

$$\xi' - \xi > \xi'' - \xi' > \xi''' - \xi'' > \cdots.$$

La différence de deux infinis consécutifs de y diminue donc de plus en plus lorsqu'on va de α jusqu'à α', mais elle ne peut pas devenir plus petite que $\frac{\pi}{\sqrt{M}}$.

Si, x croissant de α jusqu'à l'infini, la fonction $\varpi(x)$ reste constamment positive, et tend asymptotiquement vers une limite ρ, les différences de deux infinis consécutifs de y, diminuent progressivement, et tendent vers la limite $\frac{\pi}{\sqrt{\rho}}$ et, par suite, y devient infini pour un nombre infini de valeurs de x compris entre α et ∞. Si, en particulier, la limite ρ est infinie, l'intégrale y devient infinie pour un nombre infini de valeurs de x, croissant indéfiniment et telles que la différence de deux de ces valeurs consécutives finit par devenir plus petite que toute quantité donnée.

II. — Intervalles (β, β').

Envisageons maintenant un intervalle très petit (β, β') au voisinage d'un pôle de $\varpi(x)$. D'abord si x, tendant vers le pôle $x = c$ de $\varpi(x)$ par des valeurs croissantes ou décroissantes, à partir d'une valeur $x = a$, la fonction $\varpi(x)$ reste constamment négative dans l'intervalle (a, c); il suit de ce qui précède que y ne peut avoir, dans cet intervalle, plus d'un infini. Supposons donc que, dans l'intervalle (a, c), la fonction $\varpi(x)$ reste constamment positive. En prenant comme nouvelle variable indépendante z, définie par la relation

$$x = \pm \frac{1}{z} + c$$

[le signe $\pm$ devant $\frac{1}{z}$ est mis pour qu'à de grandes valeurs positives de z puissent correspondre les valeurs de x très peu différentes de c et se trouvant de l'un ou de l'autre côté de c, suivant que x tend vers c par des valeurs croissantes ou décroissantes], l'équation (13) se transforme en

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \Phi(z) u = 0,$$

avec

$$\Phi(z) = \varpi\left(\pm \frac{1}{z} + c\right) \frac{1}{z^4}.$$

Distinguons les trois cas suivants :

1° *La valeur $x = c$ est un pôle de $\varpi(x)$ d'un ordre supé-*

rieur à 4. Alors pour $x=c$, c'est-à-dire pour $z=\infty$, on aura

$$\lim \Phi(z) = \lim[(x-c)^4 \varpi(x)] = \infty,$$

et, par conséquent, d'après une remarque précédente, l'intégrale y, considérée comme fonction de z, deviendra infinie pour une infinité de valeurs de z très grandes, et dont la différence finit par devenir plus petite que toute quantité donnée. Il s'ensuit que y, *considérée comme fonction de* x, *aura dans l'intervalle* (a, c) *une infinité d'infinis, s'approchant indéfiniment de* c, *et dont la différence tend vers zéro.*

2° *La valeur* $x=c$ *est un pôle d'un ordre égal à* 4 *pour* $\varpi(x)$. La limite de $\Phi(z)$ pour $x=c$ est alors un nombre fini λ. En considérant u comme fonction de z, la limite inférieure de ses zéros dans l'intervalle $\left(\frac{1}{a-c}, z\right)$ est

$$E\left[\frac{\left(\pm z - \frac{1}{a-c}\right)\sqrt{\Phi(z)}}{\pi}\right],$$

et cette limite augmente indéfiniment lorsque z tend vers ∞. Par conséquent y, *considérée comme fonction de* x, *deviendra infinie pour une infinité de valeurs de* x *comprises dans l'intervalle* (a, c) *et s'approchant indéfiniment de* c.

3° *La valeur* $x=c$ *est un pôle de* $\varpi(x)$ *d'un ordre inférieur à* 4. Alors on a

$$\lim \Phi(z) = 0,$$

pour $z=\infty$, et pour décider si le nombre des infinis de y, dans le voisinage de $z=c$, est limité ou non, il faut appliquer les théorèmes précédents, ce qui conduira aux résultats suivants : Désignons par λ la limite de $(x-c)\sqrt{\varpi(x)}$ pour $x=c$. Alors l'expression $z\sqrt{\Phi(z)}$ aura, pour $z=\infty$, la même limite λ et

a. Si $\lambda < \frac{1}{2}$, l'intégrale y n'a qu'un nombre limité d'infinis dans l'intervalle (a, c);

b. Si $\lambda > \frac{1}{2}$, y devient infinie pour une infinité de valeurs de x, voisines de c et tendant vers c;

c. Si $\lambda = \frac{1}{2}$, on aura le cas (a) ou (b) suivant que, x variant de a jusqu'à c, on ait dans le voisinage de $x = c$ constamment

$$(x-c)\sqrt{\varpi(x)} < \tfrac{1}{2}$$

ou

$$(x-c)\sqrt{\varpi(x)} > \tfrac{1}{2}.$$

On peut ainsi étudier les infinis de l'intégrale y dans tout intervalle dans lequel les coefficients $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, figurant dans l'équation de Riccati donnée, sont fonctions méromorphes d x.

Dans ce qui précède, nous nous sommes occupé des infinis de l'intégrale y. Mais tout ce qui précède s'applique aussi à l'étude des zéros de y, d'après la remarque suivante :

Si dans l'équation donnée

$$(15) \qquad y' + \varphi_1(x)y^2 + \varphi_2(x)y + \varphi_3(x) = 0,$$

on fait $y = \frac{1}{z}$, on aura

$$(16) \qquad z' - \varphi_3(x)z^2 - \varphi_2(x)z - \varphi_1(x) = 0.$$

Tout zéro de y est un infini de z et réciproquement. En posant

$$z = -\frac{1}{\varphi_3}\frac{v'}{v} - \frac{\varphi_2\varphi_3 - \varphi'_3}{2\varphi_3},$$

v est l'intégrale de l'équation

$$(17) \qquad \frac{d^2 v}{dx^2} + \chi(x)v = 0,$$

où

$$\chi(x) = \varphi_1\varphi_3 + \frac{d}{dx}\left(\frac{\varphi_2\varphi_3 + \varphi'_3}{2\varphi_3}\right) - \left(\frac{\varphi_2\varphi_3 - \varphi'_3}{2\varphi_3}\right)^2.$$

Tout ce qui a été dit pour les infinis de y s'applique aussi bien aux zéros par la considération de l'équation (17), de sorte qu'on aura, par exemple, une limite supérieure et une limite inférieure du nombre des zéros compris dans un intervalle donné; on pourra assigner des limites entre lesquelles il n'y a pas plus d'un zéro, calculer ces zéros par approximation, étudier leur nombre et distribution dans le voisinage d'un point singulier des coefficients de l'équation, etc.

On peut aussi, par ce qui précède, étudier les variations des zéros et des infinis de l'intégrale y, lorsque les coefficients dans l'équation contiennent un ou plusieurs paramètres variables, et lorsque ces paramètres varient.

Enfin on peut toujours étudier la façon dont l'intégrale se comporte pour $x=\infty$. A cet effet, posons

$$y=\frac{U}{\varphi_1(x)};$$

l'équation (15) se transforme en

$$\frac{dU}{dx}+U^2+F_1(x)U+F_2(x)=0, \tag{18}$$

où

$$F_1(x)=\varphi_2(x)-\frac{\varphi_1'(x)}{\varphi_1(x)},$$
$$F_2(x)=\varphi_1(x)\varphi_3(x).$$

L'équation (18) a été l'objet d'une étude approfondie de M. Poincaré au point de vue des limites vers lesquelles tend l'intégrale U, lorsque x tend vers ∞ d'une certaine manière, par exemple par des valeurs positives croissantes. Ainsi, si les fonctions $F_1(x)$ et $F_2(x)$ tendent vers des limites finies et déterminées pour $x=\infty$, de sorte qu'on ait

$$\lim F_1(x)=a_1,$$
$$\lim F_2(x)=a_2,$$

on aura à distinguer les deux cas suivants :

1° Si $a_1^2-4a_2>0$, l'intégrale U tend vers une limite finie et déterminée qui est, en général, égale à la plus petite des deux valeurs

$$-\tfrac{1}{2}\left(a_1+\sqrt{a_1^2-4a_2}\right),$$
$$-\tfrac{1}{2}\left(a_1-\sqrt{a_1^2-4a_2}\right),$$

et ne pouvant qu'exceptionnellement être égale à la plus grande de ces valeurs.

2° Si $a_1^2-4a_2=0$, l'intégrale U tend vers la limite $-\frac{a_1}{2}$.

3° Si $a_1^2-4a_2<0$, U ne tend vers aucune limite déterminée; toute intégrale oscille alors une infinité de fois entre $+\infty$ et $-\infty$, avec passage brusque de $-\infty$ à $+\infty$, à la façon de la fonction $U = -\tang x$.

Ce dernier fait se déduit, d'ailleurs, facilement de ce qui précède. Car si l'on pose

$$U = \frac{1}{V}\frac{dV}{dx} + \frac{1}{2}F_1(x),$$

l'équation (18) se transforme en

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \Psi(x)V = 0,$$

où

$$\Psi(x) = F_2(x) - \tfrac{1}{2}F_1'(x) - \tfrac{1}{4}F_1^2(x).$$

A partir d'une valeur $x = h$, positive et suffisamment grande, la fonction $\Psi(x)$ sera finie et aura un signe constant qui sera celui de la quantité $a_2 - \frac{a_1^2}{4}\cdot$ Comme $a_1^2 - 4a_2 < 0$, on peut toujours choisir la valeur $x = h$ de manière que, dans l'intervalle de $x = h$ jusqu'à $x = \infty$, la plus petite valeur de $\Psi(x)$ soit différente de zéro et positive. Si l'on désigne par N cette valeur, d'après ce qui précède, la fonction U deviendra infinie pour un nombre infini de valeurs de x compris dans l'intervalle (h, ∞) et dont la différence va constamment en croissant ou en décroissant suivant que la fonction $\Psi(x)$ est décroissante ou croissante pour de grandes valeurs de x. De plus, la différence de deux infinis consécutifs, dans le premier cas, augmente de plus en plus, mais ne peut pas dépasser la quantité $\frac{\pi}{\sqrt{N}}$; dans le second cas, cette différence diminue de plus en plus, mais ne peut pas devenir plus petite que la quantité $\frac{\pi}{\sqrt{M}}\cdot$ En même temps, puisque la dérivée logarithmique $\frac{1}{V}\frac{dV}{dx}$ pour $x = x_1 - \varepsilon$ (x_1 désignant l'une quelconque des valeurs de x qui annulent V, et ε un nombre positif infiniment petit) a la valeur $-\infty$, et pour $x = x_1 + \varepsilon$ la valeur $+\infty$, la fonction U oscille entre $+\infty$ et $-\infty$, avec passage brusque de $-\infty$ à $+\infty$.