Bulletin de la S. M. F.

A. Boulanger

Sur l’équation de la propagation de la chaleur

Bulletin de la S. M. F., tome 25 (1897), p. 11-15
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1897__25__11_0>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR L'ÉQUATION DE LA PROPAGATION DE LA CHALEUR;

Par M. A. Boulanger.

Considérons l'équation qui régit la propagation de la chaleur dans un corps, sous la forme

$$(1) \qquad \delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x_3^2} - \frac{\partial u}{\partial x_4} = 0.$$

Proposons-nous de *trouver tous les systèmes de quatre fonctions* $X_m (m = 1, 2, 3, 4)$ *des variables* $x_i (i = 1, 2, 3, 4)$ *et d'une fonction* F *de* U *et des variables* x_i, *telles que si l'on remplace les quantités* X_m *en fonction des variables* x_i *dans une solution quelconque* $U(X_1, X_2, X_3, X_4)$ *de l'équation*

$$(2) \qquad \delta' U = \frac{\partial^2 U}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial X_3^2} - \frac{\partial U}{\partial X_4} = 0,$$

la fonction $u(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv F(U, x_1, x_2, x_3, x_4)$, *ainsi obtenue, vérifie l'équation* (1) (1).

A cet effet, calculons le premier membre δu de l'équation (1) à l'aide de l'égalité $u(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv F(U, x_1, x_2, x_3, x_4)$. On a évidemment

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{\partial F}{\partial U}\frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial U^2}\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial U\,\partial x_i}\frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2},$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = \sum_{m=1}^{m=4} \frac{\partial U}{\partial X_m}\frac{\partial X_m}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} = \sum_{m=1}^{m=4} \frac{\partial^2 U}{\partial X_m^2}\left(\frac{\partial X_m}{\partial x_i}\right)^2 + \sum_{m,n=1}^{m,n=4} \frac{\partial^2 U}{\partial X_m\,\partial X_n}\frac{\partial X_m}{\partial x_i}\frac{\partial X_n}{\partial x_i} + \sum_{m=1}^{m=4} \frac{\partial U}{\partial X_m}\frac{\partial^2 X_m}{\partial x_i^2}$$

$$(i = 1, 2, 3, 4).$$

(1) M. Painlevé s'est posé cette question pour l'équation de Laplace $\Delta V = 0$, dans un Mémoire sur la *Transformation des fonctions* $V(x, y, z)$ *qui satisfont*

Posons maintenant

$$\left.\begin{aligned} h_m^2 &= \sum_{i=1}^{i=3} \left(\frac{\partial X_m}{\partial x_i}\right)^2 \\ k_{m,n} &= \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial X_m}{\partial x_i}\,\frac{\partial X_n}{\partial x_i} \end{aligned}\right\} \qquad (m, n = 1, 2, 3, 4).$$

Nous aurons de suite

$$\begin{aligned} \delta u = {} & \frac{\partial F}{\partial U}\left[\sum_{m=1}^{m=4}\left(h_m^2 \frac{\partial^2 U}{\partial X_m^2} + \frac{\partial U}{\partial X_m}\,\delta X_m\right) + \sum_{m,n=1}^{m,n=4} k_{mn} \frac{\partial^2 U}{\partial X_m\, \partial X_n}\right] \\ & + \frac{\partial^2 F}{\partial U^2}\left[\sum_{m=1}^{m=4} h_m^2 \left(\frac{\partial U}{\partial X_m}\right)^2 + \sum_{m,n=1}^{m,n=4} k_{m,n} \frac{\partial U}{\partial X_m}\,\frac{\partial U}{\partial X_n}\right] \\ & + 2\sum_{m=1}^{m=4} \frac{\partial U}{\partial X_m}\left[\sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial^2 F}{\partial U\, \partial x_i}\,\frac{\partial X_m}{\partial x_i}\right] + \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} - \frac{\partial F}{\partial x_4} \equiv \Phi. \end{aligned}$$

Il faut que cette quantité Φ s'annule identiquement si U est une solution de $\delta' U = 0$. Si donc on remplace dans Φ les x_i en fonction des X_i, on doit avoir identiquement

$$\Phi \equiv S\, \delta' U,$$

et, comme Φ gardera la même forme si l'on y conserve les variables x_i, il faut que l'expression ci-dessus de Φ soit de la forme $S\,\delta' U$. Cette condition nécessaire remplie, $\delta u = 0$ entraînera $\delta' U = 0$, et réciproquement.

Les conditions d'identification sont

(I) $\qquad h_1^2 = h_2^2 = h_3^2,$

(II) $\qquad h_4^2 = 0,$

(III) $\qquad k_{m,n} = 0 \qquad (m, n = 1, 2, 3, 4),$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial U^2} = 0.$$

Cette condition montre que F est une fonction linéaire de U,

$$F = AU + B,$$

à l'équation $\Delta V = 0$ (*Travaux des Facultés de Lille,* Mémoire n° I, 1889). M. Lacour, dans sa seconde Thèse, a traité un problème moins général pour l'équation de la propagation de la chaleur dans un plan; sa solution serait fort abrégée par le mode d'exposition indiqué ici.

A et B étant des fonctions des x_i. Les conditions suivantes s'écrivent alors

$$\text{(IV)} \qquad \frac{1}{2} A\, \delta X_m + \sum_{n=1}^{n=3} \frac{\partial A}{\partial x_n} \frac{\partial X_m}{\partial x_n} = 0 \qquad (m = 1, 2, 3),$$

$$\text{(V)} \qquad \frac{1}{2} A(\delta X_4 + h_1^2) + \sum_{n=1}^{n=3} \frac{\partial A}{\partial x_n} \frac{\partial X_4}{\partial x_n} = 0,$$

$$\delta A = 0, \qquad \delta B = 0.$$

On peut supposer B identiquement nul; en effet, si $AU + B$ répond au problème, AU y satisfait aussi.

Si l'on se limite au cas des fonctions réelles, la condition (II) montre que X_4 ne dépend que de x_4, en sorte que la condition (V) se réduit à

$$h_1^2 = \frac{\partial X_4}{\partial x_4},$$

et les conditions (III), où figure l'indice 4, sont identiquement vérifiées.

Considérons x_4 comme un paramètre; les conditions (I) et les conditions (III) restantes sont celles qui définissent la représentation conforme de l'espace avec proportionnalité des éléments linéaires, le coefficient de proportionnalité étant $H = \pm\sqrt{\frac{\partial X_4}{\partial x_4}}$. Les figures étant alors semblables peuvent être amenées à coïncider par un déplacement suivi d'une homothétie de rapport H. On a donc

$$X_m = p_m + H \sum_{i=1}^{i=3} \alpha_{mi} x_i \qquad (m = 1, 2, 3),$$

les coefficients α_{mi} étant les cosinus directeurs de trois directions rectangulaires et dépendant, ainsi que les coefficients p_m, du paramètre x_4.

Les conditions (IV) se réduisent évidemment à

$$\frac{\partial}{\partial X_m}(2H^2 \operatorname{Log} A) = \frac{\partial X_m}{\partial x_4} = p'_m + \sum_{i=1}^{i=3} (H\alpha_{mi})' x_i,$$

les accents désignant des dérivations par rapport à x_4. En remplaçant les x_i en fonction des X_i dans le second membre, il vient

$$(\mathrm{IV}^{bis})\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial}{\partial X_m}(2H^2 \operatorname{Log} A)=\dfrac{H'}{H}(X_m-p_m)+\displaystyle\sum_{i=1}^{i=3}\left[\alpha'_{mi}\sum_{n=1}^{n=3}\alpha_{ni}(X_n-p_n)\right]+p'_m\\ \qquad\qquad (m=1,2,3).\end{array}\right.$$

Je dis que les coefficients α sont constants. En effet, si l'on exprime que l'on a

$$\frac{\partial^2}{\partial X_m\,\partial X_n}(2H^2 \operatorname{Log} A)=\frac{\partial^2}{\partial X_n\,\partial X_m}(2H^2 \operatorname{Log} A),$$

il vient

$$\sum_{i=1}^{i=3}(\alpha'_{mi}\alpha_{ni}-\alpha_{mi}\alpha'_{ni})=0;$$

or la condition de perpendicularité des directions (α_n) et (α_m) donne

$$\sum_{i=1}^{i=3}(\alpha'_{mi}\alpha_{ni}+\alpha_{mi}\alpha'_{ni})=0.$$

Donc

$$\sum \alpha'_{mi}\alpha_{ni}=0 \qquad (m\neq n);$$

d'ailleurs

$$\sum \alpha'_{mi}\alpha_{mi}=0.$$

On a ainsi trois équations linéaires et homogènes en $\alpha'_{mi}(i=1, 2, 3)$ ayant pour déterminant 1. Donc $\alpha'_{mi}=0$. C. Q. F. D.

Cela posé, on a, d'après les relations (IV *bis*) simplifiées par le résultat précédent :

$$4H^2 \operatorname{Log} A=\frac{H'}{H}\sum_{m=1}^{m=3}(X_m-p_m)^2+2\sum_{m=1}^{m=3}p'_m X_m+\Psi(x_4),$$

ou, en revenant aux variables x_i,

$$\mu=\operatorname{Log} A=\frac{H'}{4H}\sum_{i=1}^{i=3}x_i^2+2\sum_{i=1}^{i=3}\left(x_i\sum_{m=1}^{m=3}\frac{p'_m\alpha_{mi}}{H}\right)+G(x_4).$$

Il reste à satisfaire identiquement à la dernière condition

$$\delta A=0 \qquad \text{ou} \qquad \sum_{i=1}^{i=3}\left[\left(\frac{\partial\mu}{\partial x_i}\right)^2+\frac{\partial^2\mu}{\partial x_i^2}\right]=\frac{\partial\mu}{\partial x_4}.$$

En annulant le coefficient de Σx_i^2 dans le résultat de la substitution, il vient

$$\left(\frac{H'}{H}\right)' - \left(\frac{H'}{H}\right)^2 = 0 \qquad \text{ou} \qquad H = \frac{k}{x_4 + c}.$$

En annulant le coefficient de x_i, on a

$$\left(\sum_m \frac{p'_m \alpha_{mi}}{H}\right)' - \frac{H' \sum_m p_m \alpha_{mi}}{H^2} = 0,$$

ou

$$\sum_{m=1}^{m=3} \frac{p'_m \alpha_{mi}}{H} = \frac{a_i H}{k}.$$

Les quantités k, c, a_i sont des constantes d'intégration. On déduit de là

$$p'_m = \frac{H^2}{k} \sum_{i=1}^{i=3} a_i \alpha_{mi},$$

ou

$$p_m = -\frac{k}{x_4 + c} \sum \alpha_{mi} a_1 + \text{const.}$$

Enfin, il reste

$$\frac{H'}{H} + \frac{H^2}{k^2} \sum a_i^2 - G'(x_4) = 0,$$

d'où

$$G(x_4) = \operatorname{Log} H - \frac{\Sigma a_i^2}{4(x_4 + c)} + \text{const.}$$

Réunissant les résultats obtenus, il vient

$$F = \frac{C}{x_4 + c} e^{-\frac{\Sigma (x_i - a_i)^2}{4(n_4 + c)}} U(X_1, X_2, X_3, X_4).$$

$$X_m = \frac{k}{x_4 + c} \sum_{i=1}^{i=3} \alpha_{mi}(x_i - a_i) + \text{const.} \qquad (m = 1, 2, 3),$$

$$X_4 = -\frac{k^2}{x_4 + c}.$$

On reconnaît une extension des formules données par M. Lacour.