Bulletin de la S. M. F.

F. Dumont

# Sur les surfaces du troisième ordre qui sont polaires d'elles-mêmes par rapport à une quadrique

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 25 (1897), p. 74-78
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1897__25__74_0>

# MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

## SUR LES SURFACES DU TROISIÈME ORDRE QUI SONT POLAIRES D'ELLES-MÊMES PAR RAPPORT A UNE QUADRIQUE;

Par M. F. Dumont.

Si l'on considère le tableau des vingt-trois classes de surfaces du troisième ordre (*voir* Salmon, *Géométrie analytique,* traduction Chemin), on voit que les seules surfaces à la fois de troisième ordre et de troisième classe sont : 1° les surfaces à trois binodes $B_3$ (¹) (notation Salmon); 2° les surfaces réglées.

Ces deux classes de surfaces sont donc les seules contenant des surfaces susceptibles de se reproduire elles-mêmes par une transformation dualistique. Considérons-les successivement.

### 1° *Surfaces à trois binodes* $B_3$.

Les trois biplans ont pour arêtes trois droites concourantes; soient BA, B′A, B″A ces trois droites, B, B′, B″ étant les trois binodes. Dans la figure transformée, chaque binode B a pour transformé un plan $b$, tel que toutes les tangentes qu'il contient passent par deux points P′, P″ transformés des plans $p'$, $p''$ du biplan relatif à B.

Les trois biplans ont deux à deux une face commune, donc les trois couples de points analogues à (P′, P″) ont deux à deux un point commun, c'est-à-dire que ces points P sont au nombre de trois seulement transformés des trois plans BAB′, B′AB″, B″AB et qu'ils sont dans un même plan $a$ transformé de A.

En résumé, la surface transformée possède trois points par chacun desquels passent une infinité de tangentes situées dans deux plans; les trois couples de plans se réduisent à trois plans. La surface a donc trois binodes comme la proposée, ce qui pouvait être affirmé *a priori*.

---

(¹) On rappellera ici que les binodes $B_3$ sont les points doubles, dont le cône tangent est dégénéré en deux plans dont l'ensemble constitue ce que l'on appelle le *biplan*, l'arête du biplan n'étant pas située sur la surface.

Prenons, pour tétraèdre de référence, le tétraèdre BB′B″A, l'équation de la surface du troisième ordre considérée a la forme

$$(1) \qquad xyt - mz^3 = 0.$$

Pour que la polaire réciproque de (1) par rapport à une quadrique puisse coïncider avec (1), il faut d'abord que le tétraèdre soit autopolaire par rapport à cette quadrique. Ainsi la quadrique doit avoir une équation de la forme

$$(2) \qquad px^2 + qy^2 + rz^2 + st^2 = 0.$$

En cherchant l'équation de la polaire réciproque de (1) par rapport à (2), on trouve

$$(3) \qquad xyz + \frac{r^3}{27\,mpqs}\,z^3 = 0.$$

Donc, si l'on a la condition

$$(4) \qquad \frac{r^3}{27pqs} = -\,m^2,$$

les surfaces (1) et (3) coïncident. Ainsi, pour une surface (1) donnée, on peut trouver une double infinité de quadriques par rapport auxquelles la surface (1) est autopolaire. Si la donnée est la quadrique (2) directrice de la transformation, à chaque tétraèdre autopolaire par rapport à cette quadrique correspondent deux surfaces cubiques autopolaires par rapport à la même quadrique (correspondant à deux valeurs égales et de signes contraires de $m$).

## 2° *Surfaces réglées.*

Les surfaces réglées cubiques sont réparties dans deux classes : 1° les surfaces à deux directrices rectilignes, l'une droite double, l'autre droite simple de la surface; 2° les surfaces à une directrice rectiligne droite double, mais sans directrice simple (surfaces de Cayley).

Considérons les surfaces à deux directrices et supposons ces directrices l'une et l'autre à distance finie.

Ces deux directrices sont interverties par la transformation. En effet, soient $d$ la directrice double, $s$ la directrice simple, $a$ et $b$ deux génératrices coupant $d$ au même point M, et $s$ aux points A et B. Le plan MAB, contenant MA, MB et la directrice simple, se transforme en un point par lequel passent les transformées de MA, de MB et de $s$, lesquelles transformées forment un trièdre puisque les trois premières droites forment un triangle. Au contraire, le trièdre $(d, a, b)$ a pour transformé un triangle dont un côté est fixe; savoir la transformée $s'$ de $d$. La surface transformée a donc deux directrices dont l'une $s'$ transformée de $d$ est droite simple, et l'autre $d'$ transformée de $s$ est droite double.

Prenons la directrice double $d$ pour arête $X = Y = 0$ du tétraèdre de référence, la directrice simple $s$ pour l'arête opposée $Z = T = 0$, et, en outre, deux génératrices de la surface, ne coupant pas $d$ au même point, pour arêtes opposées $X = Z = 0$ et $Y = T = 0$; l'équation de la surface proposée sera de la forme

$$\text{(1)} \qquad By^2z + Cx^2t + 2Exyz + 2Fxyt = 0.$$

Prenons pour quadrique directrice de la transformation

$$\text{(2)} \qquad mx^2 + ny^2 + pz^2 + qt^2 = 0.$$

L'équation de la surface polaire réciproque de (1) par rapport à (2) s'obtiendra en éliminant $x_0, y_0, z_0, t_0$ entre les équations

$$\text{(3)} \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{2Cx_0t_0 + 2Ey_0z_0 + 2Fy_0t_0}{mx} = \frac{2By_0z_0 + 2Ex_0z_0 + 2Fx_0t_0}{ny} \\ &\qquad = \frac{By_0^2 + 2Ex_0y_0}{pz} = \frac{Cx_0^2 + 2Fx_0y_0}{qt} \end{aligned} \right.$$

et

$$mx_0x + ny_0y + pz_0z + qt_0t = 0.$$

Éliminant d'abord $t_0$ et $z_0$, on arrive à l'équation

$$(mx_0x + ny_0y)(CEx_0^2 + BFy_0^2 + BCx_0y_0) = 0,$$

c'est-à-dire à

$$\text{(4)} \qquad CEx_0^2 + BFy_0^2 + BCx_0y_0 = 0$$

ou

$$\text{(5)} \qquad mx_0x + ny_0y = 0.$$

Les deux derniers rapports (3) donnent une équation en $x_0$ et $y_0$. L'élimination de $\frac{x_0}{y_0}$ entre cette équation et (4) donne une équation indépendante de $m$, $n$, qui n'est pas celle de la surface cherchée. L'élimination entre cette même équation et (5) donne

$$(6) \qquad Cpn^2y^2z - Bqm^2x^2t + 2Fpmnxyz - 2Eqmnxyt = 0,$$

équation de la même forme que (1).

Pour que les équations (1) et (6) représentent la même surface, il faut que les conditions suivantes soient remplies :

$$\frac{Cpn^2}{B} = -\frac{Bqm^2}{C} = \frac{E}{Fpmn} = \frac{F}{-Eqmn},$$

c'est-à-dire

$$\frac{p}{q} = -\frac{E^2}{F^2}, \qquad \frac{m}{n} = \frac{CE}{BF}.$$

La surface directrice a donc pour équation

$$CEx^2 + BFy^2 + K(E^2z^2 - F^2t^2) = 0,$$

K étant un paramètre arbitraire.

Considérons maintenant les surfaces réglées à plan directeur, pour lesquelles c'est la directrice simple qui est supposée transportée à l'infini. Prenons, en coordonnées cartésiennes, la directrice double, pour $Oz$, une des génératrices pour $Oy$, le plan de cette génératrice et de la directrice simple pour plan $z = 0$, le plan passant par $Oz$ qui contient celle des génératrices qui est à l'infini, pour $y = 0$, l'équation de la surface est

$$(1') \qquad by^2z + 2exyz + Cx^2 + 2fxy = 0.$$

Un calcul analogue au précédent montre que la transformée par rapport à la quadrique

$$Cex^2 + bfy^2 + Ke^2z^2 = Kf^2$$

coïncide avec la surface.

Considérons en troisième lieu les surfaces à plan directeur pour lesquelles la directrice double est à l'infini. Leur équation peut se ramener à la forme

$$(1'') \qquad az^2y + 2gzx + 2hzy + dx = 0,$$

et l'on trouve encore, par un calcul analogue, l'équation de la quadrique directrice de la transformation.

Si l'on considère maintenant une surface de Cayley, dont l'équation peut, comme, comme on sait, se réduire à

$$x^3 + 3y(2lxt + hyz) = 0$$

(en prenant la droite double pour axe $x = y = 0$ et celui des deux plans tangents passant par cette droite, qui est fixe, pour plan $y = 0$), on voit que la droite double $d$ étant la seule droite de la surface, autre que les génératrices, il faut, si la surface est autopolaire, que $d$ soit ou bien sa propre transformée, ou bien celle d'une génératrice $g$. Or, cette dernière hypothèse est à rejeter, car toute autre génératrice $g'$ aura une transformée $g'_1$ rencontrant $g$, puisque $g'$ coupe la droite double; mais $g'_1$ coupe aussi la droite double $d$. Ainsi $g'_1$, $g$ et $d$ seraient dans un même plan.

Il faut donc supposer que $d$ se transforme en elle-même. Or, pour cela, la quadrique directrice doit contenir $d$.

Les génératrices se transforment deux à deux, mais il y en a deux qui sont transformées d'elles-mêmes et qui, par conséquent, doivent aussi se trouver sur la quadrique directrice. Le calcul se dirigerait d'une manière analogue.