BULLETIN DE LA S. M. F.

A. DEMOULIN

Sur les surfaces qui présentent un réseau conjugué formé par des courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe tétraédral

Bulletin de la S. M. F., tome 25 (1897), p. 83-91

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1897__25__83_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1897, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LES SURFACES QUI PRÉSENTENT UN RÉSEAU CONJUGUÉ FORMÉ PAR DES COURBES DONT LES TANGENTES APPARTIENNENT A UN COMPLEXE TÉTRAÉDRAL;

Par M. A. Demoulin.

Dans un Mémoire intitulé : *Sur deux classes de surfaces analogues aux surfaces tétraédrales* (*Bulletin de la Société mathématique de France,* t. XXIV, p. 2), M. Raffy a posé et résolu le problème suivant :

Trouver toutes les surfaces représentées par les formules

$$x = \mathrm{U}_1(u)\mathrm{V}_1(v), \qquad y = \mathrm{U}_2(u)\mathrm{V}_2(v), \qquad z = \mathrm{U}_3(u)\mathrm{V}_3(v),$$

les fonctions U_i *et* V_i *étant telles que les courbes* $u =$ *const. et les courbes* $v =$ *const. forment un réseau conjugué.*

Les surfaces satisfaisantes peuvent être réparties en quatre classes définies respectivement par les équations

$$\text{(I)} \qquad x = \mathrm{U}_1\mathrm{V}_1, \qquad y = \mathrm{U}_2\mathrm{V}_1, \qquad z = \mathrm{V}_3;$$

$$\text{(II)} \qquad x = u^{m_1}v^{n_1}, \qquad y = u^{m_2}v^{n_2}, \qquad z = u^{m_3}v^{n_3};$$

$$\text{(III)} \qquad x = u^{m_1}e^{m_1\int\frac{g(v)dv}{v+m_1}}, \qquad y = u^{m_2}e^{m_2\int\frac{g(v)dv}{v+m_2}}, \qquad z = u^{m_3}e^{m_3\int\frac{g(v)dv}{v+m_3}};$$

$$\text{(IV)} \qquad \left\{\begin{aligned} \log x &= \int\frac{\mathrm{U}\,du}{u+a} + \int\frac{\mathrm{V}\,dv}{v+a}, \\ \log y &= \int\frac{\mathrm{U}\,du}{u+b} + \int\frac{\mathrm{V}\,dv}{v+b}, \\ \log z &= \int\frac{\mathrm{U}\,du}{u+c} + \int\frac{\mathrm{V}\,dv}{v+c}. \end{aligned}\right.$$

Les surfaces des trois dernières classes jouissent d'une propriété commune : les tangentes aux courbes $u =$ const. et aux courbes $v =$ const. appartiennent à un même complexe tétraédral dont le tétraèdre fondamental a pour faces les plans coordonnés et le plan de l'infini.

Je me propose de montrer que, réciproquement, *ces surfaces sont les seules qui présentent un réseau conjugué exclusivement formé de courbes dont les tangentes appartiennent à un même complexe tétraédral, l'une des faces du tétraèdre fondamental étant le plan de l'infini.*

J'indiquerai ensuite une nouvelle solution du problème de M. Raffy.

I.

Prenons pour plans coordonnés les faces du tétraèdre situées à distance finie. Les courbes dont les tangentes appartiennent au complexe tétraédral satisfont à l'équation

$$\alpha_1 x\,dy\,dz + \alpha_2 y\,dz\,dx + \alpha_3 z\,dx\,dy = 0,$$

α_1, α_3, α_3 étant trois constantes dont la somme est nulle.

Supposons que les coordonnées x, y, z de la surface cherchée soient exprimées en fonction des paramètres u et v du système conjugué. On a

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = \mathrm{A}\frac{\partial x}{\partial u} + \mathrm{B}\frac{\partial x}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} = \mathrm{A}\frac{\partial y}{\partial u} + \mathrm{B}\frac{\partial y}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} = \mathrm{A}\frac{\partial z}{\partial u} + \mathrm{B}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

La tangente aux lignes $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ appartenant au complexe tétraédral, on a, en outre,

$$\mathrm{S}\,\alpha_1 x\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial u} = \alpha_1 x\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial u} + \alpha_2 y\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} + \alpha_3 z\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u} = 0,$$

$$\mathrm{S}\,\alpha_1 x\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial v} = \alpha_1 x\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial v} + \alpha_2 y\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} + \alpha_3 z\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial v} = 0,$$

et le problème consiste à intégrer ce système de cinq équations aux inconnues x, y, z, A, B. A cet effet, posons

$$x' = \log x, \qquad y' = \log y, \qquad z' = \log z;$$

les équations ci-dessus deviendront

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 x'}{\partial u\,\partial v} = \mathrm{A}\dfrac{\partial x'}{\partial u} + \mathrm{B}\dfrac{\partial x'}{\partial v} + \dfrac{\partial x'}{\partial u}\dfrac{\partial x'}{\partial v}, \\[2ex] \dfrac{\partial^2 y'}{\partial u\,\partial v} = \mathrm{A}\dfrac{\partial y'}{\partial u} + \mathrm{B}\dfrac{\partial y'}{\partial v} + \dfrac{\partial y'}{\partial u}\dfrac{\partial y'}{\partial v}, \\[2ex] \dfrac{\partial^2 z'}{\partial u\,\partial v} = \mathrm{A}\dfrac{\partial z'}{\partial u} + \mathrm{B}\dfrac{\partial z'}{\partial v} + \dfrac{\partial z'}{\partial u}\dfrac{\partial z'}{\partial v}, \end{cases}$$

$$(2)\qquad \mathrm{S}\frac{\alpha_1}{\dfrac{\partial x'}{\partial u}} = 0, \qquad \mathrm{S}\frac{\alpha_1}{\dfrac{\partial x'}{\partial v}} = 0.$$

Des deux dernières, on déduit, par différentiation,

$$(3)\qquad \mathrm{S}\frac{\alpha_1\dfrac{\partial^2 x'}{\partial u\,\partial v}}{\left(\dfrac{\partial x'}{\partial u}\right)^2} = 0, \qquad \mathrm{S}\frac{\alpha_1\dfrac{\partial^2 x'}{\partial u\,\partial v}}{\left(\dfrac{\partial x'}{\partial v}\right)^2} = 0.$$

Multiplions les équations (1) par $\dfrac{\alpha_1}{\dfrac{\partial x'}{\partial u}\dfrac{\partial x'}{\partial v}}$, $\dfrac{\alpha_2}{\dfrac{\partial y'}{\partial u}\dfrac{\partial y'}{\partial v}}$, $\dfrac{\alpha_3}{\dfrac{\partial z'}{\partial u}\dfrac{\partial z'}{\partial v}}$, respectivement et additionnons les équations obtenues; il viendra, en tenant compte des équations (2) et de la relation $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$,

$$(4)\qquad \mathrm{S}\,\alpha_1\frac{\dfrac{\partial^2 x'}{\partial u\,\partial v}}{\dfrac{\partial x'}{\partial u}\dfrac{\partial x'}{\partial v}} = 0.$$

Les équations (3) et (4) constituent un système de trois équations linéaires homogènes aux inconnues $\alpha_1\dfrac{\partial^2 x'}{\partial u\,\partial v}$, $\alpha_2\dfrac{\partial^2 y'}{\partial u\,\partial v}$, $\alpha_3\dfrac{\partial^2 z'}{\partial u\,\partial v}$. Or, on s'en assurera aisément, le déterminant des coefficients des inconnues n'est nul que si la surface cherchée est un cylindre dont les génératrices sont parallèles à l'un des axes coordonnés. Écartant cette solution évidente, on peut remplacer les équations (3) et (4) par les suivantes :

$$\frac{\partial^2 x'}{\partial u\,\partial v} = 0, \qquad \frac{\partial^2 y'}{\partial u\,\partial v} = 0, \qquad \frac{\partial^2 z'}{\partial u\,\partial v} = 0,$$

lesquelles donnent, par intégration,

$$(5)\qquad \begin{cases} x' = U_1 + V_1, \\ y' = U_2 + V_2, \\ z' = U_3 + V_3, \end{cases}$$

U_1, U_2, U_3 désignant des fonctions arbitraires de u, et V_1, V_2, V_3 des fonctions arbitraires de v.

Portons ces valeurs de x', y', z' dans les équations (1), il viendra

$$\frac{A}{U'_1} + \frac{B}{V'_1} + 1 = 0,$$
$$\frac{A}{U'_2} + \frac{B}{V'_2} + 1 = 0,$$
$$\frac{A}{U'_3} + \frac{B}{V'_3} + 1 = 0,$$

d'où, par élimination,

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} \frac{1}{U'_1} & \frac{1}{V'_1} & 1 \\ \frac{1}{U'_2} & \frac{1}{V'_2} & 1 \\ \frac{1}{U'_3} & \frac{1}{V'_3} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Quant aux équations (2), elles deviennent

$$(7)\qquad \mathrm{S}\frac{\alpha_1}{U'_1} = 0, \qquad \mathrm{S}\frac{\alpha_1}{V'_1} = 0,$$

et l'on est ramené à l'intégration des équations (6) et (7).

Or, l'équation (6) est une conséquence des équations (7), jointes à la condition $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$. Il suffira donc de s'occuper de ces dernières.

Ces équations sont susceptibles d'une interprétation géométrique qui facilitera la discussion. Si l'on se reporte, en effet, aux équations (5), on reconnaît que le problème actuel revient à la détermination de la surface de translation, lieu des milieux des cordes dont les extrémités s'appuient sur deux lignes (U) et (V) respectivement définies par les équations

$$x' = 2U_1, \qquad y' = 2U_2, \qquad z' = 2U_3,$$
$$x' = 2V_1, \qquad y' = 2V_2, \qquad z' = 2V_3,$$

les tangentes à ces lignes étant parallèles aux génératrices du cône

$$\mathrm{S}\frac{\alpha_1}{x'} = 0.$$

Cela posé, on peut prendre pour (U) et (V) des droites, ou bien, pour (U) une droite et pour (V) une courbe proprement dite, ou enfin, pour (U) et (V) des courbes proprement dites.

Examinons successivement chacun de ces trois cas.

I. (U) *et* (V) *sont des droites.*

Soient

$$\begin{cases} U_1 = m_1 \log u + \mu_1, \\ U_2 = m_2 \log u + \mu_2, \\ U_3 = m_3 \log u + \mu_3, \end{cases} \qquad \begin{cases} V_1 = n_1 \log v + \nu_1, \\ V_2 = n_2 \log v + \nu_2, \\ V_3 = n_3 \log v + \nu_3 \end{cases}$$

les demi-coordonnées des droites (U) et (V). Ces droites étant parallèles à deux génératrices du cône $\mathrm{S}\frac{\alpha_1}{x'} = 0$, on a

$$(8) \qquad \begin{cases} \dfrac{\alpha_1}{m_1} + \dfrac{\alpha_2}{m_2} + \dfrac{\alpha_3}{m_3} = 0, \\[2ex] \dfrac{\alpha_1}{n_1} + \dfrac{\alpha_2}{n_2} + \dfrac{\alpha_3}{n_3} = 0. \end{cases}$$

La surface de translation correspondante est le plan

$$x' = m_1 \log u + n_1 \log v + \mu_1 + \nu_1,$$
$$y' = m_2 \log u + n_2 \log v + \mu_2 + \nu_2,$$
$$z' = m_3 \log u + n_3 \log v + \mu_3 + \nu_3,$$

et la surface cherchée a pour coordonnées

$$x = p_1 u^{m_1} v^{n_1}, \qquad y = p_2 u^{m_2} v^{n_2}, \qquad z = p_3 u^{m_3} v^{n_3},$$

p_1, p_2, p_3 désignant trois constantes arbitraires. On reconnaît les surfaces de la *deuxième classe*. Ces surfaces peuvent être représentées par l'équation

$$(9) \qquad x^A y^B z^C = D,$$

A, B, C, D étant arbitraires. Il suffira, en effet, de déterminer les constantes m_1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3 par les équations (8), auxquelles on adjoindra les suivantes :

$$\begin{aligned} A m_1 + B m_2 + C m_3 &= 0, \\ A n_1 + B n_2 + C n_3 &= 0. \end{aligned}$$

D'après l'énoncé même du problème dont la surface (9) est une solution, les lignes $u =$ const. et $v =$ const. constituent un système conjugué, et leurs tangentes appartiennent au complexe tétraédral défini par les constantes α_1, α_2, α_3 ; mais il y a plus : à chacun des complexes tétraédraux, en nombre simplement infini, qui ont même tétraèdre fondamental que le complexe donné, il correspond sur la surface un tel système conjugué. Parmi ces systèmes conjugués, il y en a deux formés par les lignes asymptotiques de l'un ou l'autre système.

II. (U) *est une droite et* (V) *une courbe proprement dite.*

Soient

$$\begin{aligned} U_1 &= m_1 \log u + \mu_1, \\ U_2 &= m_2 \log u + \mu_2, \\ U_3 &= m_3 \log u + \mu_3, \end{aligned}$$

les expressions des demi-coordonnées de la droite (U). Exprimons qu'elle est parallèle à l'une des génératrices du cône $\mathbf{S}\frac{\alpha_1}{x'} = 0$. Il viendra

$$\frac{\alpha_1}{m_1} + \frac{\alpha_2}{m_2} + \frac{\alpha_3}{m_3} = 0.$$

Cette équation, rapprochée de la condition

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0,$$

montre que l'on peut prendre pour α_1, α_2, α_3 les quantités

$$m_1(m_2 - m_3), \quad m_2(m_3 - m_1), \quad m_3(m_1 - m_2),$$

en sorte que l'équation du cône s'écrive

$$\mathbf{S}\frac{m_1(m_2 - m_3)}{x'} = 0.$$

Les tangentes de la courbe (V) seront parallèles aux génératrices de ce cône, si l'on a

$$\mathrm{S}\,\frac{m_1(m_2-m_3)}{\mathrm{V}'_1}=0.$$

On satisfait de la manière la plus générale à cette équation en posant

$$\mathrm{V}'_1=\frac{m_1}{m_1+v}g(v),$$

$$\mathrm{V}'_2=\frac{m_2}{m_2+v}g(v),$$

$$\mathrm{V}'_3=\frac{m_3}{m_3+v}g(v),$$

$g(v)$ étant une fonction arbitraire de son argument.

On déduit de là les coordonnées de la surface cherchée :

$$x=u^{m_1}e^{m_1\int\frac{g(v)dv}{v+m_1}},\qquad y=u^{m_2}e^{m_2\int\frac{g(v)dv}{v+m_2}},\qquad z=u^{m_3}e^{m_3\int\frac{g(v)dv}{v+m_3}}.$$

Ces équations définissent les surfaces de la *troisième classe*.

III. (U) *et* (V) *sont des courbes proprement dites.*

Écrivons l'équation du cône de la manière suivante :

$$\frac{b-c}{x'}+\frac{c-a}{y'}+\frac{a-b}{z'}=0.$$

Les tangentes aux courbes (U) et (V) étant parallèles aux génératrices de ce cône, on a

$$\frac{b-c}{\mathrm{U}'_1}+\frac{c-a}{\mathrm{U}'_2}+\frac{a-b}{\mathrm{U}'_3}=0,$$

$$\frac{b-c}{\mathrm{V}'_1}+\frac{c-a}{\mathrm{V}'_2}+\frac{a-b}{\mathrm{V}'_3}=0.$$

La solution la plus générale de ces équations est donnée par les formules

$$\mathrm{U}'_1=\frac{\mathrm{U}}{u+a},\qquad \mathrm{V}'_1=\frac{\mathrm{V}}{v+a},$$

$$\mathrm{U}'_2=\frac{\mathrm{U}}{u+b},\qquad \mathrm{V}'_2=\frac{\mathrm{V}}{v+b},$$

$$\mathrm{U}'_3=\frac{\mathrm{U}}{u+c},\qquad \mathrm{V}'_3=\frac{\mathrm{V}}{v+c}.$$

On en conclut les équations des surfaces de la *quatrième classe*

$$\log x = \int \frac{U}{u+a}\,du + \int \frac{V}{v+a}\,dv,$$

$$\log y = \int \frac{U}{u+b}\,du + \int \frac{V}{v+b}\,dv,$$

$$\log z = \int \frac{U}{u+c}\,du + \int \frac{V}{v+c}\,dv.$$

Le problème que nous venons de résoudre a été posé pour la première fois par M. Sophus Lie. D'après l'illustre auteur (¹), les surfaces de la quatrième classe constitueraient la solution la plus générale de la question. On vient de voir qu'à ces surfaces il faut joindre les surfaces de la deuxième classe, connues depuis longtemps, et les surfaces de la troisième classe, découvertes par M. Raffy à l'occasion du problème rappelé au début de ce travail.

II.

Il y a peu de chose à ajouter aux calculs qui précèdent pour obtenir une nouvelle solution du problème de M. Raffy.

Soit à chercher les surfaces définies par les équations

$$x = U_1V_1, \qquad y = U_2V_2, \qquad z = U_3V_3,$$

les lignes $u =$ const. et $v =$ const. formant un système conjugué.

Après avoir considéré le cas où la dérivée de l'une des six fonctions U_i, V_k serait nulle, ce qui le conduit aux surfaces de la première classe, M. Raffy est amené à intégrer l'équation

$$\begin{vmatrix} \dfrac{U_1}{U_1'} & \dfrac{V_1}{V_1'} & 1 \\ \dfrac{U_2}{U_2'} & \dfrac{V_2}{V_2'} & 1 \\ \dfrac{U_3}{U_3'} & \dfrac{V_3}{V_3'} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

(¹) *Geometrie der Berührungstransformationen*, p. 384.

qui peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{(\log U_1)'} & \frac{1}{(\log V_1)'} & 1 \\ \frac{1}{(\log U_2)'} & \frac{1}{(\log V_2)'} & 1 \\ \frac{1}{(\log U_3)'} & \frac{1}{(\log V_3)'} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

De cette équation, on déduit

$$a_1 + a_2 + a_3 = 0, \tag{10}$$

$$\frac{a_1}{(\log U_1)'} + \frac{a_2}{(\log U_2)'} + \frac{a_3}{(\log U_3)'} = 0, \tag{11}$$

$$\frac{a_1}{(\log V_1)'} + \frac{a_2}{(\log V_2)'} + \frac{a_3}{(\log V_3)'} = 0. \tag{12}$$

Je dis que les rapports mutuels des fonctions a_1, a_2, a_3 sont constants.

En effet, les équations (10) et (11) donnent

$$(a_1 + a_2)\frac{1}{(\log U_3)'} = \frac{a_1}{(\log U_1)'} + \frac{a_2}{(\log U_2)'},$$

d'où

$$\frac{a_1}{a_2} = \text{fonction de } u.$$

De même, de (10) et (12) on conclut que $\frac{a_1}{a_2}$ est une fonction de v. Le rapport $\frac{a_1}{a_2}$ est donc constant, et il en est de même du rapport $\frac{a_1}{a_3}$.

On a donc, a_1, a_2, a_3 désignant des constantes,

$$\mathrm{S}\frac{a_1}{(\log U_1)'} = 0, \qquad \mathrm{S}\frac{a_1}{(\log V_1)'} = 0, \qquad \mathrm{S}\, a_1 = 0,$$

et, de ces équations, on déduira, comme ci-dessus, les surfaces des trois dernières classes.