C. BOURLET

Sur les transmutations

Bulletin de la S. M. F., tome 25 (1897), p. 132-140
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1897__25__132_0>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR LES TRANSMUTATIONS;

Par M. C. Bourlet.

J'ai étudié, dans un récent Mémoire (1), une catégorie très générale d'opérations que j'ai nommées *transmutations*. Je vais, dans cette petite Note, indiquer quelques nouvelles propositions sur ce sujet; mais je tiens, auparavant, à réparer une omission bien involontaire que j'ai faite en ne citant pas, dans cette étude, les travaux de MM. Pincherle et Calò dont je n'avais pas eu connaissance.

Je dis qu'on a défini une transmutation à n variables dès qu'on a donné un moyen de faire correspondre à toute fonction de n variables une autre fonction des mêmes variables. J'ai, dans le Mémoire précité, recherché la forme générale de toutes les transmutations telles qu'il existe une relation donnée entre les transmuées de trois fonctions $\pi(u, v)$, $\pi_1, (u, v)$, $\pi_2, (u, v)$; π, π_1, π_2 étant trois composantes *données* et u et v deux fonctions arbitraires.

Cette recherche, comme je l'ai montré, se ramène à la détermination de la forme générale de toutes les transmutations qui sont telles que l'on ait

$$\mathfrak{T}(u+v) = \mathfrak{T}u + \mathfrak{T}v,$$

$\mathfrak{T}u$ désignant la transmuée de u; transmutations que je nomme *additives*. Or, à mon insu, les propriétés générales de ces opérations additives avaient déjà été établies par M. Pincherle, professeur à l'Université de Bologne, pour le cas d'une seule variable (2), puis étendues par M. Calò, au cas de plusieurs variables (3). J'ai donc retrouvé ces propriétés, déjà connues, et, en particulier, le fait intéressant que toute transmutation additive, uniforme, con-

(1) Voir *Annales de l'École Normale supérieure*, avril-mai 1897.

(2) S. Pincherle, *Acta Mathematica*, t. X, p. 153-182, et *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, 17 février 1895.

(3) Calò, *Rendiconti della R. Acc. dei Lincei*, t. IV, 2e sem., p. 52; 1895.

tinue et régulière, peut être représentée par une série de la forme

$$(1)\qquad \mathfrak{T}u = \sum a_{k_1 k_2 \ldots k_n} \frac{\partial^{k_1+k_2+\ldots+k_n} u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_n^{k_n}}.$$

Mais la voie que j'ai suivie étant différente de celle de mes prédécesseurs, je suis parvenu à une expression générale des coefficients $a_{k_1 k_2 \ldots k_n}$ nouvelle qui, dans les applications pratiques, me paraît d'un maniement plus commode. L'application, que j'ai faite, de ces résultats à la dérivée d'indice fractionnaire ou négatif avait déjà été faite par M. Pincherle dans le cas particulier où cet indice est un nombre entier négatif (1). J'ai, ensuite, introduit, dans cette étude, la notion de *fonction opérative* qui est la fonction suivante, formée avec les coefficients de la série (1) :

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n; z_1, z_2, \ldots, z_n) = \sum a_{k_1 k_2 \ldots k_n} z_1^{k_1} z_2^{k_2} \ldots z_n^{k_n}.$$

Cette notion m'a permis de donner une règle simple pour distinguer à laquelle des deux catégories de transmutations, déjà signalées par M. Pincherle (2), appartient une transmutation donnée. Les applications, que l'on peut faire, de cette fonction opérative et les considérations sur l'intégration des équations différentielles linéaires *d'ordre infini,* qui terminent mon Mémoire, me sont personnelles, à ce que je crois du moins.

J'ajouterai, pour clore cette introduction, qu'outre les quatre Mémoires que je viens de signaler et qui contiennent de nombreux points communs avec mes travaux, M. Pincherle a publié cinq autres Mémoires sur les propriétés et les applications des transmutations additives qu'il nomme *opérations fonctionnelles distributives* (3).

---

(1) *Rendiconti d. R. Acc. dei Lincei,* 12 avril 1896.

(2) PINCHERLE, *Della validita effectiva di alcuni sviluppi in serie di funzioni.* (*Rendiconti d. R. Acc. dei Lincei;* 1896.)

(3) S. PINCHERLE, *Sulle operazioni distributive commutabili con una operazione data.* (*Accad. R. d. Sc. di Torino;* 1895.) — *Le op. distrib. e le omografie.* (*R. C. del. r. Ist. Lomb. di Sc. et Lett.,* serie II, t. XXIX; 1896.) — *Op. distrib. le equazioni differenziali lineari non omogena.* (*R. C. d. R. Accad. dei Lincei,* 29 avril 1896.)— *Sulle equazioni diff. lineari non omogena.* (*R. Accad. delle Sc. d. Ist. di Bologna;* 1896.) — *Genno sulla geometria dello spazio funzionale.* (*R. Acc. d. Ist. di Bologna,* 14 février 1897.)

I.

J'ai, comme je viens de le dire, déterminé la forme générale de toutes les transmutations telles qu'il existe, quelles que soient les fonctions u et v, une relation *donnée* entre les transmuées de trois fonctions composées $\pi(u, v)$, $\pi_1(u, v)$, $\pi_2(u, v)$. Une question qui se pose, alors, naturellement, est celle-ci :

Existe-t-il une transmutation $\mathfrak{T}$ telle que l'on ait, à la fois, quelles que soient les fonctions régulières u et v, les deux relations

$$\mathfrak{T}[\pi(u, v)] = \varphi\left\{\mathfrak{T}[\pi_1(u, v)], \mathfrak{T}[\pi_2(u, v)]\right\},$$
$$\mathfrak{T}[\psi(u, v)] = \chi\left\{\mathfrak{T}[\psi_1(u, v)], \mathfrak{T}[\psi_2(u, v)]\right\},$$

π, π_1, π_2, ψ, ψ_1, ψ_2, φ *et* χ ***étant des fonctions données?*** ($\mathfrak{T}u$ désigne la transmuée de u).

Comme je l'ai démontré ([1]) on peut toujours ramener une des deux relations à avoir la forme simple

$$(1) \qquad \mathfrak{T}(u + v) = \mathfrak{T}u + \mathfrak{T}v.$$

J'ai nommé transmutations *additives* celles qui vérifient la relation (1) et, par suite, le problème précédent se ramène toujours à celui-ci :

Déterminer toutes les transmutations additives qui vérifient, en outre, une relation donnée telle que

$$(2) \qquad \mathfrak{T}[\pi(u, v)] = \varphi\left\{\mathfrak{T}[\pi_1(u, v)], \mathfrak{T}[\pi_2(u, v)]\right\},$$

quelles que soient les fonctions u et v.

Ce problème, ainsi posé, n'admet pas en général de solution, c'est-à-dire qu'***étant données, au hasard, deux relations de la forme*** (2), ***il n'existe pas, en général, de transmutation vérifiant à la fois ces deux relations.***

Pour le prouver, il me suffira d'examiner un cas particulier. Je choisis celui où la relation (2) est de la forme

$$(3) \qquad \mathfrak{T}uv = \varphi(\mathfrak{T}u, \mathfrak{T}v),$$

([1]) *Loc. cit.*, p. 141 et note, p. 189.

et je vais montrer que la fonction φ ne saurait être arbitraire. D'abord, la fonction φ devra être *indéfiniment symétrique* (¹) si, comme je l'explique dans mon Mémoire (p. 138), on écarte les transmutations banales qui font correspondre à toute fonction u la *même* fonction fixe. On peut alors, d'après une proposition d'Abel (²), trouver une fonction $\psi(z)$, d'une seule variable, telle que la relation (3) se mette sous la forme

$$\psi(\mathfrak{T}uv) = \psi(\mathfrak{T}u)\,\psi(\mathfrak{T}v). \tag{4}$$

D'autre part, C désignant une constante arbitraire, réelle ou imaginaire, on déduit de la relation (1) celle-ci (³) :

$$\mathfrak{T}\mathrm{C}u = \mathrm{C}\mathfrak{T}u;$$

on devra donc avoir

$$\psi(\mathrm{C}\mathfrak{T}u) = \psi(\mathfrak{T}u)\,\psi(\mathfrak{T}\mathrm{C}).$$

Il en résulte que la fonction $\psi(z)$ devra vérifier la relation

$$\psi(\mathrm{C}z) = \psi(z)\,\psi(\mathfrak{T}\mathrm{C});$$

on en déduit, en posant

$$\frac{d}{dz}\log[\psi(z)] = \mathrm{F}(z),$$
$$\mathrm{CF}(\mathrm{C}z) = \mathrm{F}(z).$$

(¹) Je dis qu'une fonction $\varphi(x, y)$ est indéfiniment symétrique, lorsqu'elle est non seulement symétrique, mais encore lorsque $\varphi[x, \varphi(y, z)]$ est aussi une fonction symétrique des trois variables x, y, z.

(²) *Loc. cit.*, p. 139.

(³) *Loc. cit.*, p. 146. Je ferai remarquer, à propos de cette relation, que M. Pincherle, et à sa suite M. Calò, la considèrent comme une conséquence *évidente* de la relation fondamentale

$$\mathfrak{T}(u+v) = \mathfrak{T}u + \mathfrak{T}v.$$

C'est effectivement vrai lorsque C est une constante *réelle;* mais cela me paraît beaucoup moins intuitif lorsque C est *imaginaire* et j'ai cru utile, dans mon Mémoire, d'en donner une démonstration précise.

De là, enfin, on conclut que

$$F(z) = \frac{a}{z},$$

a étant une constante et, par suite, que

$$\psi(z) = bz^a,$$

b étant une nouvelle constante. Pour que la relation (4) soit compatible avec la relation (1) il faut donc qu'elle soit de la forme

$$(\mathfrak{E}uv)^a = b(\mathfrak{E}u)^a(\mathfrak{E}v)^a.$$

La relation (3) doit donc avoir, à son tour, la forme

$$(5) \qquad \mathfrak{E}uv = k\,\mathfrak{E}u\,\mathfrak{E}v,$$

k étant une constante (ou une fonction *donnée*).

La fonction φ ne peut donc, comme je l'avais annoncé, être arbitraire.

Il nous reste à trouver toutes les transmutations vérifiant les relations (1) et (5). En remplaçant $\mathfrak{E}u$ par $\frac{1}{k}\,\mathfrak{E}u$, la relation (5) prend la forme plus simple

$$(6) \qquad \mathfrak{E}uv = \mathfrak{E}u\,\mathfrak{E}v,$$

et, en dernière analyse, je suis conduit à *chercher toutes les transmutations additives telles que la transmuée d'un produit soit le produit des transmuées des deux facteurs.*

Or, de la relation (6), on déduit immédiatement celle-ci :

$$\mathfrak{E}u_1^{k_1}u_2^{k_2}\ldots u_n^{k_n} = (\mathfrak{E}u_1)^{k_1}(\mathfrak{E}u_2)^{k_2}\ldots(\mathfrak{E}u_n)^{k_n},$$

$u_1, u_2, \ldots, u_n$ étant n fonctions arbitraires et $k_1\, k_2, \ldots, k_n$ des exposants entiers positifs. Supposons alors que la transmutation $\mathfrak{E}$ soit une transmutation à n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et prenons

$$u_1 = x_1, \qquad u_2 = x_2, \qquad \ldots, \qquad u_n = x_n.$$

Posons, en outre,

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}x_1 &= \omega_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \mathfrak{E}x_2 &= \omega_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathfrak{E}x_n &= \omega_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{aligned}$$

on aura

$$\mathfrak{T}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n} = (\omega_1)^{k_1}(\omega_2)^{k_2}\ldots(\omega_n)^{k_n}.$$

D'ailleurs, comme je l'ai montré (¹), une transmutation additive, uniforme, régulière et continue, est parfaitement définie dès qu'on connaît les transmuées de toutes les expressions de la forme $x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}$ pour toutes les valeurs possibles entières, positives ou nulles, des exposants $k_1, k_2, \ldots, k_n$. La transmutation cherchée est donc ainsi parfaitement définie et ce n'est autre chose, en vertu des conclusions de mon Mémoire, que la transmutation qui consiste à faire la *substitution* de $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, respectivement à $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Nous arrivons donc à la proposition intéressante que voici :

Théorème. — *La substitution (ou changement de variables) est, à un multiplicateur près, la seule transmutation additive, uniforme et régulière, qui est telle que la transmuée du produit de deux fonctions quelconques puisse s'exprimer au moyen des transmuées de ces deux fonctions* (²).

II.

Dans ce qui précède, je n'ai parlé que de la recherche de transmutations vérifiant deux relations dont chacune ne contient que des transmuées de deux fonctions arbitraires u et v ou de fonctions composées de celles-ci. Il est clair qu'on pourrait se poser des problèmes plus généraux en se donnant des relations qui contiendraient, en outre, les fonctions u et v elles-mêmes. J'ai, dans la Préface du Mémoire dont je parle, indiqué, sans démonstration, deux relations qui suffisent pour caractériser la dérivation; je vais, pour donner un exemple de ce nouveau genre de questions, développer ici ce point.

(¹) *Loc. cit.*, p. 187.

(²) M. Pincherle (*Rendiconti d. R. Acc. dei Lincei*, 17 février 1895) avait déjà démontré que la substitution est la seule transmutation additive telle que l'on ait, en outre,

$$\mathfrak{T}uv = \mathfrak{T}u\,\mathfrak{T}v;$$

le résultat auquel je parviens est, on le voit, beaucoup plus général. Dans une Note plus récente (2 mai 1897), M. Pincherle a recherché les transmutations additives qui admettent un théorème de multiplication d'une forme particulière.

THÉORÈME. — *La seule transmutation additive, uniforme, continue et régulière, $\mathfrak{T}$, telle que l'on ait, quelles que soient les fonctions régulières u et v, la relation*

$$(7) \qquad \mathfrak{T}uv = v\mathfrak{T}u + u\mathfrak{T}v,$$

est celle qui est définie par une égalité de la forme

$$\mathfrak{T}u = \omega_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \omega_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + \omega_n \frac{\partial u}{\partial x_n},$$

$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ *étant n fonctions déterminées.*

Soit, en effet, C une constante arbitraire, la relation (7) donne

$$\mathfrak{T}Cu = C\mathfrak{T}u + u\mathfrak{T}C.$$

D'autre part, puisque la transmutation est additive, on a

$$\mathfrak{T}Cu = C\mathfrak{T}u,$$

et, de ces deux relations combinées, on conclut, d'abord, que l'on doit avoir, quelle que soit la constante C,

$$(8) \qquad \mathfrak{T}C = 0.$$

De la relation (7), répétée plusieurs fois, on déduit aisément celle-ci :

$$(9) \qquad \mathfrak{T}u_1 u_2 \ldots u_{i-1} u_i u_{i+1} \ldots u_p = \sum_{i=1}^{i=p} u_1 u_2 \ldots u_{i-1} u_{i+1} \ldots u_p \mathfrak{T}u_i,$$

$u_1, u_2, \ldots, u_p$ étant p fonctions arbitaires des n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. En prenant d'abord

$$u_1 = u_2 = \ldots = u_p = x_h,$$

on en conclut

$$\mathfrak{T}x_h^p = p x_h^{p-1} \mathfrak{T}x_h;$$

puis, plus généralement,

$$\mathfrak{T}x_1^{k_1} \ldots x_{i-1}^{k_{i-1}} x_i^{k_i} x_{i+1}^{k_{i+1}} \ldots x_n^{k_n} = \sum_{i=1}^{i=n} k_i x_1^{k_1} \ldots x_{i-1}^{k_{i-1}} x_i^{k_i - 1} x_{i+1}^{k_{i+1}} \ldots x_n^{k_n} \mathfrak{T}x_i.$$

En d'autres termes, si l'on pose

$$u = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n},$$

$k_1, k_2, \ldots, k_n$ étant des entiers positifs ou nuls, on a

$$(10) \qquad \mathfrak{G} u = \frac{\partial u}{\partial x_1} \mathfrak{G} x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \mathfrak{G} x_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \mathfrak{G} x_n.$$

Soit, alors, $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un polynôme entier en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, la transmutation $\mathfrak{G}$ étant additive, la transmuée du polynôme P sera la somme des transmuées de chacun de ses termes; en appliquant à ces termes les relations (8) et (10) et en tenant compte de la relation

$$\mathfrak{G} C u = C \mathfrak{G} u,$$

on en conclut que l'on a

$$\mathfrak{G} P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\partial P}{\partial x_1} \mathfrak{G} x_1 + \frac{\partial P}{\partial x_2} \mathfrak{G} x_2 + \ldots + \frac{\partial P}{\partial x_n} \mathfrak{G} x_n.$$

Ceci posé, soit $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une fonction régulière dans le voisinage du point $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$, c'est-à-dire une fonction développable, dans le voisinage de ce point, en une série ordonnée suivant les puissances croissantes, entières et positives, de $x_1 - x_1^0$, $x_2 - x_2^0, \ldots, x_n - x_n^0$. Désignons par $\varphi_p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ le polynôme entier de degré p obtenu en arrêtant le développement aux termes de degré p, on aura, d'après ce que je viens de dire,

$$(11) \qquad \mathfrak{G} \varphi_p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_1} \mathfrak{G} x_1 + \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_2} \mathfrak{G} x_2 + \ldots + \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_n} \mathfrak{G} x_n.$$

Faisons croître p indéfiniment : φ_p aura pour limite u; $\frac{\partial \varphi_p}{\partial x_1}$, $\frac{\partial \varphi_p}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_n}$ auront, respectivement, pour limites $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}$. La transmutation $\mathfrak{G}$ étant, par hypothèse, continue [1], on aura aussi

$$\lim(\mathfrak{G} \varphi_p) = \mathfrak{G} \lim(\varphi_p) = \mathfrak{G} u,$$

et l'égalité (11) devient, à la limite,

$$(12) \qquad \mathfrak{G} u = \frac{\partial u}{\partial x_1} \mathfrak{G} x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \mathfrak{G} x_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \mathfrak{G} x_n,$$

qui a la forme indiquée dans l'énoncé.

---

[1] *Loc. cit.*, p. 136.

Lorsque $\mathfrak{T}x_1, \mathfrak{T}x_2, \ldots, \mathfrak{T}x_n$ sont des constantes arbitraires, cette égalité ne diffère de celle qui donne la différentielle totale de u que par la notation. Si donc on convient de désigner la transmutation particulière dont il s'agit par le symbole d, au lieu de $\mathfrak{T}$, l'égalité (12) s'écrit

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n.$$

Dans le cas d'une transmutation à une seule variable x, on a

$$\mathfrak{T}u = \frac{du}{dx} \mathfrak{T}x,$$

ce qui montre que la transmutation est une dérivation, à un facteur $(\mathfrak{T}x)$ près.