BULLETIN DE LA S. M. F.

M. PETROVITCH

Sur l'équation différentielle linéaire du second ordre

Bulletin de la S. M. F., tome 25 (1897), p. 221-235

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1897__25__221_1>

SUR L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE DU SECOND ORDRE;

Par M. MICHEL PETROVITCH.

1. Envisageons l'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0 \tag{1}$$

et l'équation du second degré

$$r^2 + P(x)r + Q(x) = 0, \tag{2}$$

qui lui correspond et que nous appellerons son *équation caractéristique*.

Considérons un intervalle de $x = a$ jusqu'à $x = b$, dans lequel les racines

$$r_1 = f_1(x), \qquad r_2 = f_2(x)$$

de l'équation caractéristique sont réelles, distinctes et où la plus grande racine $f_2(x)$ est une fonction non croissante.

Désignons par A et B les valeurs que prennent l'intégrale $y(x)$ et sa désivée $y'(x)$ pour $x = a$. *Je m'occuperai ici particulièrement des intégrales, pour lesquelles ces valeurs initiales satisfont à la condition*

$$\frac{B}{A} > f_2(a), \tag{3}$$

et je montrerai comment on peut, en comparant ces intégrales avec celles d'autres équations intégrables, se rendre compte de leur forme et les déterminer avec une certaine approximation dans l'intervalle considéré (a, b).

A cet effet, montrons d'abord qu'en posant

$$\eta(x) = \mathrm{A}e^{\int_a^x f_2(x)\,dx}:$$

1° *Si* $\mathrm{A} > 0$, *l'intégrale y est constamment positive et supérieure à la fonction* $\eta(x)$ *dans l'intervalle* (a, b);

2° *Si* $\mathrm{A} < 0$, *l'intégrale est constamment négative et inférieure à* $\eta(x)$ *dans cet intervalle.*

Car en posant

$$y = \mathrm{A}e^{-\int_a^x u(x)\,dx}, \tag{4}$$

la fonction u sera intégrale de

$$\frac{du}{dx} = u^2 - \mathrm{P}(x) + \mathrm{Q}, \tag{5}$$

ou bien

$$\frac{du}{dx} = (u + f_1)(u + f_2), \tag{6}$$

qui, pour $x = a$, prend la valeur $-\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}$.

Or, pour des valeurs de x comprises dans l'intervalle (a, b), la fonction $u(x)$ tellement définie est constamment croissante, mais inférieure à $-f_2(x)$. Car, d'abord, u ne peut commencer par décroître dans cet intervalle, puisque les quantités

$$u(a) + f_1(a), \qquad u(a) + f_2(u),$$

en vertu des inégalités

$$f_1(x) < f_2(x)$$

et (3), sont négatives et la dérivée $u'(a)$ positive. Tant que $u < -f_2$, la fonction u est constamment croissante, car on a en même temps $u < -f_1$ et la dérivée u' est positive. Or, en croissant, elle ne peut pas surpasser ni atteindre la valeur correspondante de $-f_2(x)$, car, aussitôt qu'elle aurait surpassé cette valeur, elle devrait décroître, la dérivée u' se trouvant alors négative, puisque $u+f_2>0$, $u+f_1<0$. Mais aussitôt qu'elle aurait commencé à décroître, elle aurait descendu au-dessous de $-f_2(x)$ [puisque la fonction $-f_2(x)$ n'est pas décroissante] et par conséquent la dérivée u', devenant de nouveau positive, devrait de nouveau croître, etc.

D'autre part, comme $u(x)$ et $-f_2(x)$ ne décroissent pas dans l'intervalle (a, b), et comme on a constamment

$$u(x) < -f_2(x),$$

on aura aussi dans le même intervalle

$$\int_a^x u(x)\,dx < -\int_a^x f_2(x)\,dx,$$

ou encore

$$e^{-\int_a^x u(x)\,dx} > e^{-\int_a^x f_2(x)\,dx},$$

et la démonstration s'achève facilement.

On s'assure aussi que, *si* A *et* B *sont de signes contraires, l'intégrale* $y(x)$ *est constamment positive et décroissante ou négative et croissante suivant que* $A>0$ *ou* $A<0$. Car le rapport $\frac{B}{A}$ étant négatif, la valeur initiale $-\frac{B}{A}$ de la fonction $u(x)$ est positive et, comme $u(x)$ est constamment croissante, elle sera constamment positive dans l'intervalle (a, b). La formule (4) met alors en évidence le résultat énoncé.

2. Envisageons maintenant deux équations

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=0, \tag{7}$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}+P_1(x)\frac{dz}{dx}+Q_1(x)z=0. \tag{8}$$

Soient $f_1(x)$ et $f_2(x)$ les racines de l'équation caractéristique de (7), $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ celles de l'équation caractéristique de (8); en supposant que

$$f_1<f_2, \qquad \varphi_1<\varphi_2.$$

Nous supposerons encore que ces racines satisfont aux conditions du paragraphe précédent. Comparons entre elles les intégrales $y(x)$ et $z(x)$ de (7) et (8), qui pour $x = a$ prennent la valeur A et dont les dérivées y' et z' prennent la valeur B pour $x = a$, ces valeurs étant telles que la condition

$$\frac{B}{A} > f_2(a)$$

soit remplie. Je dis que :

Si dans l'intervalle (a, b) *on a constamment*

$$f_1(x) \geqq \varphi_1(x),$$
$$f_2(x) \geqq \varphi_2(x),$$

on aura aussi dans cet intervalle

$$y > z \quad \text{si} \quad A > 0,$$
$$y < z \quad \text{si} \quad A < 0.$$

Pour le démontrer, posons

(11) $$y = A e^{-\int_a^x u\,dx},$$

(12) $$z = A e^{-\int_a^x v\,dx};$$

les fonctions u et v seront intégrales respectives des équations

(13) $$\frac{du}{dx} = (u + f_1)(u + f_2),$$

(14) $$\frac{dv}{dx} = (v + \varphi_1)(v + \varphi_2),$$

prenant pour $x = a$ les valeurs $-\frac{B}{A}$.

Or, dans l'intervalle (a, b) on aura constamment $u < v$. Car, d'abord, à partir de $x = a$ on ne peut pas avoir $u > v$, puisque s'il en était ainsi pour une valeur de x suffisamment voisine de $x = a$, pour cette valeur de x on aurait à la fois

$$f_2(x) \geqq \varphi_2(x),$$
$$u(x) > v(x),$$

d'où

(15) $$u + f_2 > v + \varphi_2,$$

et de même

(16) $$u + f_1 > v + \varphi_1.$$

Comme, d'après la proposition précédente, les fonctions

$$u+f_1,\quad u+f_2,$$
$$v+\varphi_1,\quad v+\varphi_2$$

sont négatives, des équations (13), (14) et des inégalités (15), (16) on conclurait que

$$\frac{du}{dx}<\frac{dv}{dx},$$

ou

$$\frac{d}{dx}(u-v)<0,$$

c'est-à-dire que la différence $u-v$ décroît à partir de cette valeur de x. Et comme pour $x=a$ cette différence est nulle, à partir de cette valeur on aurait $u<v$, ce qui serait en contradiction avec l'hypothèse faite.

D'autre part, pour que, après avoir été négative, la différence $u-v$ puisse devenir positive à partir d'une valeur $x=\alpha$, comprise dans l'intervalle (a, b), il faut qu'elle s'annule pour $x=\alpha$ [car, d'après ce qui précède, les fonctions u et v sont finies et continues dans l'intervalle (a, b)] et comme l'on trouverait, d'après le raisonnement précédent, qu'à partir de $x=\alpha$ la différence $u-v$ décroîtrait, la contradiction est évidente, ce qui démontre la proposition.

On aura donc $u<v$; d'où, en ayant égard aux formules (11) et (12), s'ensuivent les inégalités

$$y>z \quad \text{si} \quad A>0,$$
$$y<z \quad \text{si} \quad A<0,$$

qu'il fallait démontrer.

3. On en déduit immédiatement la conséquence suivante :

Envisageons trois équations

$$(17)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2}+P(x)\dfrac{dy}{dx}+Q(x)y=0,\\[2mm] \dfrac{d^2Y}{dx^2}+P_1(x)\dfrac{dY}{dx}+Q_1(x)Y=0,\\[2mm] \dfrac{d^2Z}{dx^2}+P_2(x)\dfrac{dZ}{dx}+Q_2(x)Z=0,\end{cases}$$

en supposant qu'on sache intégrer les deux dernières. Supposons que les plus grandes racines

$$f_2(x), \quad \varphi_2(x), \quad \psi_2(x),$$

des équations caractéristiques respectives, ainsi que les valeurs initiales des intégrales y, Y, Z, satisfassent aux conditions énumérées précédemment dans le paragraphe **1**, les plus petites racines

$$f_1(x), \quad \varphi_1(x), \quad \psi_1(x)$$

étant les mêmes pour toutes les trois équations et égales à $f_1(x)$. Alors :

Si dans l'intervalle (a, b) *on a constamment*

$$\psi_2(x) \leqq f_2(x) \leqq \psi_2(x), \tag{18}$$

on aura aussi dans cet intervalle

$$\begin{cases} Y < y < Z & \text{si} \quad A > 0, \\ Z < y < Y & \text{si} \quad A < 0. \end{cases} \tag{19}$$

4. On peut tirer de ces propositions plusieurs règles précisant les limites, supérieure et inférieure, entre lesquelles sera constamment comprise la valeur de l'intégrale considérée y dans l'intervalle (a, b). On pourra aussi se donner une idée de la marche de la courbe intégrale et la déterminer avec une certaine approximation. Car en remplaçant $f_2(x)$ par d'autres fonctions plus petites et plus grandes dans l'intervalle (a, b) que celle représentée par la plus grande racine de l'équation caractéristique relative à l'équation du second ordre donnée, et en choisissant ces fonctions de manière qu'on sache intégrer les nouvelles équations ainsi obtenues, on aura les limites entre lesquelles variera l'intégrale considérée. Ces limites seront d'autant plus resserrées que la différence entre la fonction $f_2(x)$ et les nouvelles fonctions, par lesquelles on l'a remplacée, est plus petite en valeur absolue. Le choix de telles fonctions dépendra des cas particuliers que l'on a à considérer.

A cet égard je citerai, à titre d'exemple, la proposition suivante :

Soient r_1 *et* r_2 *la plus petite et la plus grande valeur de la* *racine $f_2(x)$ dans l'intervalle (a, b); si l'on pose*

$$(20) \qquad Y = A e^{r_1(x-a)} + (B - r_1 A) e^{r_1(x+a)} \int_a^x e^{-\left[r_1 x + \int_a^x f_1(x)dx\right]} dx,$$

$$(21) \qquad Z = A e^{r_2(x-a)} + (B - r_2 A) e^{r_2(x+a)} \int_a^x e^{-\left[r_2 x + \int_a^x f_1(x)dx\right]} dx,$$

on aura constamment dans cet intervalle

$$(22) \qquad \begin{cases} Y < y < Z & \text{si} \quad A > 0, \\ Z < y < Y & \text{si} \quad A < 0. \end{cases}$$

Car, si l'on considère les deux équations

$$(23) \qquad \frac{d^2Y}{dx^2} - [r_1 + f_1(x)] \frac{dY}{dx} + r_2 f_1(x) Y = 0,$$

$$(24) \qquad \frac{d^2Z}{dx^2} - [r_2 + f_2(x)] \frac{dZ}{dx} + r_2 f_1(x) Z = 0,$$

leurs intégrales respectives sont

$$Y = e^{r_1 x}\left[C_1 + C_2 \int_a^x e^{-\left[r_1 x + \int_a^x f_1 dx\right]} dx\right],$$

$$Z = e^{r_2 x}\left[C'_1 + C'_2 \int_a^x e^{-\left[r_2 x + \int_a^x f_1 dx\right]} dx\right],$$

et en déterminant les constantes d'intégration de manière que pour $x = a$ on ait

$$Y = Z = A,$$
$$Y' = Z' = B,$$

on trouve les expressions (20) et (21).

D'autre part, les racines de l'équation caractéristique de (23) et (24) étant respectivement

$$r_1, \quad f_1(x),$$
$$r_2, \quad f_1(x),$$

avec

$$r_1 < f_2(x) < r_2,$$

la proposition, d'après le paragraphe 3, est démontrée.

5. Supposons maintenant que dans l'équation donnée

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0, \tag{25}$$

on remplace P et Q par d'autres fonctions $P_1(x)$, $Q_1(x)$ et ensuite par $P_2(x)$, $Q_2(x)$, pour lesquelles on sache intégrer l'équation et telles que les racines $\varphi_1(z)$ et $\varphi_2(x)$ (avec $\varphi_1 < \varphi_2$) de l'équation caractéristique relative à la nouvelle équation

$$\frac{d^2Y}{dx^2} + P_1(x)\frac{dY}{dx} + Q_1(x)Y = 0, \tag{26}$$

et les racines $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, relatives à l'équation

$$\frac{d^2Z}{dx^2} + P_2(x)\frac{dZ}{dx} + Q_2(x)Z = 0, \tag{27}$$

remplissent les conditions

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi_1 \leqq f_1 \leqq \psi_1, \\ \varphi_2 \leqq f_2 \leqq \psi_2, \end{array}\right. \tag{28}$$

et que les plus grandes racines φ_2 et ψ_2 soient des fonctions non croissantes des x dans l'intervalle (a, b).

Alors dans l'intervalle (a, b) *on aura constamment*

$$\left\{\begin{array}{lll} Y < y < Z & \text{si} & A > 0, \\ Z < y < Y & \text{si} & A < 0. \end{array}\right. \tag{29}$$

On en tire, comme conséquence immédiate, la proposition suivante :

En désignant par (ρ_1, ρ_2) la plus petite et la plus grande valeur de la racine $f_1(x)$ dans l'intervalle (a, b), et par (r_1, r_2) les valeurs analogues pour la fonction $f_2(x)$, les inégalités (29) seront satisfaites si l'on pose

$$Y = \frac{1}{\rho_2 - \rho_1}\left[(A\rho_2 - B)e^{\rho_1(x-a)} - (A\rho_1 - B)e^{\rho_2(x-a)}\right],$$

$$Z = \frac{1}{r_2 - r_1}\left[(A r_2 - B)e^{r_1(x-a)} - (A r_1 - B)e^{r_2(x-a)}\right],$$

car les fonctions Y et Z, ainsi définies, sont intégrales respectives des équations

$$Y'' - (\rho_1 + \rho_2)Y' + \rho_1\rho_2 Y = 0,$$
$$Z'' - (r_1 + r_2)Z' + r_1 r_2 Z = 0,$$

qui, pour $x = a$, prennent la valeur A et dont les dérivées premières prennent la valeur B.

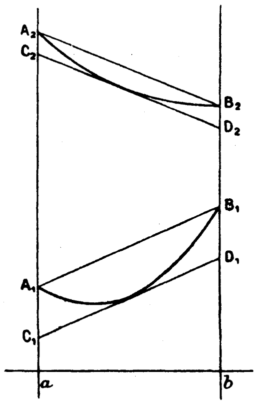
Mais on peut avoir les limites Y et Z beaucoup plus resserrées par les considérations suivantes :

Supposons construites les courbes (*fig.* 1)

$$y = f_1(x) \qquad \text{et} \qquad y = f_2(x).$$

Soient A_1 et B_1, A_2 et B_2 les points d'intersection de ces courbes

Fig. 1.



avec les droites $x = a$ et $x = b$; joignons-les par les droites A_1B_1 et A_2B_2. Menons ensuite la tangente C_1D_1 à la courbe $y = f_1$, parallèlement à A_1B_1, et la tangente C_2D_2 à la courbe $y = f_2$, parallèlement à A_2B_2. Soient

$y = a_1 + b_1 x$, équation de la corde A_1B_1,

$y = a_2 + b_2 x$, équation de la corde A_2B_2,

$y = \lambda_1 + b_1 x$, équation de la tangente C_1D_1,

$y = \lambda_2 + b_2 x$, équation de la tangente C_2D_2.

On aura

$$a_1 = \frac{bf_1(a) - af_1(b)}{b-a}, \qquad b_1 = \frac{f_1(b) - f_1(a)}{b-a},$$
$$a_2 = \frac{bf_2(a) - af_2(b)}{b-a}, \qquad b_2 = \frac{f_2(b) - f_2(a)}{b-a},$$
$$\lambda_1 = f_1(\alpha_1) - b_1\alpha_1, \qquad \lambda_2 = f_2(\alpha_2) - b_2\alpha_2,$$

α_1 étant la racine en x de l'équation

$$f'_1(x) - b_1 = 0,$$

comprise dans l'intervalle (a, b), et α_2 étant la racine en x de

$$f_2(x) - b_2 = 0,$$

comprise dans ce même intervalle.

Envisageons les équations différentielles

$$(30)\quad \frac{d^2Y}{dx^2} - [\lambda_1 + \lambda_2 + (b_1 + b_2)x]\frac{dY}{dx} + [\lambda_1\lambda_2 + (b_1 + b_2)x + b_1 b_2 x^2]Y = 0,$$

$$(31)\quad \frac{d^2Z}{dx^2} - [a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)x]\frac{dZ}{dx} + [a_1 a_2 + (b_1 + b_2)x + b_1 b_2 x^2]Z = 0.$$

Les racines de leurs équations caractéristiques sont : pour la première équation

$$\varphi_1(x) = \lambda_1 + b_1 x, \qquad \varphi_2(x) = \lambda_2 + b_2 x,$$

et pour la deuxième

$$\psi_1(x) = a_1 + b_1 x, \qquad \psi_2(x) = a_2 + b_2 x.$$

Comme l'on a (en supposant que les courbes $y = f_1$ et $y = f_2$ ont la disposition indiquée sur la figure ; s'il en était autrement, il serait facile de modifier les inégalités et les résultats suivants)

$$\varphi_1 < f_1 < \psi_1,$$
$$\varphi_2 < f_2 < \psi_2,$$

on aura dans l'intervalle (a, b)

$$Y < y < Z \quad \text{si} \quad A > 0,$$
$$Z < y < Y \quad \text{si} \quad A < 0.$$

Or, on sait intégrer les équations de comparaison (30) et (31) et les fonctions Y et Z se calculent de la manière suivante. Si l'on pose

$$Y = U e^{\alpha_1 x + \frac{\beta_1 x^2}{2}},$$
$$Z = V e^{\alpha_2 x + \frac{\beta_2 x^2}{2}},$$

U et V désignant de nouvelles fonctions inconnues et α_1, α_2, β_1,

β_2 des constantes, les équations (30) et (31) se transforment en

$$\frac{d^2U}{dx^2}+[(2\beta_1+b_1+b_2)x+(2\alpha_1+a_1+a_2)]\frac{dU}{dx}$$
$$+\{[\beta_1^2+(b_1+b_2)\beta_1+b_1b_2]x^2$$
$$+[2\alpha_1\beta_1+\alpha_1(b_1+b_2)+\beta_1(a_1+a_2)+b_1+b_2]x$$
$$+[\alpha_1^2+\beta_1+\alpha_1(a_1+a_2)+a_1a_2]\}\,U=0,$$

et en une équation analogue en V.

On peut disposer de α_1, α_2, β_1, β_2 de manière à faire disparaître les termes en x et en x^2 dans les coefficients de U et de V; les équations se ramènent alors aux formes

$$\frac{d^2U}{dx^2}+(h_1+k_1x)\frac{dU}{dx}+l_1U=0,$$
$$\frac{d^2V}{dx^2}+(h_2+k_2x)\frac{dV}{du}+l_2V=0.$$

En prenant

$$t=h_1+k_1x \qquad \text{et} \qquad t=h_2+k_2x$$

comme nouvelle variable indépendante, les équations se ramènent à la forme

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\alpha t\frac{du}{dt}+\beta u=0 \tag{32}$$

et s'intègrent soit à l'aide des séries, soit par des intégrales définies. Ainsi, en posant

$$\Phi_1(t)=1+\sum_1^\infty(-1)^n\frac{\beta(2\alpha+\beta)(4\alpha+\beta)\ldots(\overline{2n-2}\,\alpha+\beta)}{(2n)!}t^{2n},$$

$$\Phi_2(t)=t+\sum_1^\infty(-1)^n\frac{(\alpha+\beta)(3\alpha+\beta)\ldots(\overline{2n-1}\,\alpha+\beta)}{(2n+1)!}t^{2n+1},$$

l'intégrale générale de (32) sera

$$u=C_1\Phi_1(t)+C_2\Phi_2(t),$$

et les fonctions Y et Z se calculent alors aisément.

On aura une approximation encore plus grande si, au lieu des droites précédentes, on prenait des paraboles

$$y=l+mx+nx^2+\ldots+qx^m,$$

entourant les arcs des courbes $y=f_1$ et $y=f_2$ et différant de ceux-ci le moins possible. Les fonctions de comparaison Y et Z seraient alors données comme intégrales d'une équation qu'on saura intégrer par des séries convergentes.

6. Faisons maintenant la remarque suivante. Étant donnée une équation

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0,$$

dont les racines

$$r_1 = f_1(x), \qquad r_2 = f_2(x)$$

de l'équation caractéristique

$$r^2 + P(x)r + Q(x) = 0$$

ont leur différence constante, de sorte qu'on ait

$$r_1 = \alpha + \theta(x),$$
$$r_2 = \beta + \theta(x);$$

si l'on pose

(33) $$y = ve^{\frac{\alpha+\beta}{2}x + \int \theta(x)\,dx},$$

l'équation se transforme en

(34) $$v'' + \varpi(x)v = 0,$$

où

(35) $$\varpi(x) = \theta'(x) - \frac{(\alpha - \beta)^2}{4}.$$

Ceci se vérifie aisément en effectuant cette transformation.

Inversement : toutes les fois qu'on sait intégrer une équation

$$v'' + \varpi(x)v = 0,$$

on peut en déduire une autre de la forme

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0,$$

dont les racines de l'équation caractéristique ont leur différence constante et que l'on saura aussi intégrer.

Car si l'on pose

(36) $$\theta(x) = \frac{(\alpha - \beta)^2}{4}\,x + \int \varpi(x)\,dx$$

(la constante d'intégration étant choisie arbitrairement), et ensuite

(37) $$v = ye^{-\frac{\alpha+\beta}{2}x - \int \theta(x)\,dx},$$

l'équation se transforme en

(38) $$y'' - (\alpha + \beta + 2\theta)y' + [\alpha\beta + (\alpha + \beta)\theta + \theta^2]y = 0,$$

dont les racines de l'équation caractéristique sont

$$f_1(x) = \alpha + \theta(x),$$
$$f_2(x) = \beta + \theta(x).$$

Ces remarques permettent d'énoncer un grand nombre de règles concernant les limites entre lesquelles variera l'intégrale de l'équation proposée (1). Partons de deux équations quelconques de la forme

(39) $$\frac{d^2 u}{dx^2} + \chi(x)u = 0,$$

(40) $$\frac{d^2 v}{dx^2} + \varpi(x)v = 0,$$

où $\chi(x)$ et $\varpi(x)$ sont des fonctions négatives dans l'intervalle (a, b) et que l'on sait intégrer. Choisissons trois constantes λ, μ, ν, liées par la relation

$$4\nu - (\lambda - \mu)^2 = 0,$$

et telles qu'on ait constamment, dans l'intervalle (a, b),

$$f_1(x) > \lambda + \theta_1(x),$$
$$f_2(x) > \mu + \theta_1(x),$$

où l'on a posé

(41) $$\theta_1(x) = \nu x + \int \chi(x)\,dx,$$

la constante d'intégration étant choisie à volonté.

Choisissons ensuite trois autres constantes λ', μ', ν', liées par la relation

$$4\nu' - (\lambda' - \mu')^2 = 0,$$

et telles qu'on ait constamment, dans l'intervalle (a, b),

$$f_1(x) < \lambda' + \theta_2(x),$$
$$f_2(x) < \mu' + \theta_2(x),$$

avec

$$(42)\qquad \theta_2(x) = \nu' x + \int \varpi(x)\, dx.$$

Si l'on pose alors

$$(43)\qquad \mathrm{U} = u e^{\frac{\lambda+\mu}{2}x + \int_a^x \theta_1(x)\,dx},$$

$$(44)\qquad \mathrm{V} = v e^{\frac{\lambda'+\mu'}{2} + \int_a^x \theta_2(x)\,dx},$$

où u et v sont intégrales respectives de (39) et (40), prenant, ainsi que leurs dérivées, pour $x = a$ les valeurs suivantes :

$$(45)\qquad \left\{\begin{aligned} u(a) &= \mathrm{A} e^{-\frac{\lambda+\mu}{2}a}, \\ v(a) &= \mathrm{A} e^{-\frac{\lambda'+\mu'}{2}a}, \\ u'(a) &= \mathrm{A}' e^{-\frac{\lambda+\mu}{2}a} - \mathrm{A}\left[\frac{\lambda+\mu}{2} + \theta_1(a)\right] e^{-(\lambda+\mu)a}, \\ v'(a) &= \mathrm{A}' e^{-\frac{\lambda'+\mu'}{2}a} - \mathrm{A}\left[\frac{\lambda'+\mu'}{2} + \theta_2(a)\right] e^{-(\lambda'+\mu')a}, \end{aligned}\right.$$

on aura

$$\mathrm{U} < y < \mathrm{V} \quad \text{si} \quad \mathrm{A} > 0,$$
$$\mathrm{V} < y < \mathrm{U} \quad \text{si} \quad \mathrm{A} < 0.$$

Le choix des fonctions de comparaison U et V dépend des cas particuliers que l'on a à considérer. On choisira ces fonctions de manière que la différence entre les fonctions $f_1(x)$, $f_2(x)$ et les nouvelles fonctions, par lesquelles on les a remplacées, soit la plus petite possible et que l'on sache intégrer les équations de comparaison correspondantes (39) et (40).

Ainsi, si l'on part des équations de comparaison

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \alpha u = 0,$$

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \beta v = 0,$$

où α et β sont des constantes, on aura

$$\theta_1(x) = (\alpha + \nu)x,$$
$$\theta_2(x) = (\beta + \nu)x,$$

et les fonctions U et V correspondantes se calculent facilement. Ceci revient à remplacer les portions de courbes $y = f_1(x)$ et

$y = f_2(x)$ par des droites qui les comprennent et le plus souvent il sera utile de prendre pour deux de ces droites les tangentes à ces courbes.

D'autres fonctions de comparaison U et V seront fournies, par exemple, par les équations intégrables

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha x^m y = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (\alpha + \beta x + \gamma x^2)y = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{ky}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^2} = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{y}{(e^x + e^{-x})^2} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

parmi lesquelles on choisira celle qui convient au cas considéré.