

# BULLETIN DE LA S. M. F.

M. D'OCAGNE

**Application de la méthode nomographique la plus générale résultant de la superposition de deux plans aux équations à trois et à quatre variables**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 26 (1898), p. 16-43

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1898\\_\\_26\\_\\_16\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1898__26__16_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1898, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

APPLICATION DE LA MÉTHODE NOMOGRAPHIQUE LA PLUS GÉNÉRALE  
RÉSULTANT DE LA SUPERPOSITION DE DEUX PLANS  
AUX ÉQUATIONS A TROIS ET A QUATRE VARIABLES;

Par M. Maurice D'OCAGNE.

Le but de ce Mémoire est de faire connaître tous les types possibles d'abaque à trois et à quatre variables résultant de la superposition de deux plans. Cette étude est une application immédiate du principe général communiqué à l'Académie des Sciences, dans la séance du 31 janvier 1898 (<sup>1</sup>), et qui est rappelé ci-dessous dans une première section du Mémoire.

En pratique, l'un des deux plans superposés sera opaque, l'autre transparent, à moins que les déplacements relatifs des deux plans ne s'effectuent sans empiètement les uns sur les autres de leurs parties utiles, ce qui a lieu notamment lorsque ces déplacements se réduisent au simple glissement d'une échelle de l'un d'eux le long d'une échelle de l'autre comme dans les règles et cercles à calcul qui, au point de vue où nous nous plaçons, rentrent dans la catégorie des abaques.

I. — PRINCIPE GÉNÉRAL.

1. Un point est dit *sans cote* s'il ne fait pas partie d'un système; de même pour une courbe.

Un point est dit à *une cote* s'il fait partie d'un système simplement infini, la valeur correspondante du paramètre étant inscrite à côté de ce point dont elle constitue la cote; et encore de même pour une courbe.

Un point est dit à *deux cotes* s'il fait partie d'un système doublement infini, c'est-à-dire du réseau formé par deux systèmes de courbes à une cote. Les cotes de ce point sont celles des courbes, prises dans l'un et l'autre systèmes, qui s'y croisent.

Une courbe est dite à *deux cotes* si elle fait partie d'un système simplement infini tracé à travers un réseau de points à deux cotes. Chaque point de cette courbe considéré comme appartenant à ce réseau, dit *réseau de cotes*, est pourvu de deux cotes. L'un quel-

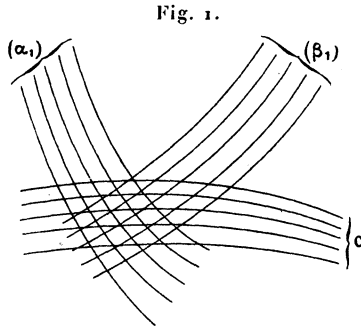
---

(<sup>1</sup>) *Comptes rendus*, t. CXXVI, p. 397.

conque de ces couples de cotes peut être affecté à la courbe, mais il faut remarquer que, lorsqu'une des cotes de la courbe est donnée, l'autre s'ensuit. En effet, la première cote définit une courbe de l'un des systèmes du réseau; par le point où cette courbe est rencontrée par la courbe donnée passe une courbe du second système dont la cote est la seconde demandée.

Au point de vue des applications, on pourrait se borner à considérer les points et courbes à deux cotes. Mais il faut remarquer que, théoriquement au moins, on peut multiplier indéfiniment le nombre des cotes. En effet, un réseau de cotes est, avons-nous dit, constitué par deux systèmes simplement infinis de courbes. Rien n'empêche de munir à son tour chacun de ces systèmes d'un réseau de cotes (en admettant, bien entendu, que ces divers réseaux soient tracés dans des aires n'empiétant pas les unes sur les autres) et la répétition de cette remarque montre la possibilité de concevoir, sinon de réaliser des points ou courbes à un nombre quelconque de cotes. On voit en outre, si ces cotes sont au nombre de  $n$ , que la connaissance de  $n - 1$  d'entre elles entraîne celle de la  $n^{\text{ième}}$ .

Les *fig. 1*, *1 bis* et *1 ter* montrent les schémas de systèmes de

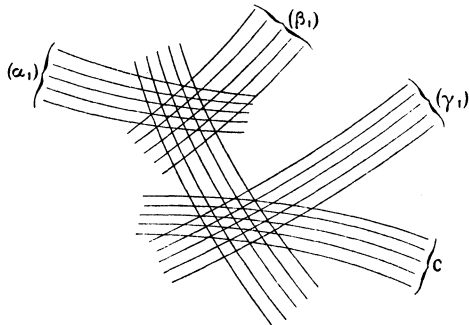


courbes  $C$  respectivement à 2, 3 et 4 cotes.

Lorsque nous ne spécifierons pas qu'il s'agit d'un point ou d'une courbe à plusieurs cotes, nous dirons *élément à plusieurs cotes*. Un tel élément sera désigné par la lettre  $E$  suivie d'un chiffre indiquant le nombre de cotes correspondant. Ainsi  $E_0$ ,  $E_1$ , ...,  $E_n$  désigneront des éléments sans cote, à 1 cote, etc., à  $n$  cotes.

Dans le cas où il sera spécifié que l'élément E sera un point,

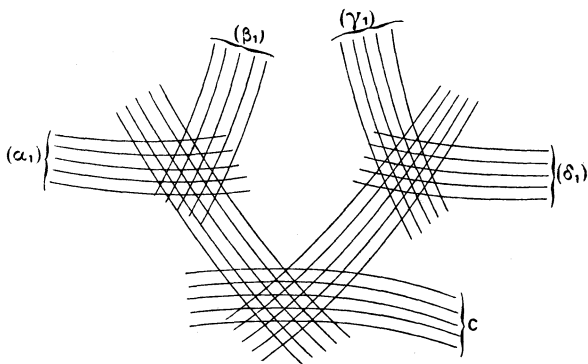
Fig. 1 bis.



une droite ou une courbe, la lettre E sera remplacée par la lettre P, la lettre D ou la lettre C.

Convenons tout de suite que si parmi les éléments envisagés

Fig. 1 ter.



figurent plusieurs cercles concentriques nous leur affecterons la lettre  $\Gamma$ ; de même, des droites parallèles seront désignées par la lettre  $\Delta$ .

2. Deux éléments sont dits *en contact* s'ils sont tangents lorsqu'il s'agit de deux courbes, si l'un est situé sur l'autre lorsqu'il s'agit d'un point et d'une courbe. Remarquons que la coïncidence de deux points équivaut à deux contacts, deux des courbes

passant par l'un de ces points devant être en contact avec l'autre point.

Nous exprimerons le contact des éléments E et E' par la notation  $E \dashv E'$ .

Lorsque deux plans  $\pi$  et  $\pi'$  ne sont astreints qu'à la simple superposition, leurs déplacements relatifs sont à 3 degrés de liberté. Le contact établi entre deux éléments pris l'un sur  $\pi$ , l'autre sur  $\pi'$ , fait disparaître un degré de liberté. Donc, en général, il suffit de trois contacts pour fixer la position relative des deux plans.

Il peut toutefois y avoir exception. Deux premiers contacts imposés ne laissent au déplacement relatif des deux plans qu'un degré de liberté. Dès lors les diverses positions de l'élément E' du plan  $\pi'$  ont, sur le plan  $\pi$ , une enveloppe (trajectoire si l'élément E' est un point); si cette enveloppe coïncide précisément avec l'élément E, on voit qu'un contact imposé entre les éléments E et E' ne suffirait pas, joint aux deux premiers, à fixer la position relative des deux plans, puisqu'il est une conséquence nécessaire de ceux-ci; il y a indétermination. Si l'élément E est une courbe parallèle à l'enveloppe de E', il y a impossibilité. De telles circonstances, qui ne se produiraient que si l'on faisait un choix spécial de données, ne se rencontrent jamais dans les applications. Il suffit donc qu'elles aient été mentionnées; on admettra dans la suite qu'elles se trouvent toujours écartées.

On peut dès lors énoncer le principe suivant :

*La position relative des plans superposés  $\pi$  et  $\pi'$  portant respectivement les éléments  $E_i$  et  $E'_i$  est complètement définie par trois contacts tels que  $E_1 \dashv E'_1$ ,  $E_2 \dashv E'_2$ ,  $E_3 \dashv E'_3$ . Si, dans cette position relative, se produit en outre le contact  $E_4 \dashv E'_4$ , les cotes de ces huit éléments satisfont à une certaine équation dont on a ainsi la représentation.*

Représentant par  $n_i$  et  $n'_i$  les nombres de cotes des éléments  $E_i$  et  $E'_i$ , on voit que cette équation renferme  $n = \sum_{i=1}^{i=4} n_i + n'_i$  variables, et que l'ensemble des deux plans permet, lorsque l'on se

donne les valeurs de  $n - 1$  de ces variables, d'obtenir celle de la  $n^{\text{ième}}$  résultant de l'équation représentée.

Par extension d'un terme consacré par l'usage nous dirons que l'ensemble des deux plans, munis de leurs éléments cotés, constitue un *abaque* de cette équation.

Pour former l'équation correspondant à un abaque donné, on rapporte d'abord les éléments du plan  $\pi'$  considéré comme mobile au plan  $\pi$  considéré comme fixe, au moyen des formules

$$x' = \lambda x + \sqrt{1 - \lambda^2} y + \mu, \quad y' = -\sqrt{1 - \lambda^2} x + \lambda y + \nu.$$

Chaque contact  $E_i \rightleftharpoons E'_i$  s'exprime dès lors par une équation dans laquelle, en outre des  $n_i + n'_i$  cotes correspondantes entrent les 3 paramètres  $\lambda, \mu, \nu$ . L'élimination de ces 3 paramètres entre les 4 équations ainsi obtenues fournit l'équation cherchée.

3. Supposons que la position relative des deux plans soit fixée au moyen des contacts  $E_1 \rightleftharpoons E'_1, E_2 \rightleftharpoons E'_2, E_3 \rightleftharpoons E'_3$  et que le contact qui en résulte soit  $E_3 \rightleftharpoons E'_3$ .

Si les éléments  $E'_1, E'_2, E'_3$  sont des cercles concentriques  $\Gamma'_1, \Gamma'_2, \Gamma'_3$ , on voit qu'une fois établis les contacts  $E_1 \rightleftharpoons \Gamma'_1, E_2 \rightleftharpoons \Gamma'_2$ , le seul déplacement relatif possible des plans  $\pi$  et  $\pi'$  est une rotation autour du centre commun des cercles. Pendant cette rotation le cercle  $\Gamma'_3$  tourne sur lui-même. Dès lors s'il se trouve en contact avec l'élément  $E_3$ , ce contact est indépendant du contact  $E_3 \rightleftharpoons E'_3$  dont on peut, en conséquence, faire abstraction; de même si les éléments  $E'_1, E'_2, E'_3$  sont des droites parallèles  $\Delta'_1, \Delta'_2, \Delta'_3$ , auquel cas la rotation précédente est remplacée par une translation parallèle à la direction de ces droites.

Ce second cas peut d'ailleurs être considéré comme limite du précédent lorsque le centre commun des cercles est rejeté à l'infini dans une direction donnée.

De plus, les cercles  $\Gamma'_1, \Gamma'_2, \Gamma'_3$  d'une part, les droites  $\Delta'_1, \Delta'_2, \Delta'_3$  de l'autre, peuvent venir en coïncidence.

En résumé, si l'on représente l'abaque général produit par la superposition de deux plans au moyen de la notation

$$E_1 n_1 \rightleftharpoons E'_1 n'_1. \quad E_2 n_2 \rightleftharpoons E'_2 n'_2. \quad E_3 n_3 \rightleftharpoons E'_3 n'_3, \quad E_4 n_4 \rightleftharpoons E'_4 n'_4.$$

les cas particuliers dont il vient d'être question pourront être dénotés par

$$E_1 n_1 \mapsto \Gamma'_1 n'_1, \quad E_2 n_2 \mapsto \Gamma'_2 n'_2, \quad E_3 n_3 \mapsto \Gamma'_3 n'_3, \quad \text{« } \mapsto \text{ »},$$

afin de rappeler que le quatrième contact devient alors indéterminé.

*Remarque.* — Pour les contacts servant à fixer la position relative des deux plans chaque élément doit être pourvu d'un réseau de cotes appartenant au même plan que lui. Mais pour le contact résultant on peut rattacher un des éléments qui y interviennent à un réseau de cotes qui ne soit pas situé sur le même plan que lui. Par exemple, dans le cas général, on peut prendre les cotes de l'élément  $E'_4$  sur un réseau appartenant au plan  $\pi$ . Dans ce cas, nous désignerons cet élément par la notation  $E'_4 \hat{n}'_4$ , et nous dirons que l'abaque est à *alternance*.

4. Pour faire, au point de vue de leur structure, l'étude des abaques relatifs aux équations contenant un certain nombre  $n$  de variables, étude que l'on peut, par une extension toute naturelle, qualifier de *morphologique*, il faut, abstraction faite de la nature géométrique des éléments mis en contact, voir de combien de façons on peut répartir  $n$  variables dans les huit groupes constituant l'ensemble des cotes de chacun des huit éléments en présence. Si l'on se place à ce point de vue, on peut effacer les lettres servant à désigner les divers éléments et dénoter chaque genre d'abaque d'équations à  $n$  variables de la manière suivante

$$n_1 \mapsto n'_1, \quad n_2 \mapsto n'_2, \quad n_3 \mapsto n'_3, \quad n_4 \mapsto n'_4,$$

avec

$$n_1 + n'_1 + n_2 + n'_2 + n_3 + n'_3 + n_4 + n'_4 = n.$$

Il faut d'ailleurs remarquer que deux solutions ne sauraient être considérées comme distinctes lorsque l'on peut passer de l'une à l'autre soit par permutation des quatre couples ci-dessus, car la répartition des indices entre les quatre groupes d'éléments en contact est quelconque, soit par inversion simultanée de l'ordre des nombres entrant dans chaque couple, car cela revient à un simple échange l'un en l'autre des deux plans superposés.

En recherchant, sous réserve de ces deux remarques, toutes les décompositions en somme de huit termes (plusieurs de ceux-ci pouvant être nuls bien entendu) du nombre  $n$ , on obtiendra *toutes les genres possibles* d'abaques formés par superposition de deux plans, applicables à des équations à  $n$  variables <sup>(1)</sup>.

Il est essentiel d'observer que la répartition des  $n$  variables en plusieurs groupes servant à coter les divers éléments en présence entraîne pour l'équation représentée l'existence de certains caractères fonctionnels. Sauf donc pour le cas de  $n = 3$ , qui offre une particularité signalée plus loin (n° 6), on ne pourra obtenir par superposition de deux plans l'abaque d'une équation *quelconque* à  $n$  variables.

Fort heureusement les types représentables, qui sont encore fort généraux, comprennent à peu près toutes les équations qui se rencontrent dans les applications.

## II. — ÉQUATIONS A 3 VARIABLES.

5. Pour les équations à 3 variables, toutes les solutions du problème qui vient d'être posé tiennent dans le Tableau suivant :

I <sub>3</sub> .....	3 1 0	0 1 0	0 1 0	0 1 0
II <sub>3</sub> .....	2 1 1	0 1 0	0 1 0	0 1 0
III <sub>3</sub> .....	2 1 0	1 1 0	0 1 0	0 1 0
IV <sub>3</sub> .....	2 1 0	0 1 1	0 1 0	0 1 0
V <sub>3</sub> .....	1 1 1	1 1 0	0 1 0	0 1 0
VI <sub>3</sub> .....	1 1 0	1 1 0	1 1 0	0 1 0
VII <sub>3</sub> .....	1 1 0	1 1 0	0 1 1	0 1 0

Il existe donc sept genres d'abaques par plans superposés pour les équations à 3 variables.

(1) Le major P.-A. Mac-Mahon, dont on connaît les importantes recherches sur la partition des nombres et à qui nous avons posé le problème consistant à dénombrer *a priori* les divers genres d'abaques applicables aux équations à  $n$  variables, en a donné une solution complète que l'on trouvera dans une Note insérée dans le *Bulletin* à la suite de ce Mémoire.

Si  $G(n)$  représente le nombre de genres correspondant à  $n$  variables, la méthode contenue dans cette Note pour

donne	$n = 1,$	$2,$	$3,$	$4,$	$5,$	$6,$	$7,$	....
	$G(n) = 1,$	$4,$	$7,$	$19,$	$33,$	$63,$	$114,$	....



*Remarque I.* — Les genres  $I_3$  et  $II_3$  comportant trois contacts entre éléments sans cote, les deux plans, dans ces deux cas, conservent l'un par rapport à l'autre une position invariable; autrement dit, ils se réduisent à un plan unique. Il n'y a pas lieu de recourir à l'usage du transparent.

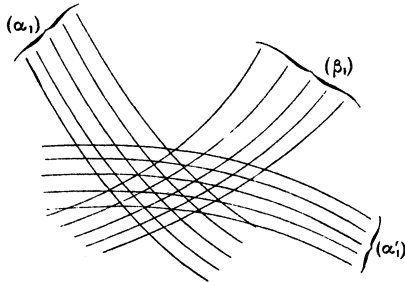
*Remarque II.* — Chacun des autres genres comportant un contact entre éléments sans cote, celui-ci peut être rendu indéterminé, en vertu de la remarque du n° 3, si l'on prend comme éléments du plan  $\pi'$  des cercles concentriques ou des droites parallèles, pouvant d'ailleurs venir en coïncidence. Les sous-genres ainsi obtenus seront désignés par les mêmes chiffres romains primés :  $III'_3$ ,  $IV'_3$ ,  $V'_3$ ,  $VI'_3$ ,  $VII'_3$ .

*Remarque III.* — Pour que les seuls éléments cotés de l'abaque puissent être des points à une cote il faut que le genre duquel dérive cet abaque ne comporte que des éléments à une cote en contact avec des éléments sans cote. Cette circonstance ne se présente que pour les genres  $VI_3$  et  $VII_3$  et le sous-genre  $VI'_3$ . Elle n'a pas lieu pour le sous-genre  $VII'_3$  puisque avec celui-ci les éléments cotés du plan  $\pi'$  sont nécessairement des cercles concentriques ou des droites parallèles.

A la suite de ces remarques générales, nous allons examiner de plus près quelques variétés des genres précédents, pour faire voir comment s'y rattachent certains types d'abaques connus.

6. Dans le genre  $II_3$ , supposons que les éléments du plan  $\pi$

Fig. 2.



soient des points à deux cotes  $\alpha_1$  et  $\beta_1$ , tandis que les éléments du plan  $\pi'$  soient des courbes à une cote  $\alpha'_1$ . En vertu de la Remarque II

du numéro précédent, nous pouvons immédiatement figurer les systèmes de courbes  $(\alpha_1)$ ,  $(\beta_1)$  et  $(\alpha'_1)$  sur un même plan, ce qui donne la *fig. 2*.

On voit qu'on peut tout aussi bien considérer les systèmes  $(\alpha_1)$  et  $(\alpha'_1)$  comme définissant des points à deux cotes mis en contact avec les courbes  $(\beta_1)$ , ou les systèmes  $(\alpha'_1)$  et  $(\beta_1)$  comme définissant des points à deux cotes mis en contact avec les courbes  $(\alpha_1)$ . La possibilité de permuter dans ce cas les rôles joués par les trois variables montre que l'équation représentée n'offrira aucun caractère fonctionnel particulier. Et, en effet, nous retrouvons bien ainsi le mode général de représentation applicable à une équation *quelconque* à trois variables <sup>(1)</sup>.

La question qui se pose avec de tels abaques est de disposer judicieusement du choix de deux des systèmes de courbes, qui est arbitraire, en vue de la plus grande simplicité possible. On s'efforcera notamment de n'avoir affaire qu'à des droites. C'est ici que le principe de l'anamorphose de Lalanne, généralisé par M. Massau, trouvera son utilité. Mais, au point de vue morphologique auquel nous nous sommes placé, on voit que les abaques ainsi obtenus ne sauraient être considérés comme essentiellement distincts de ceux que donne la méthode ordinaire qui consiste à prendre pour le système de points à deux cotes les sommets d'un quadrillage régulier.

7. Le genre  $V_3$  est constitué de la façon suivante <sup>(2)</sup> :

*Plan*  $\pi$  : Éléments à une cote,  $(\alpha_1)$  et  $(\alpha_2)$ ; éléments sans cote,  $E_3$  et  $E_4$ .

*Plan*  $\pi'$  : Éléments à une cote  $(\alpha'_1)$ ; éléments sans cote,  $E'_2$ ,  $E'_3$  et  $E'_4$ .

*Mode de liaison* :  $(\alpha_1) \rightleftharpoons (\alpha'_1)$ ,  $(\alpha_2) \rightleftharpoons E'_2$ ,  $E_3 \rightleftharpoons E'_3$ ,  $E_4 \rightleftharpoons E'_4$ .

En voici quelques exemples :

PREMIER EXEMPLE : *Procédé Willotte pour le calcul des profils de terrassements*. — Soit ZOAB le gabarit d'un demi-profil de remblai <sup>(3)</sup> (*fig. 3*). Pour définir complètement un tel demi-profil, il resterait à tracer la ligne du terrain naturel.

---

<sup>(1)</sup> *Nomographie*, n° 1.

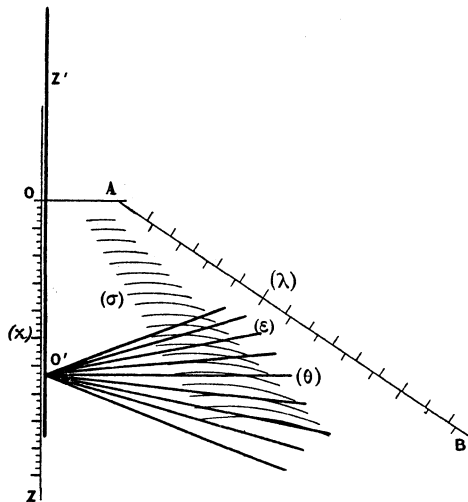
<sup>(2)</sup> Pour suivre plus facilement ces explications, le lecteur fera bien de les traduire en croquis schématiques en employant des couleurs différentes pour la figuration des éléments appartenant à l'un et à l'autre plan.

<sup>(3)</sup> On pourrait procéder de même pour le déblai.

Si l'on se donne l'aire  $\sigma$  du demi-profil, cette ligne a pour enveloppe une hyperbole. Traçons la partie utile des hyperboles correspondant aux valeurs pratiques de  $\sigma$ . Nous obtenons ainsi le système  $(\sigma)$ .

Si l'on se donne la largeur d'emprise  $\epsilon$ , la ligne du terrain naturel pivote autour d'un point de la ligne AB du talus extérieur; de même si l'on se donne la longueur  $\lambda$  du talus. Chacun des points

Fig. 3.



de la ligne AB correspond donc à la fois à une valeur de  $\epsilon$  et à une valeur de  $\lambda$ , et cette ligne peut être regardée comme constituée par un système de points cotés  $(\epsilon)$  et un système de points cotés  $(\lambda)$  qu'on définira par deux graduations portées de part et d'autre de cette droite.

Si dès lors on applique sur le Tableau ainsi formé un demi-profil dont trois des côtés s'appliquent sur OZ, OA et AB, le quatrième côté, c'est-à-dire la ligne du terrain naturel, sera tangent à une courbe  $(\sigma)$  dont la cote fera connaître l'aire du demi-profil, et passera par un point de la droite AB, dont les cotes  $\epsilon$  et  $\lambda$  donneront la largeur d'emprise et la longueur du talus. Tel est, réduit à ses traits essentiels, le procédé de M. Willoué (1).

---

(1) *Annales des Ponts et Chaussées*, 3<sup>e</sup> semestre 1880, p. 303.—Nous avons fait entrevoir la possibilité de rattacher ce procédé aux abaques dans notre *Nomographie*, p. 92.

On peut aisément voir comment ce procédé rentre dans le genre d'abaque qui vient d'être défini. En effet, supposons que nous graduions l'axe OZ au moyen des valeurs  $z$  de la cote sur l'axe et que, sur un transparent nous marquions l'axe O'Z', par l'origine O' duquel nous ferons passer des droites faisant avec la perpendiculaire à cet axe les angles correspondant aux diverses valeurs  $\theta$  de la déclivité du terrain naturel.

Il suffira, pour faire la lecture relative à un demi-profil donné, d'appliquer le transparent sur le Tableau précédemment défini, de façon que l'axe O'Z' s'applique sur OZ, l'origine O' de cet axe étant mise en coïncidence avec le point ( $z$ ). La droite ( $\theta$ ) du transparent sera alors tangente à la courbe ( $\sigma$ ) et passera par le point ( $\varepsilon$ ) ou ( $\lambda$ ), dont les cotes sont les valeurs demandées pour l'aire, l'emprise et la longueur du talus.

Le diagramme ainsi obtenu peut être considéré comme provenant de la coexistence de deux abaques du type ci-dessus.

Pour l'un et pour l'autre de ces abaques, tous les éléments sont les mêmes, à l'exception de ( $\alpha_1$ ), ainsi que le montre le Tableau ci-dessous où le signe  $\equiv$  est celui de l'identité

$$\begin{aligned} (\alpha_1) \equiv \left\{ \begin{array}{l} \text{Courbe } (\sigma), \\ \text{Point } (\varepsilon) \text{ ou } (\lambda), \end{array} \right. & \quad (\alpha_2) \equiv \text{Point } (z), \quad E_3 \equiv E_4 \equiv \text{axe OZ}, \\ (\alpha'_1) \equiv \text{Droite } (0), & \quad E'_2 \equiv E'_3 \equiv \text{Point O}', \quad E'_4 \equiv \text{Point Z}'. \end{aligned}$$

Le procédé Willotte peut donc être dénoté ainsi qu'il suit :

$$\left. \begin{array}{l} (\sigma) \\ (\varepsilon) \text{ ou } (\lambda) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \dashv (\theta), \quad (z) \dashv O', \quad OZ \dashv O', \quad OZ \dashv Z'. \end{array}$$

Il faut remarquer que la coïncidence du point ( $z$ ) avec le point O', considérée isolément, équivaldrait, ainsi que cela a été observé au n° 2, à deux contacts, mais l'un de ces contacts résulte déjà de  $OZ \dashv O'$ ; il n'y a donc pas surabondance de contacts imposés. En effectuant la coïncidence ( $z$ )  $\dashv$  O' après le contact  $OZ \dashv O'$ , on ne fait en réalité que mettre en contact la perpendiculaire à O'Z' menée par le point O' avec le point ( $z$ ).

**DEUXIÈME EXEMPLE : Règle à calcul.** — Soient OZ le bord de la règle portant une graduation qui compte double, puisqu'on y lit les valeurs de deux des variables  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ ; O'Z' le bord de la

réglette mobile glissant le long de  $OZ$ , sur lequel on lira la variable  $\alpha'_1$  et dont l'origine est  $O'$ ;  $Z'$  un point quelconque de  $O'Z'$  autre que  $O'$ . On voit immédiatement que la règle à calcul rentre dans le genre d'abaque précédent lorsqu'on suppose que

$$\begin{aligned} (\alpha_1) &\equiv \text{Point } (\alpha_1) \text{ de } OZ, & (\alpha_2) &\equiv \text{Point } (\alpha_2) \text{ de } OZ, & E_3 &\equiv E_4 \equiv \text{Axe } OZ, \\ (\alpha'_1) &\equiv \text{Point } (\alpha'_1) \text{ de } O'Z', & E'_2 &\equiv E'_3 \equiv \text{Point } O', & E'_4 &\equiv \text{Point } Z'. \end{aligned}$$

La notation correspondante est

$$OZ \rightsquigarrow O', \quad OZ \rightsquigarrow Z', \quad (\alpha_2) \rightsquigarrow O', \quad (\alpha_1) \rightsquigarrow (\alpha'_1).$$

Même remarque que ci-dessus, en ce qui concerne les coïncidences des points  $O'$  et  $(\alpha'_1)$  respectivement avec les points  $(\alpha_2)$  et  $(\alpha_1)$ . Ces coïncidences équivalent simplement au contact des perpendiculaires à  $O'Z'$  élevées en  $O'$  et en  $(\alpha'_1)$  avec les points  $(\alpha_2)$  et  $(\alpha_1)$ .

On peut aussi remarquer que si l'on remplaçait la réglette mobile par un transparent sur lequel seraient tracées, par les points de division de  $O'Z'$ , des perpendiculaires à cet axe, on pourrait imprimer à ce transparent une translation quelconque parallèlement à ces lignes; dès lors, l'orientation du transparent étant maintenue par l'obligation, pour la perpendiculaire élevée en  $O'$  à  $O'Z'$ , d'être en contact avec le point  $P_\infty$  à l'infini sur le plan fixe dans la direction perpendiculaire à  $OZ$ , le dernier contact qui avait pour objet d'assurer la coïncidence des axes  $OZ$  et  $O'Z'$  peut être supprimé, et l'on tombe sur un abaque du sous-genre  $V'_3$  ainsi dénoté,  $O'$  représentant maintenant la perpendiculaire en  $O'$  à  $O'Z'$ :

$$(\alpha_1) \rightsquigarrow (\alpha'_1), \quad (\alpha_2) \rightsquigarrow O', \quad P_\infty \rightsquigarrow O', \quad \gg \rightsquigarrow \gg.$$

TROISIÈME EXEMPLE : *Abaques polaires de M. Pesci* (1). — Un axe gradué  $O'X'$ , mobile autour du point  $O$  avec lequel coïncide son origine  $O'$ , passe par le point coté  $(\alpha_2)$  lorsque le point coté  $(\alpha'_1)$  de cet axe se trouve sur la courbe cotée  $(\alpha_1)$  (*fig. 4*). Si nous appelons  $OX$  et  $OY$  deux axes quelconques passant par l'origine  $O$ , nous voyons que le genre  $V_3$  ci-dessus donne ce dernier type

---

(1) *Rivista marittima*, mars 1897. Exemple particulier généralisé depuis lors.

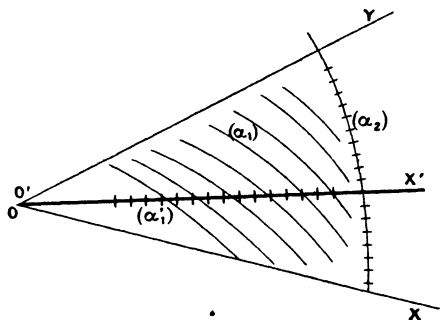
lorsque

$(\alpha_1) \equiv$  Courbe  $(\alpha_1)$ ,  $(\alpha_2) \equiv$  Point  $(\alpha_2)$ ,  $E_3 \equiv$  axe OX,  $E_4 \equiv$  axe OY,  
 $(\alpha'_1) \equiv$  Point  $(\alpha'_1)$ ,  $E'_2 \equiv$  Axe O'X',  $E'_3 \equiv E'_4 \equiv$  Point O',

d'où la notation

$(\alpha_1) \equiv (\alpha'_1)$ ,  $(\alpha_2) \equiv O'X'$ , OX  $\equiv$  O', OY  $\equiv$  O'.

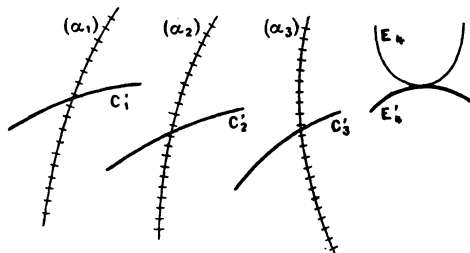
Fig. 4.



8. Arrêtons-nous un peu aux types d'abaques à trois variables ne comportant comme éléments cotés que des points à une cote. Nous avons vu dans la Remarque III du n° 5 que ces types dérivent de VI<sub>3</sub>, VI'<sub>3</sub> et VII<sub>3</sub>.

A. Lorsque, dans le genre VI<sub>3</sub>, nous supposons que les trois systèmes d'éléments cotés sont des systèmes de points à une cote

Fig. 5.



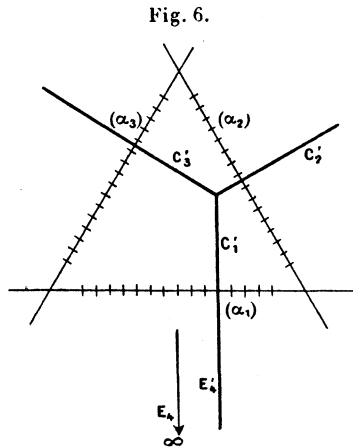
$(\alpha_1)$ ,  $(\alpha_2)$  et  $(\alpha_3)$ , nous obtenons un abaque ainsi constitué (fig. 5):

Plan  $\pi$  : Trois systèmes de points à une cote  $(\alpha_1)$ ,  $(\alpha_2)$ ,  $(\alpha_3)$ ; un élément quelconque sans cote  $E_4$ .

*Plan  $\pi$*  : Trois courbes sans cote  $C'_1, C'_2, C'_3$ ; un élément quelconque sans cote  $E'_4$ .

*Mode de liaison* :  $(\alpha_1) \mapsto C'_1, (\alpha_2) \mapsto C'_2, (\alpha_3) \mapsto C'_3, E_4 \mapsto E'_4$ .

PREMIER EXEMPLE : Si les supports des systèmes  $(\alpha_1), (\alpha_2), (\alpha_3)$  sont les côtés d'un triangle équilatéral, si l'élément  $E_4$  est le point à l'infini dans la direction perpendiculaire à l'axe  $(\alpha_1)$ , si les courbes  $C'_1, C'_2, C'_3$  sont les diagonales d'un hexagone régulier, et



si l'élément  $E'_4$  se confond avec la diagonale  $C'_1$ , on retrouve le type des *abaques hexagonaux* de M. Lallemand <sup>(1)</sup> (*fig. 6*), applicables aux équations de la forme

$$f_1(\alpha_1) + f_2(\alpha_2) + f_3(\alpha_3) = 0.$$

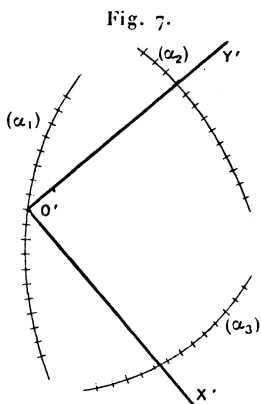
DEUXIÈME EXEMPLE : Si les courbes  $C'_1$  et  $C'_3$  coïncident avec un côté  $O'X'$  d'un angle droit, la courbe  $C'_2$  avec l'autre côté  $O'Y'$  de cet angle droit, et si l'élément  $E'_4$  se confond avec le sommet  $O'$  de cet angle, l'élément  $E_4$  n'étant autre que la courbe même qui porte les points  $(\alpha_1)$ , on retrouve le type des *abaques à équerre* de M. Gædseels <sup>(2)</sup> (*fig. 7*), applicables aux équations de la forme

$$[f_2(\alpha_2) - f_1(\alpha_1)] [f_3(\alpha_3) - f_1(\alpha_1)] + [\varphi_2(\alpha_2) - \varphi_1(\alpha_1)] [\varphi_3(\alpha_3) - \varphi_1(\alpha_1)] = 0.$$

<sup>(1)</sup> *Nomographie*, Ch. III.

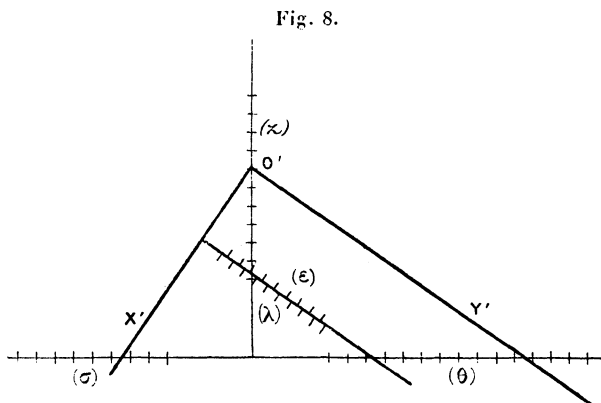
<sup>(2)</sup> *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, année 1898.

La partie du profilomètre Siégler (<sup>1</sup>), destinée à faire connaître l'aire d'un demi-profil, en est une variété dans laquelle  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et



$\alpha_3$  étant remplacés par la cote  $z$ , la déclivité  $\theta$  et l'aire  $\sigma$ , les points  $(z)$  sont distribués sur une droite, les points  $(\theta)$  et  $(\sigma)$  sur une seconde droite perpendiculaire à la première et de part et d'autre de celle-ci (fig. 8).

B. Lorsque, dans le genre  $VI_3$ , nous supposons que les trois



systemes d'éléments cotés sont des points à une cote, nous obten-

(<sup>1</sup>) *Annales des Ponts et Chaussées*, 1<sup>er</sup> semestre 1881, p. 98. Nous avons signalé dans notre *Nomographie* (p. 94) la possibilité de rattacher ce profilomètre aux abaques.



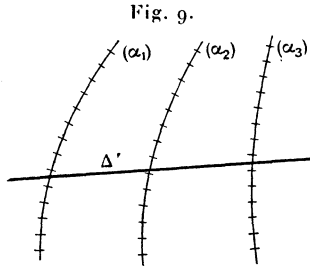
nous un abaque ainsi constitué :

*Plan  $\pi$*  : Trois systèmes de points à une cote,  $(\alpha_1), (\alpha_2), (\alpha_3)$ .

*Plan  $\pi'$*  : Trois cercles concentriques  $\Gamma'_1, \Gamma'_2, \Gamma'_3$ .

*Mode de liaison* :  $(\alpha_1) \dashv \Gamma'_1, (\alpha_2) \dashv \Gamma'_2, (\alpha_3) \dashv \Gamma'_3, \dots$

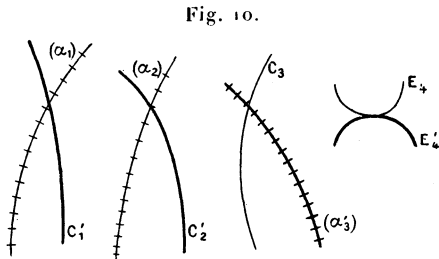
EXEMPLE : Si les cercles  $\Gamma'_1, \Gamma'_2, \Gamma'_3$  viennent à coïncider et que leur rayon augmente indéfiniment, ils se réduisent à une droite unique  $\Delta'$ , et l'on obtient les diagrammes connus sous le nom d'abaques à points isoplèthes <sup>(1)</sup> qui, après l'extension donnée



ici à l'emploi des points cotés, devraient plutôt se nommer *abaques à points alignés* (fig. 9). Ils sont, comme on sait, applicables aux équations de la forme <sup>(2)</sup>

$$\begin{vmatrix} f_1(\alpha_1) & \varphi_1(\alpha_1) & \psi_1(\alpha_1) \\ f_2(\alpha_2) & \varphi_2(\alpha_2) & \psi_2(\alpha_2) \\ f_3(\alpha_3) & \varphi_3(\alpha_3) & \psi_3(\alpha_3) \end{vmatrix} = 0.$$

C. Réduisons enfin, dans le genre VII<sub>3</sub> les divers éléments



<sup>(1)</sup> *Nomographie*, Ch. IV.

<sup>(2)</sup> Sur les exemples d'application de cette méthode, voir un article paru dans le numéro du 15 février 1898 de la *Revue générale des Sciences* (p. 116).

cotés à des points à une cote. Voici ce que nous obtenons (*fig.* 10) :

*Plan  $\pi$*  : Deux systèmes de points à une cote ( $\alpha_1$ ) et ( $\alpha_2$ ), une courbe sans cote  $C_3$  un élément quelconque sans cote  $E_4$ .

*Plan  $\pi'$*  : Un système de points à une cote ( $\alpha'_3$ ), deux courbes sans cote  $C'_1$  et  $C'_2$ , un élément quelconque sans cote  $E'_4$ .

*Mode de liaison* : ( $\alpha_1$ ) $\rightarrow$  $C'_1$ , ( $\alpha_2$ ) $\rightarrow$  $C'_2$ ,  $C_3$  $\rightarrow$ ( $\alpha'_3$ ),  $E_4$  $\rightarrow$  $E'_4$ .

EXEMPLE. — La partie du profilomètre Siégler déjà cité, destinée à faire connaître les largeurs d'emprise et les longueurs de talus, rentre dans ce type d'abaque. Ici, les graduations ( $\alpha_1$ ) et ( $\alpha_2$ ) sont les graduations ( $z$ ) et ( $\theta$ ) (*fig.* 8), la droite portant la graduation ( $z$ ) sert à la fois de courbe  $C_3$  et d'élément  $E_4$ , les courbes  $C'_1$  et  $C'_2$  sont les côtés  $O'X'$  et  $O'Y'$  de l'angle droit mobile dont l'élément  $E'_4$  est le sommet  $O'$ , enfin les points ( $\alpha'_3$ ) qui sont à la fois des points ( $\varepsilon$ ) et ( $\lambda$ ) sont distribués sur une droite parallèle à  $O'Y'$ .

### III. — ÉQUATIONS A 4 VARIABLES.

9. Pour les équations à 4 variables, tous les genres possibles sont donnés par le Tableau suivant :

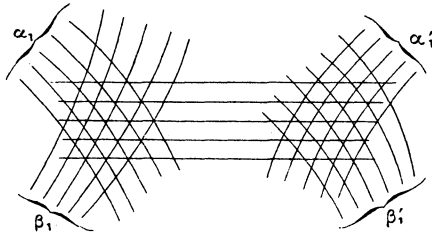
I <sub>4</sub> .....	4 1 0	0 1 0	0 1 0	0 1 0
II <sub>4</sub> .....	3 1 1	0 1 0	0 1 0	0 1 0
III <sub>4</sub> .....	3 1 0	1 1 0	0 1 0	0 1 0
IV <sub>4</sub> .....	3 1 0	0 1 1	0 1 0	0 1 0
V <sub>4</sub> .....	2 1 2	0 1 0	0 1 0	0 1 0
VI <sub>4</sub> .....	2 1 1	1 1 0	0 1 0	0 1 0
VII <sub>4</sub> .....	2 1 1	0 1 1	0 1 0	0 1 0
VIII <sub>4</sub> .....	2 1 0	2 1 0	0 1 0	0 1 0
IX <sub>4</sub> .....	2 1 0	1 1 1	0 1 0	0 1 0
X <sub>4</sub> .....	2 1 0	1 1 0	1 1 0	0 1 0
XI <sub>4</sub> .....	2 1 0	1 1 0	0 1 1	0 1 0
XII <sub>4</sub> .....	2 1 0	0 1 2	0 1 0	0 1 0
XIII <sub>4</sub> .....	2 1 0	0 1 1	0 1 1	0 1 0
XIV <sub>4</sub> .....	1 1 1	1 1 1	0 1 0	0 1 0
XV <sub>4</sub> .....	1 1 1	1 1 0	1 1 0	0 1 0
XVI <sub>4</sub> .....	1 1 1	1 1 0	0 1 1	0 1 0
XVII <sub>4</sub> .....	1 1 0	1 1 0	1 1 0	1 1 0
XVIII <sub>4</sub> .....	1 1 0	1 1 0	1 1 0	0 1 1
XIX <sub>4</sub> .....	1 1 0	1 1 0	0 1 1	0 1 1

La *Remarque I* du n° 5 est applicable aux genres  $I_4$ ,  $II_4$ , et  $V_4$ , la *Remarque II* à tous les autres, à l'exception des trois derniers auxquels s'applique la *Remarque III*. Les abaques à 4 variables ne comportant comme éléments cotés que des points à une cote appartiennent donc aux seuls genres  $XVII_4$ ,  $XVIII_4$  et  $XIX_4$ .

Nous allons, comme dans le cas de trois variables, examiner quelques cas particuliers, mais nous devons auparavant présenter cette observation capitale que le type général d'équation correspondant à chacun des dix-neuf genres ci-dessus présente un caractère fonctionnel spécial. En d'autres termes, *on ne saurait, au moyen de deux plans superposés à éléments cotés, représenter une équation à 4 variables QUELCONQUE.*

10. Dans le genre  $V_4$ , où les deux plans se réduisent à un seul, puisque trois contacts entre éléments sans cote s'opposent à tout déplacement relatif, supposons que l'un des systèmes à deux cotes soit constitué par des points  $(\alpha_1, \beta_1)$ , l'autre par des droites pa-

Fig. 11.



rallèles  $(\alpha'_1, \beta'_1)$ . Nous obtenons ainsi un abaque du type représenté par la *fig. 11*, applicable aux équations de la forme <sup>(1)</sup>

$$f(\alpha_1, \beta_1) = \varphi(\alpha'_1, \beta'_1).$$

Le genre  $VIII_4$  comprend les abaques ainsi constitués :

*Plan  $\pi$*  : Deux éléments à deux cotes  $(\alpha_1, \beta_1)$ ,  $(\alpha_2, \beta_2)$ ; deux éléments sans cote  $E_3, E_4$ .

*Plan  $\pi'$*  : Quatre éléments sans cote  $E'_1, E'_2, E'_3, E'_4$ .

*Mode de liaison* :  $(\alpha_1, \beta_1) \dashv E'_1$ ,  $(\alpha_2, \beta_2) \dashv E'_2$ ,  $E_3 \dashv E'_3$ ,  $E_4 \dashv E'_4$ .

(<sup>1</sup>) *Nomographie*, p. 19.

EXEMPLE. — M. G. Pesci a proposé un type d'abaque représenté par la *fig.* 12 qui se déduit du genre précédent ainsi qu'il suit :

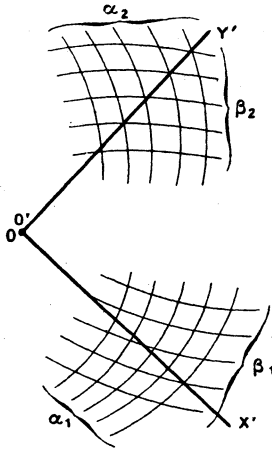
$$\begin{aligned} (\alpha_1, \beta_1) \equiv \text{point}(\alpha_1, \beta_1), \quad (\alpha_2, \beta_2) \equiv \text{point}(\alpha_2, \beta_2), \quad E_3 \equiv E_4 \equiv \text{point } O, \\ E'_1 \equiv E'_3 \equiv \text{axe } O'X', \quad E'_2 \equiv E'_4 \equiv O'Y'. \end{aligned}$$

Un tel type d'abaque s'applique à toute équation de la forme

$$k[f_1(\alpha_1)f_2(\alpha_2) + \varphi_1(\alpha_1)\varphi_2(\alpha_2)] + f_1(\alpha_1)\varphi_2(\alpha_2) - \varphi_1(\alpha_1)f_2(\alpha_2) = 0.$$

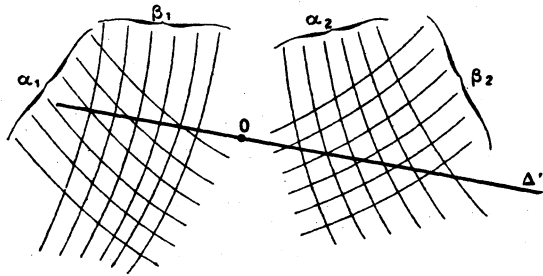
Si, dans le sous-genre VIII<sub>4</sub>, on suppose les trois cercles con-

Fig. 12.



centriques réduits à une même droite  $\Delta'$ , l'élément non coté du

Fig. 13.



plan  $\pi$  étant un point  $O$  et ses éléments à deux cotes des points

$(\alpha_1, \beta_1)$  et  $(\alpha_2, \beta_2)$ , on obtient le type représenté par la *fig. 13*, également proposé par M. Pesci, et qui s'applique aux équations de la forme

$$f_1(\alpha_1, \beta_1) \varphi_2(\alpha_2, \beta_2) = \varphi_1(\alpha_1, \beta_1) f_2(\alpha_2, \beta_2).$$

Les abaqués hexagonaux et les abaqués à points alignés pour 4 variables se déduisent respectivement du genre  $X_4$  et du sous-genre  $X'_4$  comme ceux pour 3 variables ont été déduits de  $VI_3$  et de  $VI'_3$ . Les figures correspondantes s'obtiendraient en remplaçant, sur les *fig. 6* et *9*, l'un des systèmes de points à une cote par un système de points à deux cotes.

11. De même que pour les équations à 3 variables nous avons fait voir comment un procédé particulier (n° 7, 1<sup>er</sup> *Exemple*) pouvait se rattacher à notre classification générale, nous allons examiner à ce point de vue le procédé de M. Massau pour la résolution de l'équation complète du troisième degré (1)

$$z^3 + n z^2 + p z + q = 0.$$

Considérons sur un plan la parabole P, enveloppe des droites dont l'équation cartésienne est

$$z^2 + zx + y = 0,$$

et prenons dans son plan le point M dont les coordonnées sont  $x = n - q, y = p$  (*fig. 14*).

Cela fait, déplaçons un angle droit de façon que, son sommet décrivant la droite  $x = n$ , son côté O'X' passe constamment par le point M. Lorsque, dans ce déplacement, le côté O'Y' devient tangent à la parabole P, la cote de la droite (z) avec laquelle il coïncide est une racine de l'équation proposée.

Pour classer ce procédé parmi les abaqués, il suffit : 1° de considérer le point M comme défini par les deux cotes  $n - q$  et  $p$ ; 2° d'inscrire la valeur de chaque cote  $z$  à côté du point de tangence sur P de la droite (z) correspondante.

On voit alors immédiatement que l'on a affaire à un abaque du

---

(1) *Mémoire sur l'intégration graphique*, Livre III, p. 28. On trouvera dans notre *Nomographie* (p. 81) un abaque beaucoup plus simple pour la même équation, construit d'après la méthode des points alignés.

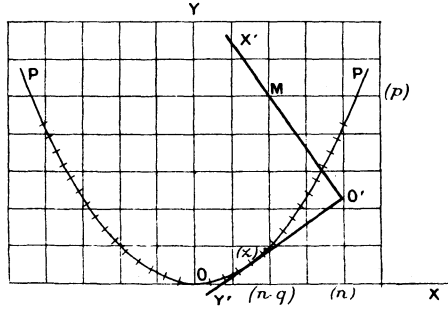
genre  $X_4$ . Un tel abaque est, en effet, ainsi constitué :

*Plan  $\pi$*  : Un élément à deux cotes  $(\alpha_1, \beta_1)$ ; deux éléments à une cote  $(\alpha_2)$  et  $(\alpha_3)$ ; un élément sans cote  $E_4$ .

*Plan  $\pi'$*  : Quatre éléments sans cote  $E'_1, E'_2, E'_3, E'_4$ .

*Mode de liaison* :  $(\alpha_1, \beta_1) \mapsto E'_1, (\alpha_2) \mapsto E'_2, (\alpha_3) \mapsto E'_3, E_4 \mapsto E'_4$ .

Fig. 14.

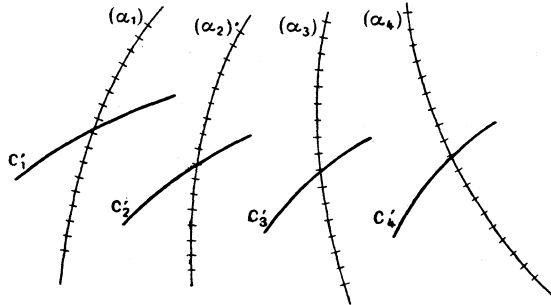


Pour obtenir le procédé Massau ci-dessus il suffit d'opérer les identifications que voici :

$$\begin{aligned} (\alpha_1, \beta_1) &\equiv \text{point}(n - q, p), & (\alpha_2) &\equiv \text{droite}(n), \\ (\alpha_3) &\equiv \text{point}(x) & E_4 &\equiv \text{parabole } P, \\ E'_1 &\equiv \text{axe } O'X', & E'_2 &\equiv \text{point } O', & E'_3 &\equiv E'_4 \equiv \text{axe } O'Y'. \end{aligned}$$

12. Considérons maintenant les abaques à 4 variables dont les seuls éléments cotés soient des points à une cote. Nous avons déjà dit au n° 9 qu'ils dérivent des genres  $XVII_4, XVIII_4$  et  $XIX_4$ .

Fig. 15.



A. *Genre  $XVII_4$* . — L'abaque (fig. 15) est ainsi constitué :

*Plan  $\pi$*  : Quatre systèmes de points à une cote  $(\alpha_1), (\alpha_2), (\alpha_3), (\alpha_4)$ .

*Plan  $\pi'$*  : Quatre courbes sans cote  $C'_1, C'_2, C'_3, C'_4$ .

*Mode de liaison* :  $(\alpha_1) \dashv C'_1, (\alpha_2) \dashv C'_2, (\alpha_3) \dashv C'_3; (\alpha_4) \dashv C'_4$ .

Si les courbes  $C'_1, C'_2, C'_3, C'_4$  se confondent en une seule, on obtient les *abaques à transversale quelconque* de M. Gædseels (<sup>1</sup>).

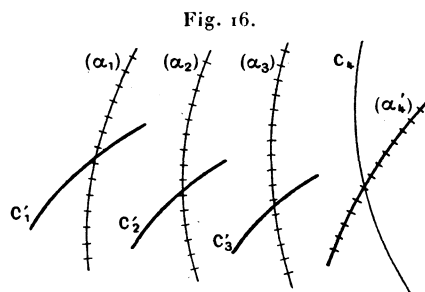
B. *Genre XVIII<sub>4</sub>*. — L'abaque (*fig. 16*) est ainsi constitué :

*Plan  $\pi$*  ; Trois systèmes de points à une cote  $(\alpha_1), (\alpha_2), (\alpha_3)$ ; une courbe sans cote  $C_4$ .

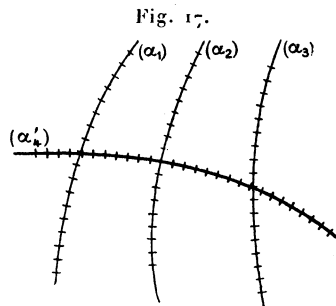
*Plan  $\pi'$*  : Un système de points à une cote  $(\alpha'_4)$ ; trois courbes sans cote  $C_1, C_2, C_3$ .

*Mode de liaison* :  $(\alpha_1) \dashv C_1, (\alpha_2) \dashv C_2, (\alpha_3) \dashv C_3, C_4 \dashv (\alpha'_4)$ .

Si la courbe  $C_4$  se confond avec le support du système  $(\alpha_1)$  et



les courbes  $C_1, C_2, C_3$  avec le support du système  $(\alpha'_4)$  on obtient



le type représenté par la *fig. 17*, qui a été également proposé par M. Gædseels.

(<sup>1</sup>) *Loc. cit.*

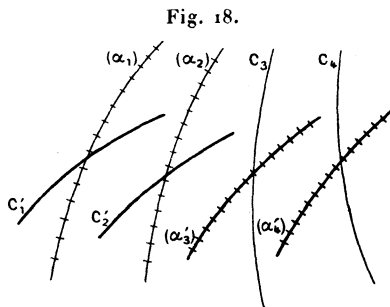
C. Genre XIX<sub>4</sub>. — L'abaque (*fig.* 18) est ainsi constitué :

*Plan*  $\pi$  : Deux systèmes de points à une cote  $(\alpha_1)$  et  $(\alpha_2)$ ; deux courbes sans cote  $C_3$  et  $C_4$ .

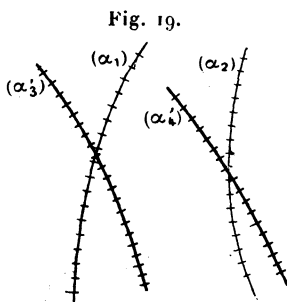
*Plan*  $\pi'$  : Deux systèmes de points à une cote  $(\alpha'_3)$  et  $(\alpha'_4)$ ; deux courbes sans cote  $C'_1$  et  $C'_2$ .

*Mode de liaison* :  $(\alpha_1) \rightarrow C'_1$ ,  $(\alpha_2) \rightarrow C'_2$ ,  $C_3 \rightarrow (\alpha'_3)$ ,  $C_4 \rightarrow (\alpha'_4)$ .

Si la courbe  $C_3$  se confond avec le support du système  $(\alpha_1)$ ,



$C_4$  avec celui de  $(\alpha_2)$ ,  $C'_1$  avec celui de  $(\alpha'_3)$ ,  $C'_2$  avec celui de  $(\alpha'_4)$ .



on obtient le type représenté par la *fig.* 19, encore proposé par M. Gædseels:

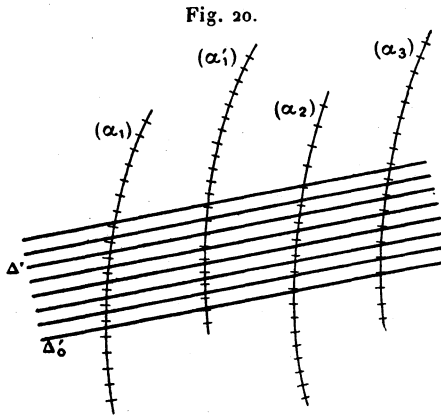
13. Nous ferons enfin remarquer que l'on peut encore obtenir des types d'abaques à  $n$  variables de la façon suivante : Considérons un type d'abaque à  $m$  variables ( $m > n$ ) et supposons que nous prenions pour  $m - n + 1$  des variables qui y figurent des valeurs égales entre elles. Nous obtiendrons ainsi la représentation d'une équation à  $n$  variables, mais ce sera en réalité au moyen d'un abaque à  $m$  variables.



Il est d'ailleurs essentiel de remarquer que *l'une des variables entrant dans l'équation ne peut* (à moins que l'on n'opère par tâtonnements) *être prise comme inconnue que si elle ne correspond sur l'abaque qu'à un seul système d'éléments cotés.*

L'avantage qu'il pourra y avoir, le cas échéant, à recourir à un tel mode de représentation tiendra à la possibilité de substituer à un diagramme sur lequel figureraient des courbes cotées, un autre diagramme sur lequel les seuls éléments cotés seront des points à une cote.

Comme exemple d'une telle méthode nous citerons celle de M. Beghin <sup>(1)</sup> : considérons sur un plan quatre systèmes de points à une cote  $(\alpha_1)$ ,  $(\alpha_2)$ ,  $(\alpha_3)$  et  $(\alpha'_1)$  et appliquons sur ce plan un transparent portant une série de droites parallèles (*fig. 20*). Si



l'on fait passer une de ces droites  $\Delta'_0$  par les points  $(\alpha_1)$  et  $(\alpha_2)$ , une autre  $\Delta'$  passera par le point  $(\alpha'_1)$  et cette droite  $\Delta'$  coupera alors la quatrième échelle en un point dont il suffira de lire la cote  $\alpha_3$ . On voit que le point  $\alpha'_1$  peut être considéré comme fixant la cote de la parallèle  $\Delta'$ , en vertu de la remarque qui termine le n° 3. C'est donc là un abaque à *alternance* pour lequel la cote  $\alpha'_1$ , quoique inscrite sur le plan  $\pi$ , se réfère au plan  $\pi'$ , et, suivant la convention faite dans la remarque citée, cet abaque pourra être dénoté de la façon suivante

$$(\alpha_1) \equiv \Delta'_0, \quad (\alpha_2) \equiv \Delta'_0, \quad (\alpha_3) \equiv \widehat{(\alpha'_1)}, \quad \text{»} \equiv \text{»}.$$

(<sup>1</sup>) *Génie civil*, 24 décembre 1892.

C'est donc, en somme, un abaque du sous-genre  $XV'_4$  (n° 9) à alternance. Il s'applique aux équations de la forme

$$[f_2(\alpha_2) - f_1(\alpha_1)] [\varphi_3(\alpha_3) - \psi_1(\alpha'_1)] = [\varphi_2(\alpha_2) - \varphi_1(\alpha_1)] [f_3(\alpha_3) - g_1(\alpha'_1)].$$

Si l'on donne à  $\alpha_1$  et à  $\alpha'_1$  des valeurs égales on obtient la méthode de M. Beghin applicable aux équations à 3 variables qui rentrent dans le type précédent lorsque l'on y fait  $\alpha_1 = \alpha'_1$ . Cet auteur a précisément imaginé cette méthode pour représenter uniquement au moyen de systèmes de points à une cote une équation de forme particulière (*loc. cit.*).

#### IV. — PLANS SUPERPOSÉS EN NOMBRE QUELCONQUE.

14. Une étude analogue pourrait être entreprise en ce qui concerne la superposition non plus de deux mais d'un nombre quelconque de plans. Elle dériverait encore du principe général énoncé au début de ce Mémoire, de la façon suivante : le plan  $\pi$  étant considéré comme fixe, la position du plan  $\pi'$  sera définie par les contacts de trois de ses éléments avec trois éléments pris sur le plan  $\pi$  ainsi que cela a été expliqué au n° 2. Ces plans étant ainsi rendus solidaires l'un de l'autre, nous représenterons leur ensemble par  $(\pi, \pi')$ , et nous définirons ensuite la position du plan  $\pi''$  par les contacts de trois de ses éléments avec trois éléments appartenant à l'ensemble  $(\pi, \pi')$ , c'est-à-dire pouvant indifféremment faire corps avec le plan  $\pi$  ou avec le plan  $\pi'$ . De même, trois nouveaux contacts fixeront la position du plan  $\pi'''$  par rapport à l'ensemble  $(\pi, \pi', \pi'')$ , et ainsi de suite jusqu'au plan  $\pi^{(m)}$ . On pourra alors constater qu'il se sera produit, en dehors des  $3m$  contacts ayant servi à définir l'ensemble  $(\pi, \pi', \pi'', \dots, \pi^{(m)})$ , un dernier contact entre un élément pris sur le plan  $\pi^{(m)}$  et un élément appartenant à l'ensemble  $(\pi, \pi', \pi'', \dots, \pi^{(m-1)})$ . De là résultera un abaque de l'équation par laquelle se trouvent liées les cotes des  $6m + 2$  éléments intervenant dans les  $3m + 1$  contacts dont il vient d'être question.

Il n'y a évidemment aucun intérêt pratique à envisager d'une manière générale des abaques obtenus par superposition d'un grand nombre de plans, mais cette extension permet de faire rentrer dans la théorie générale certains abaques qui ne peuvent

être obtenus par la simple superposition de deux plans, à savoir ceux qui comportent plus de deux systèmes d'éléments variables les uns par rapport aux autres. Nous allons en indiquer quelques exemples.

15. PREMIER EXEMPLE. — Supposons qu'une équation à quatre variables  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  résulte de l'élimination d'une variable auxiliaire  $\alpha$  entre deux équations de la forme

$$\left| \begin{array}{ccc} f(\alpha) & \varphi(\alpha) & \psi(\alpha) \\ f_1(\alpha_1) & \varphi_1(\alpha_1) & \psi_1(\alpha_1) \\ f_2(\alpha_2) & \varphi_2(\alpha_2) & \psi_2(\alpha_2) \end{array} \right| = 0, \quad \left| \begin{array}{ccc} f(\alpha) & \varphi(\alpha) & \psi(\alpha) \\ f_3(\alpha_3) & \varphi_3(\alpha_3) & \psi_3(\alpha_3) \\ f_4(\alpha_4) & \varphi_4(\alpha_4) & \psi_4(\alpha_4) \end{array} \right| = 0.$$

Chacune de ces équations donnera lieu à un abaque à *points alignés* (n° 8, B, *Ex.*). Nous pourrions construire ces deux abaques sur un même plan en faisant coïncider leurs échelles ( $\alpha$ ) qui sont identiques; de plus, comme la valeur de la variable auxiliaire  $\alpha$  n'intervient pas, nous n'aurons pas à marquer la graduation correspondante dont il nous suffira de tracer le support qui sera une certaine courbe C.

Dès lors le mode d'emploi de l'abaque, si la variable  $\alpha_4$  est prise pour inconnue, sera le suivant : *Une droite D<sub>1,2</sub> passant par les points ( $\alpha_1$ ) et ( $\alpha_2$ ) coupe la courbe C en un point P; la droite D<sub>3,4</sub> passant par le point P et le point ( $\alpha_3$ ) coupe la dernière échelle au point ( $\alpha_4$ ).*

On peut, pour réaliser ce mode d'emploi, se servir d'une droite mobile (fil tendu; index sur un transparent) qu'on fait coïncider successivement avec la droite D<sub>1,2</sub> et la droite D<sub>3,4</sub> en la faisant pivoter autour du point P qui est dit le *pivot*. La courbe C est dite de même *courbe des pivots*, et l'abaque peut être désigné comme un *abaque à pivotement* (1). Mais on voit que le mode d'emploi d'un tel abaque peut encore être réalisé au moyen d'une droite D'<sub>1,2</sub> tracée sur un premier transparent  $\pi'$  et d'une droite D''<sub>3,4</sub> tracée sur un second transparent  $\pi''$ . Cela montre que cet abaque

---

(1) Nous avons déjà eu occasion de faire construire un certain nombre d'abaques de ce genre, le type d'équation auquel ils s'appliquent étant très fréquent dans la pratique. On en trouvera notamment une application à la nouvelle formule de M. Bazin, relative à l'écoulement de l'eau dans les canaux découverts, dans la livraison du 1<sup>er</sup> trimestre 1898 des *Annales des Ponts et Chaussées*.

appartient à la catégorie de ceux qui sont obtenus au moyen de trois plans superposés. Pour mettre en évidence le rôle symétrique que jouent ici les quatre variables, l'abaque pourra, avec les notations définies dans la Section I de ce Mémoire, être dénoté comme suit :

$$\left. \begin{array}{lll} (\alpha_1) \mapsto D'_{12}, & (\alpha_2) \mapsto D'_{12}, & \text{»} \mapsto \text{»} \\ (\alpha_3) \mapsto D''_{34}, & (\alpha_4) \mapsto D''_{34}, & \text{»} \mapsto \text{»} \end{array} \right\} C \mapsto (D_{12}, D''_{34}),$$

( $D'_{12}, D''_{34}$ ) désignant le point commun aux droites  $D'_{12}$  et  $D''_{34}$ .

SECOND EXEMPLE. — L'abaque à échelles mobiles, construit par M. Lallemand pour le calcul de la correction des erreurs de division des mires dans les nivellements de précision (<sup>1</sup>), fournit un exemple d'abaque à quatre plans superposés.

Il comprend, en effet : 1° un plan  $\pi$  portant, sur deux arcs de cercle de centres  $O_1$  et  $O_2$ , des graduations ( $\mu_1$ ) et ( $\mu_2$ ) correspondant aux indices de compensation des deux mires, et une règle-guide dont le bord sera désigné par  $OY$ ; 2° deux disques  $\pi'$  et  $\pi''$  mobiles respectivement autour des points fixes  $O_1$  et  $O_2$  et portant, outre des index  $O'Y'$  et  $O''Y''$ , des courbes graduées ( $H'$ ) et ( $H''$ ) correspondant aux lectures faites respectivement sur les deux mires; 3° un transparent (en celluloïd)  $\pi'''$  dont un bord rectiligne  $O'''Y'''$  glisse le long de  $OY$ , et sur lequel sont tracées des droites parallèles graduées ( $E'''$ ) dont les cotes représentent la correction cherchée, la droite de cote 0 étant prise comme axe  $O'''X'''$ .

Le mode d'emploi de l'abaque est le suivant : *Ayant arrêté les disques dans des positions telles que les index  $O'Y'$  et  $O''Y''$  marquent sur les graduations ( $\mu_1$ ) et ( $\mu_2$ ) les valeurs des indices de compensation des mires, on amène l'axe  $O'''X'''$  du transparent à être tangent à la courbe ( $H'$ ) dont la cote est la lecture faite sur la première mire. La courbe ( $H''$ ), dont la cote est la lecture faite sur la seconde mire, est alors tangente*

---

(<sup>1</sup>) *Nivellement de haute précision*, par M. Ch. Lallemand, dans l'*Encyclopédie des Travaux publics* (p. 149 du tirage à part). Le lecteur fera bien, pour suivre l'explication donnée ici, de recourir à un croquis schématique fait en quatre couleurs correspondant respectivement aux quatre plans  $\pi$ ,  $\pi'$ ,  $\pi''$ ,  $\pi'''$ .

à une des parallèles ( $E'''$ ) du transparent, dont la cote est la correction demandée.

Si nous prenons sur les plans  $\pi'$  et  $\pi''$  des axes  $O'X'$  et  $O''X''$  quelconques, nous voyons que la notation de l'abaque est dès lors la suivante :

$$\begin{array}{lll} O_1 \mapsto O'X', & O_1 \mapsto O'Y', & (\mu_1) \mapsto O'Y', \\ O_2 \mapsto O''X'', & O_2 \mapsto O''Y'', & (\mu_2) \mapsto O''Y'', \\ O \mapsto O'''Y''', & Y \mapsto O'''Y''', & (H') \mapsto O'''X''', \quad (H'') \mapsto (E'''). \end{array}$$

AUTRES EXEMPLES. — Dans son Mémoire déjà cité, M. Gœdseels signale certains types d'abaques à plusieurs transversales qui peuvent encore être considérés comme résultant de la superposition de plusieurs plans.

Enfin, divers ingénieux instruments de calcul, dus à M. F.-J. Vaes, se ramènent immédiatement aussi aux abaques à plusieurs plans superposés, notamment une règle à glissières servant au calcul d'une formule de traction des locomotives (<sup>1</sup>).

Nous reviendrons avec plus de détail sur ces divers points dans le *Traité de Nomographie* que nous préparons en ce moment.

---

(<sup>1</sup>) La description de cette règle a paru dans le Recueil hollandais *De Ingenieur* (numéros des 10 et 17 avril 1897).