BULLETIN DE LA S. M. F.

ISSALY.

Sur une formule d'Enneper et sa corrélative

Bulletin de la S. M. F., tome 26 (1898), p. 114-124
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1898__26__114_1>

SUR UNE FORMULE D'ENNEPER ET SA CORRÉLATIVE;

Par M. l'abbé Issaly.

La formule d'Enneper, que nous avons en vue, est celle-ci

$$\tau_0 = \pm\sqrt{-RR'}, \tag{1}$$

dans laquelle R et R′ désignent les rayons principaux d'une *surface,* en un quelconque de ses points, et τ_0 le rayon de torsion des deux lignes asymptotiques qui s'y croisent.

Dans la formule corrélative

$$\tau'' = \pm\sqrt{-R_1 R'_1}, \tag{1'}$$

R_1 et R'_1 désigneront encore des rayons principaux, mais d'espèce différente de celle des premiers, et relatifs à une *pseudo-surface minima*. Quant à τ'', il sera le rayon de torsion des deux lignes de courbure qui se coupent en chacun des points d'une *telle* pseudo-surface.

I. *Première formule.* — Soit (S) une courbe tracée sur une pseudo-surface $\mathfrak{F}''$, supposée tout d'abord quelconque. D'après notre précédente Note : *Sur une formule de Laguerre,* etc. (1897), la première courbure de profil ou normale $\frac{1}{\rho''}$, et la première courbure de front ou *torsion géodésique* $\frac{1}{\rho_0}$ de (S), en un point M, que nous prendrons à nouveau pour origine, peuvent s'écrire

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\sin\Phi}{\rho''} = (p\sin\varphi' + p'\sin\varphi)\sin\varphi - (q\sin\varphi' + q'\sin\varphi)\sin\varphi', \\ \dfrac{\sin\Phi}{\rho_0} = (p\sin\varphi' + p'\sin\varphi)\cos\varphi + (q\sin\varphi' + q'\sin\varphi)\cos\varphi', \end{cases}$$

l'angle Φ des lignes coordonnées (s) et (s') étant assujetti à la condition

$$(3)\quad \Phi = \varphi + \varphi' = \text{const.}$$

On a d'ailleurs subsidiairement

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\rho''} = \dfrac{\cos\varpi}{\rho_\sigma} = -\dfrac{\cos\psi}{\rho_\varepsilon} = -\dfrac{1}{\tau_\upsilon} + \dfrac{d\chi}{dS}, \\ \dfrac{1}{\rho_0} = \dfrac{\cos\chi}{\rho_\upsilon} = \dfrac{\sin\psi}{\rho_\varepsilon} = -\dfrac{1}{\tau_\sigma} + \dfrac{d\varpi}{dS}. \end{cases}$$

Ceci rappelé, cherchons la relation générale qui doit nécessairement exister entre $\dfrac{1}{\rho''}$ et $\dfrac{1}{\rho_0}$.

A cet effet, si l'on considère, pour un instant, le système (2) comme un couple d'équations du premier degré, dont les inconnues seraient les binomes mis entre parenthèses, on en tirera

$$(2')\quad \begin{cases} p\sin\varphi' + p'\sin\varphi = \dfrac{\sin\varphi'}{\rho_0} + \dfrac{\cos\varphi'}{\rho''}, \\ q\sin\varphi' + q'\sin\varphi = \dfrac{\sin\varphi}{\rho_0} - \dfrac{\cos\varphi}{\rho''}, \end{cases}$$

avec cette particularité que, à cause de (3), on a aussi

$$(5)\quad \begin{cases} \cos\varphi\,\sin\Phi = \sin\varphi' + \sin\varphi\,\cos\Phi, \\ \cos\varphi'\sin\Phi = \sin\varphi + \sin\varphi'\cos\Phi. \end{cases}$$

Portant ces valeurs dans (2), on obtient le système homogène

$$(2'')\quad \begin{cases} \left(p'\sin\Phi - \dfrac{1}{\rho''}\right)\sin\varphi + \left[\left(p - \dfrac{1}{\rho_0}\right)\sin\Phi - \dfrac{\cos\Phi}{\rho''}\right]\sin\varphi' = 0, \\ \left[\left(q' - \dfrac{1}{\rho_0}\right)\sin\Phi + \dfrac{\cos\Phi}{\rho''}\right]\sin\varphi + \left(q\sin\Phi + \dfrac{1}{\rho''}\right)\sin\varphi' = 0. \end{cases}$$

Il n'y a plus qu'à égaler à zéro son déterminant pour en déduire la relation demandée, savoir

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}&\left(\frac{1}{\rho''^2}+\frac{1}{\rho_0^2}\right)+\left(\frac{q+p\cos\Phi}{\sin\Phi}-\frac{p'+q'\cos\Phi}{\sin\Phi}\right)\frac{1}{\rho''}\\ &\qquad -(p+q')\frac{1}{\rho_0}+(pq'-qp')=0.\end{aligned}\right.$$

Devant ce résultat, nous sommes naturellement conduit à poser

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}p+q\cos\Phi&=p_1\sin\Phi,\\ q+p\cos\Phi&=q_1\sin\Phi,\end{aligned}\right.$$

d'où

$$(7')\quad \left\{\begin{aligned}p_1-q_1\cos\Phi&=p\sin\Phi,\\ q_1-p_1\cos\Phi&=q\sin\Phi,\end{aligned}\right.$$

avec deux autres systèmes analogues en p', q', p'_1, q'_1. Or ceci, disons-le en passant, équivaut, pour toutes ces composantes, à un changement de coordonnées dans lequel on substituerait à l'angle XMY ou Φ actuel, son supplément X_1MY_1 ou $\pi-\Phi$.

Quoi qu'il en soit, on tire de là, comme première conséquence, l'identité

$$(8)\quad pq'-qp'=p_1q'_1-q_1p'_1=K'',$$

puis, finalement, cette forme plus simple de la relation (6) :

$$(6')\quad \left(\frac{1}{\rho''^2}+\frac{1}{\rho_0^2}\right)+(q_1-p'_1)\frac{1}{\rho''}-(p+q')\frac{1}{\rho_0}+K''=0,$$

forme qu'on pourrait réduire encore, mais sans avantage réel, en observant que la somme des deux premiers termes est, d'après (4), égale à $\frac{1}{\rho_\varepsilon^2}$, c'est-à-dire au carré de la *déviation verticale* de la ligne (S).

Parmi toutes les particularités que la relation (6') présente, nous en choisirons deux, savoir : celles où l'on a

$$\frac{1}{\rho''}=0 \qquad \text{ou bien} \qquad \frac{1}{\rho_0}=0.$$

Il vient alors *isolément*

$$(9)\quad \frac{1}{\rho_0^2}-(p+q')\frac{1}{\rho_0}+K''=0,$$

$$(10)\quad \frac{1}{\rho''^2}+(q_1-p'_1)\frac{1}{\rho''}+K''=0.$$

Dans la première de ces équations, on reconnaît les courbures de front des lignes asymptotiques définies précisément par la condition $\frac{1}{\rho''} = 0$, et, dans la seconde, les courbures de profil des lignes de courbure définies par la condition $\frac{1}{\rho_0} = 0$. Mais on peut y voir aussi, d'une part, dans (10), les foyers *optiques* ou de première espèce correspondant au cône C_1 de Malus relatif à la normale MZ, et, d'autre part, dans (9), les foyers *anoptiques* ou de deuxième espèce correspondant à l'orthogonal C_2 de ce même cône [1].

Ayant à revenir bientôt sur ces deux surfaces, occupons-nous, pour le moment, de l'équation (9) ci-dessus.

Lorsqu'on y fait $p + q' = 0$, condition caractéristique des surfaces (et dont la forme, ajoutons-le, ne change pas, que les coordonnées soient rectangulaires ou obliques), cette équation (9) se réduit à

$$(9') \qquad \frac{1}{\rho_0^2} + K'' = 0.$$

Par la même hypothèse, l'indicatrice de la pseudo-surface $\mathfrak{F}''$ qui, d'après notre premier Mémoire (1888, n° 19), revient, avec nos notations présentes, à

$$(11) \qquad qX^2 - (p - q')XY - p'Y^2 = -\frac{1}{\sin\Phi},$$

se transforme en l'indicatrice de surface

$$(11') \qquad qX^2 - 2pXY - p'Y^2 = -\frac{1}{\sin\Phi}.$$

Pour $p = q' = 0$, cette *conique* se trouve rapportée à deux diamètres conjugués, et comme ces conditions impliquent $\Phi = \frac{\pi}{2}$, ces diamètres se confondent avec les axes de figure de la courbe.

Soient R et R′ les rayons principaux, en M, de la surface F″, *limite* de $\mathfrak{F}''$. Le mode de construction bien connu de l'indicatrice

(1) *Voir,* pour ces deux cônes remarquables et la double série de ceux dont ils constituent les limites : *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux,* t. V (3e série), et t. I (5e série).

exige que l'on fasse

$$\frac{1}{R} = -q \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{R'} = p'.$$

Cela étant, remontons à la seconde des équations (4). Si, après y avoir remplacé (convenablement) τ_σ par τ_0 et supprimé le terme $\frac{d\varpi}{dS}$, qui est invariablement nul, le long de toute ligne asymptotique, nous comparons cette seconde équation (4) à (9'), il viendra

$$\frac{1}{\tau_0^2} = \frac{1}{\rho_0^2} = -K'' = qp' = -\frac{1}{RR'};$$

d'où l'on déduit

$$\tau_0 = \pm\sqrt{-RR'}.$$

C'est la formule d'Enneper. Les calculs qui ont servi à l'établir prouvent qu'elle concerne les surfaces, *seulement*.

Comme complément de la question, proposons-nous de chercher l'expression *correspondante* de la première courbure géodésique $\frac{1}{\rho'}$, ou mieux, $\frac{1}{\rho'_a}$, de la ligne (S), devenue ligne *asymptotique*.

A cet effet, les coordonnées étant présentement rectangulaires, par hypothèse, nous partirons des deux premières équations du système suivant, *exclusivement propre aux surfaces*, savoir

$$(a) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial s'} - \dfrac{\partial p'}{\partial s} = rp + r'p' + (qr' - rq'), \\[2mm] \dfrac{\partial q}{\partial s'} - \dfrac{\partial q'}{\partial s} = rq + r'q' + (rp' - pr'), \\[2mm] \dfrac{\partial r}{\partial s'} - \dfrac{\partial r'}{\partial s} = r^2 + r'^2 + (pq' - qp'). \end{cases}$$

En y faisant, d'après la question, $p = q' = 0$ avec $q = -\frac{1}{R}$, $p' = \frac{1}{R'}$, on en tire

$$(b) \qquad r = \frac{R'}{R(R-R')}\frac{\partial R}{\partial s'}, \qquad r' = \frac{R}{R'(R-R')}\frac{\partial R'}{\partial s}.$$

D'autre part, on sait que

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{d\varphi}{dS} + r\cos\varphi + r'\sin\varphi,$$

ou, plus explicitement,

$$(c)\qquad \frac{1}{\rho'} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial s} + r\right)\cos\varphi + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial s'} + r'\right)\sin\varphi.$$

Tout revient donc à éliminer φ. Or, d'après l'équation *réduite* des lignes asymptotiques, on a

$$\frac{\cos^2\varphi}{R} + \frac{\sin^2\varphi}{R'} = 0,$$

d'où l'on conclut d'abord

$$\frac{\sin\varphi}{\sqrt{-R'}} = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{R}} = \frac{1}{\sqrt{R-R'}},$$

puis, par la différentiation de $\tan\varphi$ et de $\cot\varphi$,

$$(d)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial s} &= \frac{R'}{R-R'}\,\frac{\partial}{\partial s}\sqrt{\frac{R}{-R'}},\\ \frac{\partial\varphi}{\partial s'} &= \frac{R}{R-R'}\,\frac{\partial}{\partial s'}\sqrt{\frac{-R'}{R}}. \end{aligned}\right.$$

Substituant dans (c) et usant d'un artifice de calcul que telle propriété particulière des quadriques suffit à suggérer, il vient, pour l'inconnue cherchée,

$$\frac{(R-R')^{\frac{3}{2}}}{\rho'_a} = R'^2\sqrt{R}\,\frac{\partial}{\partial s}\sqrt{\frac{R}{-R'^3}} + R^2\sqrt{-R'}\,\frac{\partial}{\partial s'}\sqrt{\frac{-R'}{R^3}}.$$

A cette forme, déjà très acceptable, on peut substituer celle, plus élégante, obtenue par O. Bonnet, à savoir

$$\frac{1}{\rho'_a} = \frac{4(-RR')^{\frac{7}{8}}}{(R-R')^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{R}{-R'^3}\right)^{\frac{1}{8}} + \frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{-R'}{R^3}\right)^{\frac{1}{8}}\right].$$

Cette dernière se déduit, en effet, sans peine de la précédente, en y introduisant les paramètres *auxiliaires*

$$\sqrt{\frac{R}{-R'^3}} = \theta^4, \qquad \sqrt{\frac{-R'}{R^3}} = \theta'^4.$$

II. *Formule corrélative*. — Avant de procéder à sa recherche, quelques considérations préliminaires nous paraissent indispensables.

Et d'abord, écrivons l'équation du cône précité de Malus, et celle de son orthogonal, cônes relatifs, tous deux, à MZ. On a

$$(c_1)\qquad (p_1X+p'_1Y+p''_1Z)X+(q_1X+q'_1Y+q''_1Z)Y=0,$$

$$(c_2)\qquad (qX+q'Y+q''Z)X-(pX+p'Y+p''Z)Y=0;$$

d'où l'on conclut, pour leurs *traces horizontales,*

$$(12)\qquad p_1X^2+(q_1+p'_1)XY+q'_1Y^2=0,$$

$$(13)\qquad qX^2-(p-q')XY-p'Y^2=0.$$

Or, ces traces doivent, *a priori*, coïncider respectivement avec les tangentes, à l'origine, soit des lignes de courbure S_1 ou $\frac{1}{\rho_0}=0$, soit des lignes asymptotiques S_2 ou $\frac{1}{\rho''}=0$ de la pseudo-surface $\mathfrak{F}''$.

On vérifie sans difficulté le fait, en observant que X, Y sont proportionnels à ds, ds' et, par conséquent, à $\sin\varphi'$, $\sin\varphi$. Comme, au surplus, on a

$$\cos\varphi\, dS = ds + ds'\cos\Phi,$$
$$\cos\varphi'\, dS = ds' + ds\cos\Phi,$$

il devient facile de déduire *directement* des systèmes (4) et (7), ces formes respectives de S_1 et de S_2, manifestement identiques à (12) et à (13),

$$(S_1)\qquad p_1\,ds^2+(q_1+p'_1)\,ds\,ds'+q'_1\,ds'^2=0,$$

$$(S_2)\qquad q\,ds^2-(p-q')\,ds\,ds'-p'\,ds'^2=0.$$

Plaçons ici deux remarques importantes sur ces lignes :

1° Pour que les lignes de courbure S_1 soient rectangulaires, et, conséquemment, pour que $\mathfrak{F}''$ se change en F'', il faut et il suffit que l'on ait

$$(14)\qquad p_1+q'_1-(q_1+p'_1)\cos\Phi=0,$$

ou bien (7')

$$p+q'=0,$$

condition *superficielle* connue.

2° Pour que les lignes asymptotiques S_2 soient rectangulaires, il faut et il suffit que l'on ait

$$q - p' + (p - q')\cos\Phi = 0, \tag{15}$$

ou bien (7)

$$q_1 - p'_1 = 0,$$

condition caractéristique des *pseudo-surfaces minima,* ainsi que nous l'avons surabondamment démontré dans le *Recueil de Mémoires* de la Société déjà citée (t. V, 5ᵉ série).

De là résulte la propriété nouvelle et très générale qui suit :

Théorème. — *Les surfaces sont, vis-à-vis de leurs lignes de courbure, ce que les pseudo-surfaces minima sont vis-à-vis de leurs lignes asymptotiques.*

Ces principes posés, rapprochons des équations (12) et (13) les suivantes qui, en tenant compte des conditions obtenues plus haut, n'en diffèrent que par les termes indépendants

$$p_1 X^2 + 2q_1 XY + q'_1 Y^2 = \frac{1}{\sin\Phi}, \tag{16}$$

$$q X^2 - 2pXY - p'Y^2 = -\frac{1}{\sin\Phi}. \tag{17}$$

Comme la seconde des coniques que ces équations représentent n'est autre que l'indicatrice (11') de $\mathfrak{F}''$ *particularisée,* sinon *dégénérée* en surface, on est contraint d'admettre que la première de ces coniques représente, par rapport à $\mathfrak{F}''$ particularisée en pseudo-surface minima, une indicatrice, de nouvelle espèce sans doute, mais *corrélative* de la première, en sorte que si l'on convient d'appeler *lignes de première ou de deuxième espèce* les lignes S_1 ou S_2, on devra, par analogie, étendre ces mêmes dénominations aux indicatrices correspondantes (16) et (17).

Sans insister davantage sur ce point, supposons que l'on ait à la fois

$$q_1 = p'_1 = 0.$$

La nouvelle indicatrice (16) se trouvera rapportée à deux de ses diamètres conjugués, lesquels deviendront les axes eux-mêmes, pour $\Phi = \frac{\pi}{2}$. On est ainsi amené à poser

$$\frac{1}{R_1} = p_1 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{R'_1} = q'_1,$$

formules dans lesquelles on pourrait, à la rigueur, supprimer désormais les indices; mais il est préférable de les y maintenir, pour que la distinction des deux cas qui nous occupent demeure plus tranchée.

Ceci convenu, faisons

$$(15) \qquad q_1 - p'_1 = 0,$$

ou plutôt, actuellement,

$$q_1 = p'_1 = 0,$$

dans l'équation (10). Elle se réduira à

$$\frac{1}{\rho''^2} + K'' = 0.$$

Que si, d'autre part, utilisant à son tour la première des équations (4), on y remplace (pour la symétrie) τ_0 par τ'', puis qu'on y supprime le terme $\frac{d\chi}{dS}$, qu'on peut démontrer (premier Mémoire, n° 14) être toujours nul le long d'une ligne de courbure, il viendra

$$\frac{1}{\tau''^2} = \frac{1}{\rho''^2} = -K'' = -p_1 q'_1 = -\frac{1}{R_1 R'_1},$$

d'où l'on tire

$$\tau'' = \pm\sqrt{-R_1 R'_1}.$$

C'est la formule corrélative annoncée. Elle a trait, on le voit, aux pseudo-surfaces minima *seulement*.

L'analogie nous conduit à nous demander quelle peut être l'expression de la première courbure géodésique $\frac{1}{\rho'}$, ou mieux $\frac{1}{\rho'_c}$, de la ligne (S) devenue *ligne de courbure*.

Pour le savoir, force nous est de faire usage des deux premières équations du système suivant :

$$(a') \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial s'} - \dfrac{\partial p'}{\partial s} = qr' - rq', \\ \dfrac{\partial q}{\partial s'} - \dfrac{\partial q'}{\partial s} = rp' - pr', \\ \dfrac{\partial r}{\partial s'} - \dfrac{\partial r'}{\partial s} = pq' - qp', \end{cases}$$

exclusivement propre aux pseudo-surfaces, en général, vu qu'il *exige,* par son origine même [ainsi que nous le prouverons ultérieurement à nouveau, bien que nous l'ayons déjà fait en substance ([1])], que les arcs ds, ds' y soient considérés comme indépendants. Cela dit, si l'on fait intervenir les conditions

$$q_1 = p'_1 = 0,$$

ou, ce qui revient au même, répétons-le,

$$q = p' = 0,$$

les valeurs de r et de r' correspondantes seront

$$(b') \qquad r = \frac{R'_1}{R_1^2}\frac{\partial R_1}{\partial s'}, \qquad r' = -\frac{R_1}{R_1'^2}\frac{\partial R'_1}{\partial s}.$$

Et comme, d'autre part, l'équation *réduite* des lignes de courbure *pseudo-superficielles*

$$\frac{\cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\sin^2\varphi}{R'_1} = 0$$

nous donne d'abord

$$\frac{\sin\varphi}{\sqrt{-R'_1}} = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{R_1}} = \frac{1}{\sqrt{R_1 - R'_1}}$$

et, par suite,

$$(d') \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial s} &= \frac{R'_1}{R_1 - R'_1}\frac{\partial}{\partial s}\sqrt{\frac{R_1}{-R'_1}}, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial s'} &= \frac{R_1}{R_1 - R'_1}\frac{\partial}{\partial s'}\sqrt{\frac{-R'_1}{R_1}}; \end{aligned}\right.$$

ces six valeurs, mises dans l'expression suivante

$$(c') \qquad \frac{1}{\rho'_e} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial s} + r\right)\cos\varphi + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial s'} + r'\right)\sin\varphi,$$

résoudront complètement le problème.

Il est à remarquer que les simplifications que le cas des surfaces a amenées ne se reproduisent pas ici.

Nous ne saurions, avant de clore cet article, passer sous silence le cas exceptionnellement digne d'intérêt où, dans la relation (6'),

---

([1]) *Nouvelles Annales de Mathématiques* (p. 204; 1890).

on a, à la fois,

$$p + q' = 0, \qquad q_1 - p'_1 = 0, \tag{18}$$

système de conditions qui, de par (14) et (15), exprime que les lignes S_1 et S_2 sont rectangulaires *simultanément,* et qui, du même coup, rend *équilatères* les hyperboles indicatrices (16) et (17).

A ces propriétés on reconnaît celles qui caractérisent les *surfaces minima.* L'équation (6') qui leur correspond se réduit alors à

$$\left(\frac{1}{\rho''^2} + \frac{1}{\rho_0^2}\right) + K'' = \frac{1}{\rho_\varepsilon^2} + K'' = 0.$$

Quant à la valeur (négative) que prend, dans ce cas, K'', nous ferons remarquer que les conditions (18) pouvant s'écrire

$$\left\{\begin{aligned} p' &= q + 2p\cos\Phi, \\ q' &= -p, \end{aligned}\right. \tag{18'}$$

ou bien

$$\left\{\begin{aligned} p'_1 &= q_1, \\ q'_1 &= -p_1 + 2q_1\cos\Phi; \end{aligned}\right. \tag{18''}$$

on a, en conséquence,

$$-K'' = p^2 + q^2 + 2pq\cos\Phi = p_1^2 + q_1^2 - 2p_1q_1\cos\Phi = \omega_\varepsilon^2.$$

La transition à la formule correspondante d'Enneper et à sa corrélative devient maintenant chose aisée, et l'on trouve

$$\tau_0 = R = -R',$$
$$\tau'' = R_1 = -R'_1,$$

formules dont le premier groupe *seul* pouvait, dans l'état actuel de la Science, être prévu.