BULLETIN DE LA S. M. F.

CH. BIOCHE

Recherches sur les surfaces algébriques qui admettent pour ligne asymptotique une cubique gauche

Bulletin de la S. M. F., tome 26 (1898), p. 217-232

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1898__26__217_0>

RECHERCHES SUR LES SURFACES ALGÉBRIQUES QUI ADMETTENT POUR LIGNE ASYMPTOTIQUE UNE CUBIQUE GAUCHE;

Par M. Ch. Bioche.

Les recherches dont quelques résultats sont contenus dans ce Mémoire m'ont été inspirées par cette remarque : le lieu des pôles d'un plan par rapport aux quadriques qui passent par une cubique gauche est une surface du troisième ordre ayant cette cubique comme asymptotique. J'ai voulu chercher si toute surface du troisième ordre à cubique asymptotique pouvait se définir ainsi. J'ai été conduit à étudier un cas particulier de la correspondance qui existe entre les points conjugués par rapport à un réseau de quadriques; ce qui m'a permis, non seulement de résoudre le problème que je m'étais posé, mais encore de le généraliser et d'obtenir des résultats qui m'ont semblé curieux.

J'ai étudié en détail les surfaces du troisième ordre qui ont une cubique pour ligne asymptotique; cette étude est assez considérable pour faire l'objet d'un autre Mémoire que je compte publier prochainement. On trouvera, d'ailleurs, une grande partie des résultats que j'ai obtenus, dans une Note insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (5 juillet 1897).

I.

FIGURES CONJUGUÉES PAR RAPPORT A UNE CUBIQUE GAUCHE.

1. *Points conjugués.* — Si l'on considère trois quadriques, ou le réseau déterminé par trois quadriques, à tout point M de l'espace on peut faire correspondre le point M' où se coupent les plans polaires de M par rapport aux quadriques. On a ainsi une transformation ponctuelle bien connue. Dans le cas où les quadriques ont en commun une cubique gauche Γ, les points M et M' sont conjugués sur une corde de cette cubique. Je dirai qu'ils sont conjugués par rapport à Γ.

Si cette courbe est la cubique commune aux trois quadriques ayant pour équations

$$XZ - Y^2 = 0, \qquad YZ - XT = 0, \qquad Z^2 - YT = 0,$$

on trouve facilement que les coordonnées d'un point (X, Y, Z, T), conjugué d'un point (x, y, z, t) sont données par

$$\begin{aligned} X &= \rho(3xyz - 2y^3 - x^2 t), \\ Y &= \rho(2xz^2 - y^2 z - xyt), \\ Z &= \rho(yz^2 - 2y^2 t + xzt), \\ T &= \rho(2z^3 - 3yzt + xt^2) \end{aligned}$$

ρ étant un coefficient de proportionnalité.

A chaque point M de l'espace correspond un conjugué unique M′, sauf si ce point est sur la cubique *fondamentale* Γ; dans ce cas particulier le conjugué de M est indéterminé sur la tangente. Il résulte de là que si l'on considère une figure, lieu de points M, la figure *conjuguée,* lieu de points M′, pourra contenir une partie parasite composée de tangentes à la cubique, ou de la développable des tangentes (suivant que la première figure sera une ligne ou une surface); c'est la partie restante que j'appellerai *conjuguée proprement dite,* ou tout simplement *conjuguée* de la figure donnée.

2. *Ligne conjuguée d'une droite.* — Si une droite Δ ne coupe pas la cubique Γ, sa conjuguée est une cubique gauche. Car dans tout plan passant par Δ il y a trois points de la conjuguée, situés respectivement sur les cordes qui sont contenues dans le plan. La droite Δ coupant quatre tangentes de Γ, sa conjuguée passe par les points de contact de ces tangentes.

En outre, cette courbe touche en chacun de ces points le plan osculateur. En effet, il résulte des formules précédentes que la surface conjuguée d'un plan est une surface du troisième ordre, et le plan tangent au point $x = y = z = 0$ est précisément le plan osculateur; et rien ne particularise ce point sur la courbe, par suite celle-ci est une asymptotique de la surface ([1]). Si l'on considère deux plans passant par Δ, l'intersection des surfaces conjuguées se compose de Γ comptée deux fois, et d'une cubique

([1]) Plus généralement, on peut remarquer que la surface conjuguée d'un plan est une transformée homographique du lieu des milieux des cordes d'une cubique gauche. Or, le lieu des milieux des cordes d'une courbe est une surface admettant cette courbe comme asymptotique.

qui touche le plan osculateur de Γ en chacun des points où elle rencontre cette courbe, le plan osculateur de cette dernière étant tangent aux surfaces qui contiennent la conjuguée de Δ.

Donc, *la conjuguée d'une droite* Δ, *par rapport à une cubique gauche* Γ, *qu'elle ne rencontre pas, est une cubique gauche coupant* Γ *aux quatre points de contact des tangentes qui rencontrent* Δ, *et touchant en chacun de ces points le plan osculateur à* Γ.

3. On voit facilement que :

1° Si Δ rencontre Γ en un point μ, et n'est pas dans le plan osculateur, la tangente en μ est une partie parasite de la conjuguée, la conjuguée proprement dite est une conique. Celle-ci passe par μ et par les points de contact des tangentes qui coupent Δ; en ces points elle touche les plans osculateurs;

2° Si Δ rencontre Γ en un point μ et se trouve dans le plan osculateur, sa conjuguée est une droite qui rencontre la cubique au point μ', tel que la tangente en μ' rencontre Δ. Cette droite est dans le plan osculateur en μ' et passe par la trace de la tangente en μ sur ce plan.

3° Si Δ est une corde de Γ, c'est évidemment sa propre conjuguée.

4. *Conjuguée d'une ligne.* — Plus généralement soit L une ligne d'ordre m; elle coupe en $3m$ points la surface conjuguée d'un plan P. La transformation donnerait la conjuguée de L et le plan P. Donc la conjuguée complète de L est d'ordre $3m$; mais si L coupe Γ en k points et touche le plan osculateur en h de ces points la surface conjuguée de P est coupée, quel que soit P, en $k+h$ points qui ne doivent pas être comptés dans l'évaluation de l'ordre de la conjuguée proprement dite de L. L'ordre de cette conjuguée est donc donné par

$$m' = 3m - (k+h)$$

et comme L coupe la développable des tangentes à Γ en

$$4m - 2k - h$$

points, autres que les points situés sur Γ, sa conjuguée rencontre Γ

aux points de contact des tangentes correspondantes et y touche le plan osculateur.

5. *Conjuguée d'une surface.* — Pour évaluer l'ordre de la surface Σ, conjuguée d'une surface S, je vais déterminer le nombre des points d'intersection de Σ avec une droite Δ quelconque, ou de S avec la conjuguée de Δ, qui est, comme on l'a vu, une cubique gauche.

Soit m l'ordre de la surface S, cette surface est coupée en $3m$ points par la cubique conjuguée de Δ; mais cette cubique coupe Γ en quatre points et y touche le plan osculateur; donc, si la surface S contient Γ comme ligne multiple d'ordre k et si h des nappes passant par Γ y sont tangentes aux plans osculateurs, il y a $4(k+h)$ points d'intersection de S et de la conjuguée de Δ qui ne correspondent pas à des points d'intersection de Σ et de Δ, l'ordre de Σ est donc

$$m' = 3m - 4(k+h).$$

Si l'on se reporte aux formules de transformation, on voit que sur la conjuguée complète de S, qui comprend comme partie parasite la développable des tangentes comptée $k+h$ fois, la cubique Γ est ligne multiple d'ordre $m+k$. Comme elle est du deuxième ordre de multiplicité sur la développable des tangentes elle est, sur la conjuguée proprement dite, seulement de l'ordre k'

$$k' = (m+k) - 2(k+h) = m - (k+2h).$$

Pour déterminer le nombre h' des nappes de la surface Σ qui sont tangentes aux plans osculateurs de Γ, sur la courbe Γ elle-même, il suffit de remarquer que la conjuguée de Σ est d'ordre m. On a donc

$$m = 3(3m - 4k - 4h) - 4[m - k - 2h + h'],$$

d'où l'on tire

$$h' = m - (2k+h).$$

En rapprochant les diverses égalités que je viens d'obtenir, on trouve immédiatement

$$m' - m = 2(k' - k) = 2(h' - h);$$

de sorte que, si deux nombres corrélatifs sont égaux, les autres le sont aussi.

6. Si une surface ne contient pas Γ, sa conjuguée admet Γ comme courbe multiple d'ordre m, les m nappes étant tangentes aux plans osculateurs en chaque point de Γ. L'exemple le plus simple est donné par la surface Σ_6 conjuguée d'une quadrique.

Les sections de cette surface Σ_6 sont en général du genre quatre. La surface possède six points triples, elle contient six droites et douze coniques; par chaque point de la surface passent deux cubiques conjuguées des génératrices de la quadrique. La surface contient en outre quinze cubiques gauches particulières conjuguées des coniques de la quadrique qui rencontrent Γ en trois points.

II.

ÉQUATION DES SURFACES AYANT POUR LIGNE ASYMPTOTIQUE UNE CUBIQUE GAUCHE.

7. *Surfaces du troisième ordre.* — Si une surface du troisième ordre admet pour ligne asymptotique une cubique gauche, cette ligne ne peut être que simple; on a alors

$$k = h = 1,$$

et l'ordre de la conjuguée est donné par

$$m' = 3 \times 3 - 4[1 + 1] = 1.$$

Donc, *toute surface du troisième ordre qui admet pour ligne asymptotique une cubique gauche peut être définie comme conjuguée d'un plan par rapport à cette cubique,* ou, autrement dit, *comme lieu des pôles d'un plan par rapport aux quadriques passant par la cubique.*

Si trois quadriques passant par la cubique, et n'ayant que celle-ci en commun, ont pour équations

$$Q_1 = 0, \qquad Q_2 = 0, \qquad Q_3 = 0,$$

le lieu des pôles d'un plan P ayant pour équation

$$AX + BY + CZ + DT = 0,$$

par rapport aux quadriques passant par la cubique considérée, peut se représenter par

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial x} & \frac{\partial Q_1}{\partial y} & \frac{\partial Q_1}{\partial z} & \frac{\partial Q_1}{\partial t} \\ \frac{\partial Q_2}{\partial x} & \frac{\partial Q_2}{\partial y} & \frac{\partial Q_2}{\partial z} & \frac{\partial Q_2}{\partial t} \\ \frac{\partial Q_3}{\partial x} & \frac{\partial Q_3}{\partial y} & \frac{\partial Q_3}{\partial z} & \frac{\partial Q_3}{\partial t} \\ A & B & C & D \end{vmatrix} = 0.$$

Cette forme d'équation montre que la surface du troisième ordre constitue, avec le plan P, le jacobien du système de quadriques

$$Q_1 = 0, \qquad Q_2 = 0, \qquad Q_3 = 0,$$
$$(AX + BY + CZ + DT)^2 = 0.$$

La surface du troisième ordre est une des nappes du jacobien; la correspondance qui existe entre les points d'un jacobien donne une représentation de la surface sur le plan.

J'ai étudié en détail les surfaces du troisième ordre dont je viens de parler; cette étude fait l'objet d'un Mémoire spécial.

8. *Généralisation.* — Si l'on développe le déterminant qui est dans le premier membre de l'équation de la surface du troisième ordre, cette équation prend la forme

$$AS_1 + BS_2 + CS_3 + DS_4 = 0;$$

les équations

$$S_1 = 0, \qquad S_2 = 0, \qquad S_3 = 0, \qquad S_4 = 0$$

représentant les surfaces conjuguées des plans du tétraèdre de référence. On peut remarquer que si, au lieu de prendre pour A, B, C, D des constantes, on prenait des fonctions d'ordre $m - 3$, on aurait l'équation d'une surface d'ordre m admettant en chaque point de Γ, pour plan tangent, le plan osculateur à Γ qui est tangent à chacune des surfaces S_1, S_2, S_3, S_4. On a donc l'équation de surfaces d'ordre m ayant Γ comme ligne asymptotique; je vais montrer que l'on a ainsi l'équation générale, et déduire de cette forme d'équation quelques propriétés des surfaces en question.

9. *Nombre de conditions nécessaires pour qu'une cubique*

soit asymptotique. — Pour qu'une cubique donnée soit ligne asymptotique d'une surface d'ordre m, il faut : 1° que la cubique soit tout entière sur la surface, ce qui donne $3m+1$ conditions; 2° que le plan tangent à la surface en chaque point soit le plan osculateur à la cubique.

Si celle-ci est donnée par

$$\frac{X}{\lambda^3} = \frac{Y}{\lambda^2} = \frac{Z}{\lambda} = \frac{T}{1},$$

l'équation du plan tangent en un point de cette courbe à la surface

$$F(X, Y, X, T) = 0,$$

qui le contient, est

$$X F'_x(\lambda^3, \lambda^2, \lambda, 1) + Y F'_y(\lambda^3, \lambda^2, \lambda, 1) + Z F'_z(\lambda^3, \lambda^2, \lambda, 1) + T F'_t(\lambda^3, \lambda^2, \lambda, 1) = 0,$$

les coefficients de l'équation étant les dérivées partielles de F, où l'on a remplacé X, Y, Z, T respectivement par $\lambda^3, \lambda^2, \lambda, 1$.

Le plan tangent à la surface et le plan osculateur contenant, tous deux, la tangente à la cubique, pour exprimer qu'ils se confondent il suffit d'écrire que leurs traces sur un des plans de coordonnées sont parallèles. Or, l'équation du plan osculateur en un point de la cubique étant

$$X - 3\lambda Y + 3\lambda^2 Z - \lambda^3 = 0,$$

pour que le plan osculateur se confonde avec le plan tangent à la surface, il faut et il suffit que l'on ait

$$3\lambda F'_x(\lambda^3, \lambda^3, \lambda, 1) + F'_y(\lambda^3, \lambda^2, \lambda, 1) = 0.$$

Mais comme la surface contient, par hypothèse, le point à l'infini sur OX et y admet, comme tangente, la droite $Z = T = 0$, l'équation de la surface ne contient pas de terme en X^m, ni en $X^{m-1}Y$.

On déduit de là que les termes de degré les plus élevés en λ proviennent : 1° dans F'_X de la dérivée du terme en $X^{m-1}Z$; 2° dans F'_y de la dérivée du terme en $X^{m-2}Y^2$. Ces termes donnent, dans l'équation considérée, des termes de degré $3m-4$, qui ne se réduisent pas. D'autre part, il y a un terme indépendant provenant de la dérivée du terme en YT^{m-1}. Donc l'équation précédente est de degré $3m-4$ en λ.

Cela exprime que, si une surface d'ordre m passe par une cubique gauche, il y a, en général, $3m-4$ points de la cubique pour lesquels le plan osculateur est tangent à la surface. Pour que la cubique soit asymptotique, il faut et il suffit que l'équation qui détermine ces points se réduise à une identité, ce qui donne $3m-3$ conditions, à ajouter à celles qui expriment que la cubique est sur la surface.

En résumé, *pour qu'une surface d'ordre m contienne une cubique gauche et l'admette comme ligne asymptotique, il faut et il suffit que les coefficients vérifient*

$$(3m+1)+(3m-3)=6m-2$$

équations de condition linéaires.

L'équation générale des surfaces d'ordre m contenant

$$\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6}$$

coefficients entrant de façon homogène, il doit rester, dans l'équation des surfaces considérées,

$$\frac{(m-1)(m-2)(m+9)}{6}$$

coefficients dont les rapports sont arbitraires. Pour $m=3$, on trouve 4 coefficients : c'est bien le nombre constaté.

10. *Forme générale d'équation des surfaces d'ordre m.* — L'équation

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial x} & \frac{\partial Q_1}{\partial y} & \frac{\partial Q_1}{\partial z} & \frac{\partial Q_1}{\partial t} \\ \frac{\partial Q_2}{\partial x} & \frac{\partial Q_2}{\partial y} & \frac{\partial Q_2}{\partial z} & \frac{\partial Q_2}{\partial t} \\ \frac{\partial Q_3}{\partial x} & \frac{\partial Q_3}{\partial y} & \frac{\partial Q_3}{\partial z} & \frac{\partial Q_3}{\partial t} \\ A & B & C & D \end{vmatrix} = 0,$$

où A, B, C, D sont des fonctions arbitraires d'ordre $m-3$, est bien l'équation générale des surfaces d'ordre m admettant une cubique comme asymptotique. La cubique étant donnée, il semble que l'équation contienne

$$4\frac{(m-2)(m-1)m}{6}$$

coefficients homogènes et arbitraires, figurant dans A, B, C, D, et l'on a

$$4\frac{(m-2)(m-1)m}{6}-\frac{(m-1)(m-2)(m+9)}{6}$$
$$=\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2}.$$

Mais on peut multiplier les termes de chacune des premières lignes par des fonctions arbitraires de degré $m-4$ et ajouter les résultats à la dernière, sans changer l'équation; or le nombre des coefficients de ces fonctions est précisément le nombre surabondant.

Donc l'équation précédente est bien l'équation générale cherchée.

III.

PROPRIÉTÉS DES SURFACES AYANT UNE CUBIQUE ASYMPTOTIQUE.

11. *Propriétés générales.* — Les surfaces ayant pour asymptotique une cubique Γ ont des points doubles sur cette cubique; si celle-ci est représentée par

$$\frac{X}{\lambda^3}=\frac{Y}{\lambda^2}=\frac{Z}{\lambda}=\frac{T}{1},$$

les coefficients de l'équation du plan tangent à la surface en un point de Γ sont proportionnels à

$$1,\quad -3\lambda,\quad 3\lambda^2,\quad -\lambda^3,$$

de sorte que, si le premier est nul, les autres le sont aussi. Or, si l'on calcule F'_x, $F(x,y,z,t)=0$ étant l'équation de la surface considérée et F étant de la forme, déjà signalée,

$$AS_1+BS_2+CS_3+DS_4,$$

et si l'on remplace dans F'_x, x, y, z, t par λ^3, λ^2, λ, 1, on trouve facilement

$$F'_x(\lambda^3, \lambda^2, \lambda, 1) = A(\lambda^3, \lambda^2, \lambda, 1)\lambda^3 + B(\lambda^3, \lambda^2, \lambda, 1)\lambda^2 + C(\lambda^3, \lambda^2, \lambda, 1)\lambda + D(\lambda^3, \lambda^2, \lambda, 1).$$

Donc les dérivées partielles du premier ordre de F sont nulles pour les valeurs de x, y, z, t qui correspondent aux points d'intersection de la cubique Γ avec la surface

$$AX + BY + CZ + DT = 0.$$

Cette surface est d'ordre $m - 2$; donc les surfaces considérées doivent avoir, sur Γ, $3(m - 2)$ points doubles.

12. Les surfaces admettant Γ comme asymptotique ne sont pas les plus générales parmi celles qui, contenant Γ, ont sur cette courbe $3(m - 2)$ points doubles. Si l'on se donne les positions des points doubles, on a $3(m - 2)$ conditions à ajouter à celles qui expriment que Γ est asymptotique, ce qui donne

$$6m - 2 + 3(m - 2) = 9m - 8$$

conditions. Si l'on veut exprimer seulement que la surface contient Γ et qu'elle a $3(m - 2)$ points doubles donnés sur Γ, on a, quel que soit m, trois équations de moins à écrire. En effet, on a $3m + 1$ équations à écrire pour exprimer que Γ est sur la surface; mais, cela fait, il ne reste plus que deux équations à écrire pour exprimer qu'un point de Γ est point double de la surface [1]; on a donc en tout

$$3m + 1 + 6(m - 2) = 9m - 11$$

conditions. On peut remarquer que si une surface contenant Γ a un point double sur cette courbe, la tangente à cette courbe ne coupe la surface qu'en trois points, tandis que si Γ est asymptotique la tangente coupe en quatre points.

---

[1] Si l'on a exprimé qu'une surface $F(x, y, z) = 0$ contient une courbe C, pour exprimer qu'un point de cette courbe est point double il suffit d'écrire que deux des dérivées partielles de F s'annulent en même temps pour ce point. Si la tangente à C n'est pas parallèle au plan des xy les conditions $F'_x = 0$, $F'_y = 0$ exprimeraient, si l'on avait $F'_z \neq 0$, qu'il y aurait un plan tangent parallèle au plan des xy, ce qui est impossible. On doit donc avoir $F'_z = 0$ en même temps que $F'_x = F'_y = 0$.

En particulier pour $m = 3$, la surface doit avoir trois points doubles et contenir les tangentes à Γ en ces points ; réciproquement toute surface du troisième ordre, qui contenant Γ possède sur cette courbe trois points doubles distincts et contient les tangentes en ces points, admet Γ comme asymptotique.

13. *Surfaces qui divisent harmoniquement les cordes de leur cubique asymptotique.* — Il est tout indiqué de chercher s'il existe des surfaces qui soient leurs propres conjuguées ; si l'on fait $m' = m$ dans l'équation qui donne le degré de la conjuguée d'une surface, on a

$$m = 2(k + h)$$

comme $k \geqq h$, si Γ n'est pas ligne multiple, on ne peut faire que les hypothèses

$$k = 1, \qquad h = 0,$$
$$k = h = 1.$$

La première conduit aux quadriques contenant Γ, la seconde aux surfaces du quatrième ordre admettant Γ comme asymptotique. Or, l'équation générale des surfaces du quatrième ordre admettant Γ comme asymptotique dépend de douze paramètres ; autrement dit, on peut assujettir une de ces surfaces à passer par douze points arbitrairement choisis. Si la surface doit être sa propre conjuguée elle est déterminée par six points et leurs conjugués.

D'autre part, si l'on considère un système composé de trois quadriques contenant Γ et d'une quatrième quadrique quelconque, deux points conjugués sur le jacobien de ce système sont conjugués par rapport à Γ, et toute corde de Γ est divisée harmoniquement par la surface. Et précisément, l'équation du jacobien dépend de six paramètres, bien que la quatrième quadrique dépende de neuf paramètres, parce qu'on peut remplacer cette quadrique par une quelconque du réseau défini par les quatre quadriques.

On peut considérer une surface du quatrième ordre ayant pour ligne asymptotique une cubique gauche dont elle divise harmoniquement toutes les cordes, comme la jacobienne correspondant à un système de quadriques ayant *six* points communs ; la cubique asymptotique est celle qui passe par les six points. Car on peut toujours prendre, pour trois des quadriques du système, trois surfaces passant par un septième point de la cubique déterminée par les *six* points.

Il est facile de reconnaître que si les points sont distincts ils ne sont pas d'ordre de multiplicité supérieur à *deux*. Le cône des tangentes en chaque point est celui qui passe par les cinq autres. Si deux points se confondent ils donnent un point triple et la surface contient la tangente à Γ. Si les points se confondent *deux* à *deux* la surface se décompose; d'ailleurs, il n'existe pas de surface du quatrième ordre ayant trois points triples, non en ligne droite. La décomposition donne une surface de troisième ordre et le plan conjugué, on retrouve ainsi les surfaces du troisième ordre comme nappes de jacobien.

14. *Surface remarquable.* — Sans entrer dans le détail des particularités qui peuvent se présenter, et qu'il est facile d'étudier, je citerai seulement un cas remarquable, celui où les six points de base du système des quadriques se confondent *trois* par *trois;* c'est-à-dire le cas dans lequel la cubique a deux contacts du second ordre avec une quadrique du système ne passant pas par Γ. On peut prendre pour cette quadrique soit le système des plans osculateurs aux deux points P et Q, soit le système des plans qui passent par PQ et qui sont tangents à Γ chacun en l'un des points P et Q.

Si la quadrique est formée par

$$XT = 0,$$

l'équation de la surface est

$$TS_1 + XS_4 = 0.$$

Si la quadrique est formée par

$$YZ = 0,$$

l'équation de la surface se présente sous la forme

$$ZS_2 + YS_3 = 0;$$

on peut vérifier que

$$TS_1 + XS_4 = ZS_2 + YS_3 = 2(XZ^3 - Y^3T).$$

La surface en question est réglée, ses asymptotiques non rectilignes sont les cubiques

$$\frac{X}{\lambda^3} = \frac{Y}{k\lambda^2} = \frac{Z}{k\lambda} = \frac{T}{1}$$

qui se déduisent homographiquement de Γ par la transformation

$$X = x, \qquad Y = ky, \qquad Z = kz, \qquad T = t.$$

On en conclut immédiatement que *la surface considérée divise harmoniquement les cordes de l'une quelconque de ses asymptotiques.*

15. Cette surface se caractérise, parmi toutès les surfaces du quatrième ordre ayant une droite triple et une simple, par la propriété suivante : *C'est la seule surface de cette catégorie qui puisse se transformer homographiquement en elle-même de façon que les points homologues ne soient pas situés sur une même génératrice.*

Si une surface ayant deux directrices multiples se transforme homographiquement en elle-même, ces directrices sont évidemment des arêtes du tétraèdre qui se conserve en même temps qu'elles. Si la directrice simple est rejetée à l'infini et si l'on prend pour plans de coordonnées des faces du tétraèdre invariable, l'équation de la surface doit pouvoir s'écrire

$$Z = F\left(\frac{Y}{X}\right).$$

La transformation conservant le tétraèdre correspond à des équations

$$X = ax, \qquad Y = by, \qquad Z = cz.$$

Si donc on pose

$$\frac{y}{x} = u,$$

la fonction F doit vérifier l'équation de condition

$$F\left(\frac{b}{a}u\right) = cF(u);$$

si l'on écarte le cas où

$$\frac{b}{a} = 1, \qquad c = 1,$$

cas dans lequel les points homologues sont sur une même génératrice, et qui est réalisé quel que soit F, il ne reste plus que celui où $F(u)$ est homogène, et comme on n'a qu'une variable, on a

$$F(u) = Au^m.$$

Les conoïdes admettant la transformation indiquée sont donc donnés par des équations de la forme

$$z = A\left(\frac{y}{x}\right)^m,$$

m étant commensurable pour les surfaces algébriques; si $m = \frac{p}{q}$ les directrices sont d'ordres p et q, et la surface d'ordre $p+q$. On peut supposer $p > q$; alors, pour qu'on ait $p + q = 4$, il faut que $p = 3$, $q = 1$. On ne trouve donc que la surface déjà signalée.

16. *Surface formée des cordes d'une cubique.* — Les surfaces réglées dont les génératrices sont des cordes d'une cubique gauche sont évidemment leurs propres conjuguées par rapport à cette cubique. On sait que les cordes qui appartiennent à un complexe linéaire L forment une surface du quatrième ordre dont la cubique est ligne double; de plus sur une pareille surface il y a une courbe du sixième ordre, C_6, dont les tangentes appartiennent au complexe L, et qui par suite est une asymptotique. Cette courbe peut se décomposer en deux cubiques.

Soit (T) une transformation homographique conservant une cubique Γ; les droites qui joignent des couples de points homologues engendrent une surface appartenant à la catégorie dont je viens de parler. La courbe C_6 se conserve évidemment lorsqu'on effectue la transformation (T); or celle-ci ne conservant que des cubiques, C_6 se décompose en deux cubiques.

Si la cubique Γ est donnée par

$$\frac{X}{\lambda^3} = \frac{Y}{\lambda^2} = \frac{Z}{\lambda} = \frac{T}{1}$$

et si la transformation (T) est définie par

$$X = H^3 x, \qquad Y = H^2 y, \qquad Z = H z, \qquad T = t,$$

l'équation de la surface correspondante est

$$H(YZ - XT)^2 - (H+1)^2(Y^2 - ZX)(Z^2 - YT) = 0.$$

Il est facile de constater que l'équation d'une surface du quatrième ordre ayant Γ pour ligne double, et se transformant en elle-même par une transformation homographique conservant Γ, peut toujours se ramener à cette forme.

17. *Surfaces réglées dont toutes les asymptotiques sont des cubiques gauches.* — Si une surface réglée n'a pour lignes asymptotiques que des cubiques gauches, ses génératrices appartiennent à une infinité de complexes linéaires; par suite, elles rencontrent deux droites qui peuvent se confondre en une seule. La surface peut se définir comme le lieu des droites qui joignent chaque point d'une cubique aux points où le plan osculateur correspondant coupe une droite Δ. Et, réciproquement, toute surface ainsi définie n'a pour lignes asymptotiques que des cubiques gauches, car ses génératrices appartiennent à une congruence linéaire, et par suite les lignes asymptotiques peuvent se déduire les unes des autres par une transformation homographique.

En effet, si la surface a ses directrices distinctes, on a vu plus haut (15) qu'elle admettait des transformations conservant les génératrices. Si les directrices sont confondues, l'équation de la surface peut s'écrire (voir *Bull.*, t. XIX, p. 42)

$$F\left(\frac{ZX - mYT}{X^2}, \frac{Y}{X}\right) = 0,$$

et la surface admet la transformation

$$X = ax, \qquad Y = ay, \qquad Z = az + bmy, \qquad T = at + bx;$$

dans un cas, comme dans l'autre, on peut disposer des constantes de façon à transformer une asymptotique donnée en une autre également donnée.

18. On peut donc déterminer une surface à asymptotiques cubiques, en donnant une de ses asymptotiques Γ, et une directrice rectiligne Δ. Si Δ rencontre Γ en p points et est dans π plans osculateurs, on peut mener d'un point de Δ $3-\pi$ plans osculateurs autres que les plans fixes; d'autre part, tout plan passant par Δ coupe Γ en $3-p$ points; ce plan contient donc $3-p$ génératrices, plus Δ qui est d'ordre de multiplicité $3-\pi$. L'ordre de la surface est donc $6-(p+\pi)$.

On peut, par suite, avoir les types de surfaces suivantes :

1° Surfaces du sixième ordre à directrices triples distinctes (Δ ne coupe pas Γ et n'appartient pas au complexe qui contient les tangentes à Γ);

2° Surface du sixième ordre à directrice unique triple [Δ ne coupe pas Γ et appartient au complexe ([1])];

3° Surface du cinquième ordre à directrices triple et double (la première rencontre Γ, la seconde est dans le plan osculateur au point de rencontre);

4° Surface du quatrième ordre à directrice unique double (la directrice coupe Γ et est dans le plan osculateur);

5° Surface du quatrième ordre à directrices triple et simple (la première est une corde, la deuxième est l'intersection des plans osculateurs aux extrémités de cette corde);

6° Surface du troisième degré à directrice unique (la directrice est tangente, la surface est une surface de Cayley).

([1]) M. Kœnigs, en étudiant les surfaces qui contiennent des familles de courbes unicursales de degré donné, a fait remarquer (*Annales de l'École Normale*, p. 187; 1888) que la surface générale admettant une famille de cubiques et de droites est du sixième ordre. On voit que ces cubiques peuvent être les asymptotiques dans le cas de l'ordre maximum.