BULLETIN DE LA S. M. F.

M. DE MONTCHEUIL

Étude sur les surfaces réelles définies par l'équation $\xi^{\mathrm{IV}}_{u^2 u_1^2} = 0$

Bulletin de la S. M. F., tome 27 (1899), p. 114-129

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1899__27__114_0>

ÉTUDE SUR LES SURFACES RÉELLES DÉFINIES PAR L'ÉQUATION $\xi^{\text{IV}}_{u^2 u_1^2} = 0$;

Par M. DE MONTCHEUIL.

Nous avons rattaché les surfaces définies par l'équation

$$(1) \qquad \frac{\partial^4 \xi}{\partial u^2 \partial u_1^2} = 0$$

au mouvement de deux plans et d'une droite, et nous en avons déduit un mode de construction de ces surfaces ([1]). Le procédé indiqué s'étend à toutes celles qui vérifient l'équation (1), aux réelles aussi bien qu'aux imaginaires. Il a toutefois l'inconvénient d'introduire, dans la détermination de celles-là, des éléments imaginaires, tels, par exemple, que les développables isotropes.

Nous nous proposons, ici, de considérer à part les surfaces réelles et de déduire, du mode de génération précédemment exposé, un mode particulier à celles-ci, où n'entrent que des éléments réels.

Mais avant d'aborder directement la question, nous allons, en vue d'en préparer la solution, présenter sous deux nouveaux aspects notre méthode générale de construction.

Rappelons que notre première méthode consiste à mener une droite parallèle à l'intersection de deux plans roulant sur deux développables isotropes, et passant par le milieu du segment qui joint les points de contact de ces plans avec deux courbes tracées respectivement sur les développables. Cette droite est l'élément de la congruence normale aux surfaces cherchées.

Nous pouvons présenter ce mode de construction sous un autre point de vue, en énonçant une proposition que nous allons démontrer.

THÉORÈME. — *Si l'on imprime à un système de trois plans :* P, P′, P″, *aux intersections parallèles* I, I′, I″, *un mouvement tel que les deux premiers plans* P, P′ *roulent respectivement sur deux développables isotropes, le troisième plan* P″ *passant*

([1]) Voir *Bulletin de la Société mathématique*, t. XXVI, p. 103.

constamment par le segment de droite qui joint les points de contact des plans P, P′ *avec deux courbes respectivement tracées sur chaque développable isotrope, toute droite du plan* P″ *parallèle aux trois intersections, et dans un rapport de distances constant avec deux droites* I, I′, *constitue l'élément le plus général de la congruence normale aux surfaces définies par l'équation* (1).

Ce théorème est évident, dans le cas où le rapport des distances est l'unité; car alors nous avons une droite passant par le milieu du segment, et parallèle à l'intersection des plans isotropes; nous avons vu qu'une telle droite est normale aux surfaces en question.

Il reste à établir que la proposition est encore vraie, quand le rapport des distances $\frac{\lambda}{\lambda_1}$ a une valeur quelconque, d'ailleurs constante, pour toutes les positions de la droite.

Pour cela, continuons à définir les développables isotropes, et les deux courbes tracées sur ces surfaces, au moyen des mêmes fonctions A, A_1, B, B_1 que précédemment ([1]) et donnons à ξ la forme nouvelle

$$\xi = 2\frac{\lambda A u_1 + \lambda_1 A_1 u + \lambda B + \lambda_1 B_1}{\lambda + \lambda_1},$$

où $\frac{\lambda}{\lambda_1}$ représente une quantité constante. Cherchons les coordonnées de la développée moyenne des surfaces correspondantes. En désignant, comme nous l'avons fait déjà, par X, Y, Z, X_1, Y_1, Z_1 les coordonnées des points de contact des plans isotropes avec les courbes tracées sur les développables, on trouve

$$x_0 = \frac{\lambda X + \lambda_1 X_1}{\lambda + \lambda_1}, \qquad y_0 = \frac{\lambda Y + \lambda_1 Y_1}{\lambda + \lambda_1}, \qquad z_0 = \frac{\lambda Z + \lambda_1 Z_1}{\lambda + \lambda_1}.$$

Un tel point est bien situé sur le segment qui relie les points de contact, et dans un rapport de distances constant à ses extrémités. Or, la normale aux surfaces, par définition, passe par ce point. On vérifie d'ailleurs qu'elle est parallèle à l'intersection

([1]) *Voir* l'article déjà cité.

des plans isotropes; elle est donc située dans le plan P'' et vérifie toutes les conditions du théorème.

Deux développables isotropes étant données, ainsi que les courbes tracées sur chacune d'elles (ce qui revient à donner les fonctions A, B, A_1, B_1), on peut étudier la variation des surfaces, correspondant à la variation du rapport $\frac{\lambda}{\lambda_1}$. On constatera, par exemple, que tout point du segment est susceptible de décrire une surface minima, pour une détermination convenable des fonctions.

Pour $\lambda = \lambda_1$ on obtient les surfaces dont la développée moyenne est tracée par le point milieu du segment.

Pour $\lambda = 0$ ou $\lambda_1 = 0$ les surfaces se réduisent aux courbes tracées sur les développables.

Remarquons que les fonctions qui figurent ici dans l'expression de ξ sont

$$\frac{2\lambda}{\lambda+\lambda_1}A, \quad \frac{2\lambda_1}{\lambda+\lambda_1}A_1, \quad \frac{2\lambda}{\lambda+\lambda_1}B, \quad \frac{2\lambda_1}{\lambda+\lambda_1}B_1.$$

Nous pouvons encore envisager, sous un autre aspect, le système des plans mobiles.

Considérons un faisceau de plans et, dans un de ces plans, donné, une droite D, parallèle à l'intersection du faisceau. Supposons tous ces éléments mobiles, et dépendant de deux paramètres. La droite D constitue l'élément d'une congruence. Le mouvement du système étant donné, si l'on veut que cette droite soit normale à une famille de surfaces, il faudra définir convenablement sa distance à l'intersection du faisceau. D'ailleurs, la nature des surfaces dépendra de la nature du mouvement du système. On peut donc se poser les deux problèmes suivants :

1° *Étant donnée une famille de surfaces, déterminer les conditions que doit remplir le mouvement du faisceau;*

2° *Étant donné le mouvement du faisceau, déterminer la nature des surfaces.*

Implicitement, nous avons considéré un pareil système, et les résultats obtenus peuvent se résumer dans ce théorème :

Théorème. — *Soit un faisceau mobile, dépendant de deux* *variables, tel que deux de ses plans roulent sur deux développables isotropes; soient encore deux courbes tracées respectivement sur ces développables; dans tout plan du faisceau, partageant dans un rapport constant le segment qui relie les points de contact des courbes aux plans tangents, il existe une droite parallèle à l'intersection du faisceau et normale à une famille de surfaces définies par l'équation* (1); *cette droite est celle qui passe par le point d'intersection du plan et du segment.*

On pourrait choisir, pour plan contenant la normale, l'un des plans isotropes, mais alors la surface se réduirait à une courbe.

I.

Ces préliminaires établis, nous pouvons aborder la question des surfaces réelles.

Écrivons l'expression de ξ sous sa forme primitive

$$\xi = A u_1 + A_1 u + B + B_1,$$

où A, B sont des fonctions de u, A_1, B_1 des fonctions de u_1. On vérifie que la condition nécessaire et suffisante de réalité des surfaces correspondantes est que les quantités

$$u, \quad A, \quad B; \qquad u_1, \quad A_1, \quad B_1$$

soient respectivement conjuguées. Nous supposerons, désormais, qu'il en est ainsi.

Nous nous proposons donc de rattacher ces surfaces à un système de plans mobiles, analogue à celui que nous avons considéré, dans le cas général, mais dont tous les éléments soient réels.

Dans ce but, nous allons faire une étude sommaire du faisceau mobile de plans, dont l'intersection commune est celle des deux plans isotropes définis par les équations

$$(2) \qquad \begin{cases} (1-u^2)x + i(1+u^2)y + 2uz + 2C = 0, \\ (1-u_1^2)x - i(1+u_1^2)y + 2u_1 z + 2C_1 = 0. \end{cases}$$

Nous désignons ici par C, C_1 les fonctions $A - uB$, $A_1 - u_1 B_1$.

Par suite, C et C_1 sont ici des fonctions conjuguées, et l'intersection des plans est une droite réelle.

C et C_1 étant des fonctions respectives (d'ailleurs conjuguées) de u et de u_1, des considérations analytiques très simples permettent de vérifier qu'on peut les écrire sous la forme

$$C = \frac{\partial C_0}{\partial \beta} + i \frac{\partial C_0}{\partial \alpha},$$

$$C_1 = \frac{\partial C_0}{\partial \beta} - i \frac{\partial C_0}{\partial \alpha},$$

C_0 étant une solution réelle de l'équation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \beta^2} = 0;$$

en d'autres termes, C_0 étant une fonction harmonique.

Nous avons supposé α et β définis par les relations

$$u = \alpha + i\beta, \qquad u_1 = \alpha - i\beta,$$

Posons

$$(3) \quad \begin{cases} E_x = (1 - \alpha^2 + \beta^2)x - 2\alpha\beta y + 2\alpha z + 2 \dfrac{\partial C_0}{\partial \beta} t, \\ G_x = 2\alpha\beta x - (1 + \alpha^2 - \beta^2)y - 2\beta z - 2 \dfrac{\partial C_0}{\partial \alpha} t, \\ H_x = \beta x - \alpha y + \dfrac{\partial^2 C_0}{\partial \beta^2} t, \\ K_x = \alpha x + \beta y - z - \dfrac{\partial^2 C_0}{\partial \alpha \partial \beta} t. \end{cases}$$

t est ici une quatrième coordonnée que, à moins de mention spéciale, nous supposerons toujours égale à l'unité.

Si l'on tient compte de ces formules, le système (2), qui définit le faisceau mobile, peut s'écrire

$$(4) \quad \begin{cases} E_x - iG_x = 0, \\ E_x + iG_x = 0. \end{cases}$$

Nous sommes ainsi amenés à considérer le système des quatre plans du faisceau définis par les équations

$$(5) \quad \begin{cases} E_x - iG_x = 0, & E_x = 0, \\ E_x + iG_z = 0, & G_x = 0. \end{cases}$$

auquel on peut substituer le système plus général

$$(6)\qquad \begin{cases} E_x - iG_x = 0, & \lambda' E_x + \lambda'' G_x = 0, \\ E_x + iG_x = 0, & \lambda'' E_x - \lambda' G_x = 0. \end{cases}$$

On vérifie que le système de plans défini par les deux équations de la seconde colonne constitue le système le plus général des plans orthogonaux du faisceau; d'ailleurs les quatre plans forment un faisceau harmonique.

Remarquons que, pour les valeurs réelles de $\frac{\lambda'}{\lambda''}$, les plans orthogonaux sont réels. Nous supposerons qu'il en est toujours ainsi.

Le système des plans orthogonaux du faisceau est appelé à jouer, par rapport aux surfaces réelles, un rôle analogue à celui du système des plans isotropes primitivement considéré par rapport aux surfaces quelconques; aussi allons-nous l'étudier avec quelques développements.

II.

Le premier système orthogonal qui attire notre attention est celui que l'on obtient en égalant à zéro les parties réelles et les parties imaginaires des premiers membres des équations des plans isotropes. On a ainsi les deux équations

$$(7)\qquad E_x = 0, \qquad G_x = 0.$$

Nous allons chercher à caractériser nettement, au point de vue géométrique, le mouvement de ces deux plans orthogonaux, comme nous l'avons fait pour le mouvement des deux plans isotropes.

Dans ce but, écrivons d'abord les deux systèmes d'équations qui définissent les enveloppes de chacun de ces plans, α et β étant ici considérées comme les variables indépendantes. En dérivant les premiers membres des équations (7) par rapport à chacune de ces variables, on trouve les deux systèmes

$$\begin{array}{ll} E_x = 0, & G_x = 0, \\ H_x = 0, & K_x = 0, \\ K_x = 0, & H_x = 0. \end{array}$$

Nous avons tenu compte de l'équation

$$\frac{\partial^2 C_0}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 C_0}{\partial \beta^2} = 0.$$

On remarque que les deux dernières équations sont les mêmes dans les deux systèmes. La droite qu'elles déterminent contient donc les deux points de contact des deux plans avec leurs enveloppes et n'est autre, par conséquent, que le segment qui relie les deux points. Il est l'analogue du segment relatif aux plans isotropes que nous avons déjà considéré. Pour la brièveté du langage, nous appellerons désormais ces deux segments : *segment isotrope, segment orthogonal.*

Les équations de celui-ci peuvent s'écrire

$$x = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} z + \frac{\alpha \dfrac{\partial^2 C_0}{\partial \alpha \partial \beta} - \beta \dfrac{\partial^2 C_0}{\partial \beta^2}}{\alpha^2 + \beta^2},$$

$$y = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} z + \frac{\alpha \dfrac{\partial^2 C_0}{\partial \beta^2} + \beta \dfrac{\partial^2 C_0}{\partial \alpha \partial \beta}}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

D'autre part, les paramètres directeurs de l'intersection du faisceau, étant proportionnels aux cosinus de la normale aux surfaces définies par l'équation (1), le sont aux quantités

$$2\alpha = u + u_1, \qquad 2\beta = i(u_1 - u), \qquad \alpha^2 + \beta^2 - 1 = uu_1 - 1.$$

Si l'on tient compte de ces relations, et qu'on désigne par γ, l'angle de l'intersection du faisceau avec l'axe des z, on trouve pour valeur du cosinus de l'angle du segment orthogonal avec cette intersection l'expression

$$\sqrt{\frac{1 + \cos\gamma}{2}} = \cos\frac{\gamma}{2}.$$

Or, si l'on cherche maintenant la valeur du cosinus de l'angle du même segment avec l'axe des z, on trouve cette même valeur. Le segment fait donc un angle égal avec l'axe des z et avec l'intersection du faisceau, et cet angle est la moitié de celui que font entre elles ces deux dernières droites. Le segment est donc parallèle à chacune d'elles. On vérifie d'ailleurs cette dernière propriété en remarquant que le segment orthogonal est situé dans le plan

$$H_x = \beta x - \alpha y + \frac{\partial^2 C_0}{\partial \beta^2} = 0,$$

plan parallèle à l'intersection du faisceau et à l'axe des z. Nous pouvons donc formuler le théorème suivant :

Théorème. — *Quand deux plans d'un faisceau mobile roulent respectivement sur deux développables isotropes conjuguées ; si l'on égale à* o *les parties réelles et imaginaires des premiers membres des équations de ces plans, on obtient un système orthogonal réel du faisceau. Ses deux plans roulent sur deux surfaces dont les points de contact respectifs sont sur une ligne droite, bissectrice de l'angle formé par une direction fixe et par l'intersection du faisceau.*

Nous prenons ici le terme *angle* dans le sens où il s'applique à des droites non concourantes.

Remarquons, en passant, que si l'on élimine les quantités α, β, C_0 et les dérivées de C_0 entre les trois équations

$$E_x = 0, \qquad H_x = 0, \qquad K_x = 0,$$

qui définissent l'enveloppe de l'un des plans orthogonaux, et les deux équations

$$\frac{\partial K_x}{\partial \alpha} = 0, \qquad \frac{\partial H_x}{\partial \alpha} = 0,$$

on obtient l'équation aux dérivées partielles

$$(p + \sqrt{1 + p^2 + q^2})^2 r + 2q(p + \sqrt{1 + p^2 + q^2}) s + (1 + p^2 + 2q^2) t = 0.$$

Nous obtenons ainsi une équation de la forme

$$Ar + Bs + Ct = 0,$$

où A, B, C sont des fonctions de p et de q et dont nous connaissons l'intégrale générale. Cette intégrale définit l'enveloppe des plans déterminés par l'équation

$$E_x = 0.$$

En permutant p avec q et r avec t, on aurait l'équation relative au second plan orthogonal.

Il existe une relation intéressante entre le segment orthogonal et le segment isotrope. Tous deux rencontrent chaque développable suivant la même génératrice et forment, par suite, avec ces deux génératrices un quadrilatère.

En effet, si l'on se reporte au système (3), on constate aisément, que les génératrices des développables sont définies respectivement par les deux systèmes

$$\begin{aligned} E_x - iG_x &= 0, \qquad & F_x + iG_x &= 0, \\ H_x - iK_x &= 0, \qquad & H_x + iK_x &= 0. \end{aligned}$$

D'ailleurs, le segment orthogonal est donné par les équations

$$H_x = 0, \qquad K_x = 0.$$

On voit donc que ce segment rencontre les génératrices. Le segment isotrope les rencontre également par définition. Notre proposition reste donc établie.

III.

Si l'on considère l'ensemble des quatre plans isotropes et orthogonaux définis par les équations (5) avec les deux segments correspondants, on remarquera qu'il existe une droite parallèle à l'intersection du faisceau et rencontrant les deux segments. On peut chercher à déterminer un système orthogonal du faisceau par la condition que cette droite partage le segment isotrope dans un rapport constant. C'est ce système, que nous allons chercher à déterminer, en calculant la valeur correspondante de la quantité $\frac{\lambda'}{\lambda''}$.

Partons du système orthogonal le plus général, tel qu'il a été défini par les équations (6), et déterminons les enveloppes de chacun de ces plans.

Si nous désignons par x_1, y_1, z_1, t_1 ; x_2, y_2, z_2, t_2, les coordonnées respectives de ces deux enveloppes, nous obtiendrons, en tenant compte des équations (3), les deux systèmes

$$\left\{\begin{array}{l}\lambda' E_{x_1} + \lambda'' G_{x_1} = 0,\\ \dfrac{\partial\lambda'}{\partial\alpha} E_{x_1} + \dfrac{\partial\lambda''}{\partial\alpha} G_{x_1} + 2\lambda'' H_{x_1} - 2\lambda' K_{x_1} = 0,\\ \dfrac{\partial\lambda'}{\partial\beta} E_{x_1} + \dfrac{\partial\lambda''}{\partial\beta} G_{x_1} + 2\lambda' H_{x_1} + 2\lambda'' K_{x_1} = 0;\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}\lambda'' E_{x_2} - \lambda' G_{x_2} = 0,\\ \dfrac{\partial\lambda''}{\partial\alpha} E_{x_2} - \dfrac{\partial\lambda'}{\partial\alpha} G_{x_2} - 2\lambda' H_{x_2} - 2\lambda'' K_{x_2} = 0,\\ \dfrac{\partial\lambda''}{\partial\beta} E_{x_2} - \dfrac{\partial\lambda'}{\partial\beta} G_{x_2} + 2\lambda'' H_{x_2} - 2\lambda' K_{x_2} = 0.\end{array}\right.$$

Posons

$$\frac{\lambda'}{\lambda''} = e^{2\theta}.$$

Un calcul, dont nous omettons le développement, substituera aux systèmes précédents les deux systèmes suivants

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{ll} E_{x_1} = -\rho_1 e^{-\theta}, & G_{x_1} = \rho_1 e^{\theta},\\ H_{x_1} = \rho_1 \dfrac{e^{-\theta}\dfrac{\partial\theta}{\partial\alpha} + e^{\theta}\dfrac{\partial\theta}{\partial\beta}}{2\cos 2i\theta}, & K_{x_1} = -\rho_1 \dfrac{e^{\theta}\dfrac{\partial\theta}{\partial\beta} - e^{-\theta}\dfrac{\partial\theta}{\partial\beta}}{2\cos 2i\theta},\end{array}\right.$$

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{ll} E_{x_2} = \rho_2 e^{\theta}, & G_{x_2} = \rho_2 e^{-\theta},\\ H_{x_2} = \rho_2 \dfrac{e^{-\theta}\dfrac{\partial\theta}{\partial\beta} - e^{\theta}\dfrac{\partial\theta}{\partial\alpha}}{2\cos 2i\theta}, & K_{x_2} = -\rho_2 \dfrac{e^{\theta}\dfrac{\partial\theta}{\partial\beta} + e^{-\theta}\dfrac{\partial\theta}{\partial\alpha}}{2\cos 2i\theta};\end{array}\right.$$

ρ_1 et ρ_2 sont ici des facteurs de proportionnalité.

Constatons, en passant, l'existence de deux relations entre les coordonnées des enveloppes, indépendantes du système orthogonal choisi.

On trouve, en effet,

$$\begin{array}{l} E_{x_1} E_{x_2} + G_{x_1} G_{x_2} = 0,\\ H_{x_1} H_{x_2} + K_{x_1} K_{x_2} = 0.\end{array}$$

Cela posé, écrivons l'équation générale des plans passant par les deux points de coordonnées x_1, y_1, z_1, t_1 ; x_2, y_2, z_2, t_2, ou, en d'autres termes, par le segment orthogonal qui relie ces deux points. Si nous désignons par x_3, y_3, z_3, t_3 les coordonnées d'un troisième point variable quelconque, nous aurons l'équation

$$\begin{vmatrix} x & y & z & t \\ x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \end{vmatrix} = 0.$$

En tenant compte du système (3), les propriétés des déterminants permettent d'écrire cette équation sous la forme

$$\begin{vmatrix} E_x & G_x & H_x & K_x \\ E_{x_1} & G_{x_1} & H_{x_1} & K_{x_1} \\ E_{x_2} & G_{x_2} & H_{x_2} & K_{x_2} \\ E_{x_3} & G_{x_3} & H_{x_3} & K_{x_3} \end{vmatrix} = 0.$$

Supposons les quantités x_3, y_3, z_3, t_3 choisies de telle sorte qu'on ait

$$E_{x_3} = 0, \qquad G_{x_3} = 0,$$

l'équation précédente deviendra

$$\begin{vmatrix} E_x & G_x & H_x \\ E_{x_1} & G_{x_1} & H_{x_1} \\ E_{x_2} & G_{x_2} & H_{x_2} \end{vmatrix} K_{x_3} - \begin{vmatrix} E_x & G_x & K_x \\ E_{x_1} & G_{x_1} & K_{x_1} \\ E_{x_2} & G_{x_2} & K_{x_2} \end{vmatrix} H_{x_3} = 0$$

et, en tenant compte des deux systèmes (8) et (9),

$$K_{x_3}\left[E_x \frac{\partial\theta}{\partial\alpha} - G_x \frac{\partial\theta}{\partial\beta} + 2\cos 2i\theta\, H_x\right] - H_{x_3}\left[E_x \frac{\partial\theta}{\partial\beta} + G_x \frac{\partial\theta}{\partial\alpha} + 2\cos 2i\theta\, K_x\right] = 0.$$

Si l'on a donné le système orthogonal, ou, ce qui revient au même, la quantité

$$\frac{\lambda'}{\lambda''} = e^{2\theta},$$

l'équation précédente définit le faisceau des plans passant par le segment orthogonal. Ce segment lui-même peut donc être défini par les deux équations

$$(10) \qquad \begin{cases} E_x \dfrac{\partial\theta}{\partial\alpha} - G_x \dfrac{\partial\theta}{\partial\beta} + 2\cos 2i\theta\, H_x = 0, \\ E_x \dfrac{\partial\theta}{\partial\beta} + G_x \dfrac{\partial\theta}{\partial\alpha} + 2\cos 2i\theta\, K_x = 0. \end{cases}$$

On vérifie que le premier de ces plans est parallèle à l'intersection du faisceau qui contient les plans orthogonaux et isotropes. Du reste, il suffit, pour s'en rendre compte, de remarquer que, des trois plans définis par les équations

$$E_x = 0, \qquad G_x = 0, \qquad H_x = 0,$$

les deux premiers contiennent cette intersection, tandis que le dernier lui est parallèle.

Le plan défini par l'équation (10) contient la droite que nous avons considérée au début. Cette droite, en effet, rencontre le segment orthogonal, et par suite le plan (10), qui contient ce segment. Elle est parallèle à l'intersection du faisceau; le plan, étant lui aussi parallèle à cette intersection, contient la droite tout entière. Par suite, il contient le point où cette droite rencontre le segment isotrope, point que nous voulons déterminer, de telle sorte qu'il partage ce segment dans un rapport constant. Pour cela, écrivons les équations des coordonnées d'un point vérifiant cette condition; portons ces valeurs dans l'équation du plan (10) en question et nous obtiendrons ainsi une équation où figureront θ et ses dérivées. Cette équation définissant θ définira, par le fait même, le système orthogonal cherché.

Les coordonnées du point sont données par les formules

$$x_0 = \frac{\mu X + \mu_1 X_1}{\mu + \mu_1}, \quad y_0 = \frac{\mu Y + \mu_1 Y_1}{\mu + \mu_1}, \quad z_0 = \frac{\mu Z + \mu_1 Z_1}{\mu + \mu_1}, \quad t_0 = \frac{\mu T + \mu_1 T_1}{\mu + \mu_1}$$

où $\frac{\mu}{\mu_1}$ garde une valeur constante.

En portant ces valeurs dans l'équation du plan il vient

$$E_{x_0} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} - G_{x_0} \frac{\partial \theta}{\partial \beta} + \cos 2i\theta \, H_{x_0} = 0; \tag{11}$$

E_{x_0}, G_{x_0}, H_{x_0} étant des fonctions connues de α et de β, on voit que le problème dépend d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre et du premier degré.

IV.

Au point où nous en sommes de notre étude, nous nous trouvons en état de résoudre le problème que nous nous sommes proposé au début. La solution ressort, comme un simple corollaire, des résultats que nous venons d'établir.

Nous venons, en effet, d'établir l'existence d'une droite parallèle à l'intersection du faisceau et coupant le segment isotrope en un point dont le rapport de distances aux extrémités est constant. Or, d'après ce que nous avons dit au commencement, une telle droite constitue l'élément d'une congruence normale aux surfaces définies par l'équation (1). Cette droite et ces surfaces sont d'ailleurs réelles, puisque les fonctions qui y figurent sont deux à deux conjuguées. Il suffit donc, pour résoudre le problème que nous avons en vue, de rattacher cette droite mobile à un système d'éléments géométriques réels. C'est ce qu'il est aisé de faire.

Considérons le système des deux plans orthogonaux réels, que nous venons de définir au moyen de la relation (11) et du segment orthogonal reliant les points de contact de leurs enveloppes [1]. La droite de la congruence normale aux surfaces réelles est parallèle à l'intersection des deux plans et coupe le segment correspondant. Elle est donc liée à ce système orthogonal comme la droite normale aux surfaces quelconques définies par l'équation (1) l'est aux plans isotropes et à leur segment. Seulement, dans le cas actuel, au lieu de décrire deux courbes, les extrémités du segment décriront deux surfaces dont les points sont associés deux à deux; ce sont les surfaces-enveloppes des plans orthogonaux.

On peut encore considérer le système de trois plans aux intersections parallèles, formé de deux plans orthogonaux et d'un troisième plan passant par le segment orthogonal. Une droite de ce plan, mais ici une droite seulement, d'ailleurs parallèle à leur intersection, constituera la normale aux surfaces cherchées.

On connaît la position de cette normale par rapport aux extrémités du segment isotrope. Si l'on voulait déterminer complètement sa position, au moyen d'éléments géométriques exclusivement réels, il faudrait chercher son rapport de distances aux extrémités du segment orthogonal. Nous croyons inutile de développer ce calcul.

Des considérations précédentes, appuyées sur un calcul facile que nous omettons, on déduit la proposition suivante :

Théorème. — *Soit un faisceau harmonique de quatre plans,*

---

(1) Nous supposons qu'on a pris pour θ une solution réelle.

dont deux tangents à des développables isotropes, et deux orthogonaux réels; si l'on choisit le système de ces derniers de telle sorte que la droite parallèle à l'intersection du faisceau, qui s'appuie sur les deux segments orthogonaux et isotropes, soit normale à une famille de surfaces, ces surfaces ne seront autres que les surfaces réelles définies par l'équation

$$\frac{\partial^4 \xi}{\partial u^2 \partial u_1^2} = 0.$$

Nous allons considérer un troisième système orthogonal du faisceau. Chacun des plans de ce faisceau partage le segment isotrope dans un rapport donné. Cherchons à déterminer un système orthogonal dont les deux plans coupent le segment isotrope en deux points dont les rapports de distances aux extrémités du segment aient une valeur constante.

Désignons par x_1, y_1, z_1, t_1; x_2, y_2, z_2, t_2 les coordonnées des points de rencontre des plans orthogonaux avec le segment isotrope. Ces points, appartenant au segment en question, pourront être représentés par les formules

$$x_1 = \frac{\mu' X + \mu'_1 X_1}{\mu' + \mu'_1}, \quad y_1 = \frac{\mu' Y + \mu'_1 Y_1}{\mu' + \mu'_1}, \quad z_1 = \frac{\mu' Z + \mu'_1 Z_1}{\mu' + \mu'_1}, \quad t_1 = \frac{\mu' T + \mu'_1 T_1}{\mu' + \mu'_1},$$
$$x_2 = \frac{\mu'' X + \mu''_1 X_1}{\mu'' + \mu''_1}, \quad y_2 = \frac{\mu'' Y + \mu''_1 Y_1}{\mu'' + \mu''_1}, \quad z_2 = \frac{\mu'' Z + \mu''_1 Z_1}{\mu'' + \mu''_1}, \quad t_2 = \frac{\mu'' T + \mu''_1 T_1}{\mu'' + \mu''_1},$$

$\frac{\mu'}{\mu'_1}, \frac{\mu''}{\mu''_1}$ représentent ici des quantités constantes.

Le système orthogonal le plus général a pour équations

$$\lambda' E_{x_1} + \lambda'' G_{x_1} = 0,$$
$$\lambda'' E_{x_2} - \lambda' G_{x_2} = 0.$$

Si l'on cherche à exprimer que ce système est satisfait quand on fait $x = x_1, \ldots$ dans la première, $x = x_2, \ldots$ dans la seconde, on trouve l'équation de condition

$$E_{x_1} E_{x_2} + G_{x_1} G_{x_2} = 0$$

qui, en tenant compte des relations faciles à vérifier

$$E_X - i G_X = 0, \qquad E_{X_1} + i G_{X_1} = 0,$$

se réduit à la relation

$$\mu' \mu''_1 + \mu'_1 \mu'' = 0.$$

On voit donc qu'il suffira d'écrire

$$x_1 = \frac{\mu X + \mu_1 X_1}{\mu + \mu_1}, \quad \ldots,$$
$$x_2 = \frac{\mu X - \mu_1 X_1}{\mu - \mu_1}, \quad \ldots,$$

et les équations du système orthogonal peuvent s'écrire

$$G_{x_1} E_x - E_{x_1} G_x = 0,$$
$$G_{x_2} E_x + E_{x_2} G_x = 0.$$

Si, par le point de rencontre de ces plans avec le segment isotrope, nous menons une parallèle à l'intersection du faisceau, cette droite partagera le segment isotrope dans un rapport constant, et, par suite, sera normale à une famille de surfaces cherchées. D'ailleurs les plans et le segment étant réels, les surfaces le sont elles-mêmes. Nous avons donc un système orthogonal de plans du faisceau qui contiennent chacun une droite normale à une famille de surfaces réelles définies par l'équation (1). Nous obtenons ainsi une nouvelle solution du problème.

Parmi les couples de plans orthogonaux, que nous venons d'étudier en dernier lieu, considérons celui pour lequel on a

$$\mu_1 = i\mu$$

et aux fonctions

$$X, \quad X_1, \quad Y, \quad Y_1, \quad Z, \quad Z_1, \quad T, \quad T_1$$

substituons, dans les formules qui donnent les coordonnées des points de rencontre du segment isotrope avec les plans orthogonaux, les fonctions analogues

$$(1+i)X, \quad (1-i)X_1, \quad (1+i)Y, \quad (1-i)Y_1, \quad \ldots.$$

Les coordonnées de ces points seront alors données par les formules

$$x_1 = X + X_1, \quad y_1 = Y + Y_1, \quad z_1 = Z + Z_1, \quad t_1 = T + T_1,$$
$$x_2 = i(X - X_1), \quad y_2 = i(Y - Y_1), \quad z_2 = i(Z - Z_1), \quad t_2 = i(T - T_1).$$

Telles sont les coordonnées de ces points de rencontre, c'est-à-dire des points qui décrivent les développées moyennes des surfaces, dont les normales sont situées dans chacun de ces plans. Or, dans le cas des surfaces minima (surfaces qui, on le sait, se confondent avec leurs développées moyennes), les deux groupes de formules que nous venons d'écrire définissent les surfaces que M. Ossian Bonnet a qualifiées de *surfaces adjointes* (1). Nous pouvons conserver cette dénomination pour tous les couples de surface vérifiant l'équation (1) dont les coordonnées des développées moyennes sont données par les formules précédentes.

D'après cette convention, si l'on étudie la déformation des surfaces qui correspond au déplacement d'un point du segment isotrope, allant d'un plan orthogonal à l'autre, on constate que la surface initiale se transformera finalement en son adjointe, après s'être identifiée successivement avec toutes les surfaces associées. On pourrait établir, pour toutes les surfaces vérifiant l'équation (1), une théorie analogue à celle des surfaces associées et adjointes, relatives aux surfaces minima.

On voit, par tout ce que nous venons de dire, quel lien étroit rattache les surfaces définies par l'équation

$$\frac{\partial^4 \xi}{\partial u^2\, \partial u_1^2} = 0$$

au faisceau de plans que nous venons d'étudier. Les surfaces et le faisceau dépendent des mêmes fonctions, en sorte que, de part et d'autre, le degré de généralité est le même. A toute propriété des surfaces correspond une propriété du faisceau et réciproquement. On peut même distinguer, dans les équations des coordonnées des surfaces, les fonctions d'où dépendent les développables isotropes de celles d'où dépendent les diverses courbes tracées sur les développables. Si l'on écrit, en effet, ξ sous la forme

$$\xi = (1 + uu_1)(B + B_1) + uC_1 + u_1 C$$

les développables isotropes dépendent seulement des fonctions C, C_1, tandis que les fonctions B, B_1 caractériseront les courbes tracées par ces développables.

(1) *Voir* DARBOUX, *Théorie des Surfaces*, T. I, Liv. III, Ch. V.