LECORNU.

Sur certaines équations aux différences mêlées

Bulletin de la S. M. F., tome 27 (1899), p. 153-160
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1899__27__153_0>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR CERTAINES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES MÊLÉES;

Par M. L. Lecornu.

L'étude d'un problème d'élasticité m'a conduit à chercher les fonctions $f(x)$ vérifiant identiquement l'équation

$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}=pf'(x)$$

dans laquelle h et p désignent deux constantes réelles données. Géométriquement, l'intégration revient à trouver les courbes telles que, pour tout arc dont les extrémités ont des abscisses x_0 et x_1 différant de $2h$, le coefficient angulaire de la corde soit dans un rapport constant, p, avec celui de la tangente au point d'abscisse moyenne $\frac{x_0+x_1}{2}$. Dans le cas où p est égal à l'unité, une droite quelconque, ainsi que toute parabole admettant l'axe des y comme diamètre, fournissent évidemment, quel que soit h, des solutions particulières.

Si nous faisons la substitution $y=e^{s\frac{x}{h}}$, nous obtenons la relation

$$e^s-e^{-s}=2ps,$$

qui doit être vérifiée par la nouvelle constante s. Si p est positif et supérieur à l'unité, il y a deux racines, égales et de signes contraires, qui conduisent aux courbes logarithmiques $y=e^{\pm s\frac{x}{h}}$. On voit aussi que la chaînette $y=\mathrm{A}\left(e^{s\frac{x}{h}}+e^{-s\frac{x}{h}}\right)$ répond à la question.

Si p est égal à l'unité, il y a une racine nulle. La solution correspondante est figurée par la droite $y=\text{const.}$ Pour obtenir une droite de direction quelconque, il faut partir de la solution $y=\mathrm{A}\frac{e^{s\frac{x}{h}}-e^{-s\frac{x}{h}}}{s}$ et faire tendre s vers zéro, ce qui donne à la limite $y=2\mathrm{A}\frac{x}{h}$. De même, pour obtenir une parabole, on n'a qu'à faire tendre s vers zéro dans l'équation $y = A\,\frac{e^{s\frac{x}{h}} - e^{-s\frac{x}{h}} - 2}{s^2}$. L'équation limite est $y = A\frac{x^2}{h^2}$.

Si p est positif et inférieur à l'unité, il y a deux racines purement imaginaires, $\pm im$, qui conduisent à la sinussoïde $y = A\cos m\frac{x}{h}$. La constante m, qu'on peut toujours supposer positive, est assujettie à vérifier la relation $\frac{\sin m}{m} = p$. Pour les valeurs de p supérieures à $\frac{2}{\pi}$, il n'y a qu'une solution. Pour les valeurs de p comprises entre $\frac{2}{\pi}$ et $\frac{2}{5\pi}$, il y a trois solutions, et ainsi de suite : le nombre des solutions augmente indéfiniment, par couples, à mesure que p se rapproche de zéro.

Pour $p = 0$, l'intégrale générale est évidemment une fonction admettant la période $2h$.

Dans le cas où p est négatif, l'équation en s n'a jamais de solutions réelles; mais il y a encore des solutions purement imaginaires tant que p est supérieur à $-\frac{2}{3\pi}$.

Cherchons maintenant les solutions complexes de l'équation en s. Si nous posons $s = u + iv$, nous avons à trouver les valeurs réelles de u et v vérifiant le système d'équations

$$(e^u - e^{-u})\cos v = 2pu,$$
$$(e^u + e^{-u})\sin v = 2pv.$$

Ces équations ne sont pas modifiées, quels que soient les signes attribués à u et v. Il suffit donc d'examiner le cas où ces quantités sont positives. Dans ces conditions, et en supposant également que p est positif, on reconnaît que $\sin v$ et $\cos v$ doivent être simultanément positifs, ce qui exige que l'extrémité de l'arc trigonométrique v tombe dans le premier quadrant; v est donc de la forme $2k\pi + \lambda\frac{\pi}{2}$, k et λ étant deux constantes positives, dont la première est entière et la seconde est inférieure à l'unité. Si l'on fait croître λ de zéro à un, la valeur u_1 de u donnée par la première équation croît constamment jusqu'à devenir infinie. La valeur u_2 donnée par la seconde équation part de ∞ et décroît constamment. Il y a donc, dans l'intervalle considéré, une racine et une seule. On doit toutefois faire une exception pour le premier intervalle $\left(0 < v < \frac{\pi}{2}\right)$. Quand v varie dans cet intervalle, u_2, au lieu de partir de ∞, part d'une valeur donnée par l'équation $e^u + e^{-u} = 2p$. Cette valeur (qui, jointe à $v = 0$, vérifie les deux équations) est réelle ou purement imaginaire suivant que p est supérieur ou inférieur à l'unité. Mais, dans tous les cas, une discussion aisée montre que la branche u_2 ne coupe pas la branche u_1 et que, par conséquent, le premier intervalle ne fournit aucune racine complexe.

En particulier, pour $p = 1$, la première racine complexe est celle qui se trouve dans l'intervalle de $v = 2\pi$ à $v = \frac{5\pi}{2}$. Cette racine est à peu près $2,8 + 7,5\sqrt{-1}$ et conduit à la courbe $y = e^{2,8\frac{x}{h}} \cos\left(7,5\frac{x}{h}\right)$.

Quand p est négatif, on trouve encore qu'il y a une infinité de racines complexes. Pour ces racines $\cos v$ et $\sin v$ sont simultanément négatifs, ce qui exige que v soit de la forme $(2k+1)\pi + \lambda\frac{\pi}{2}$.

Il reste à former l'intégrale générale. La fonction inconnue $f(x)$ peut évidemment être choisie d'une manière arbitraire dans un intervalle $2h$, et, une fois ce choix fait, elle se trouve déterminée de proche en proche pour toutes les valeurs réelles de x. Pour essayer de parvenir à l'expression analytique d'une pareille fonction, nous nous servirons de la formule suivante, indiquée par M. Picard (*Traité d'Analyse*, t. II, p. 175) :

$$F(x) = -\sum \frac{\psi(\lambda)}{\pi'(\lambda)} e^{\lambda x} \int_{x_0}^{x_1} e^{-\lambda\mu} F(\mu)\, d\mu,$$

la sommation étant étendue à toutes les racines de l'équation $\pi(\lambda) = 0$. Cette formule est démontrée seulement pour l'intervalle de x_0 à x_1, et sous les conditions que voici : Les fonctions ψ et π sont holomorphes. La fonction F satisfait aux conditions dites *de Dirichlet* (nombre limité de discontinuités et de maxima ou de minima dans l'intervalle considéré). En outre, quand la variable complexe $z = re^{i\varphi}$ augmente indéfiniment *sans que sa partie réelle soit négative*, les expressions $\frac{\psi(-z)}{\pi(-z)}$, $\frac{\pi(z) - \psi(z)}{\pi(z)}$ tendent vers l'unité et les expressions $\frac{\psi(z)}{\pi(z)} e^{z(x-x_0)}$, $\frac{\pi(-z)-\psi(-z)}{\pi(-z)} e^{z(x_1-x)}$ tendent vers zéro (on suppose ici que les valeurs attribuées à z forment une suite discontinue, ne s'approchant d'aucune racine de $\pi(z)$. La formule précédente reste valable si les expressions précédentes, pour certaines valeurs particulières, en nombre fini, de l'angle φ ne tendent pas vers les limites indiquées, pourvu qu'elles restent finies au voisinage de ces valeurs particulières.

Ceci rappelé, prenons pour ψ et pour π les fonctions

$$\psi(z) = -e^{-z},$$
$$\pi(z) = e^{z} - e^{-z} - 2pz.$$

Nous savons que l'équation $\pi(z) = 0$ a une infinité de racines λ, dont les modules croissent sans limite. On a

$$\frac{\psi(-z)}{\pi(-z)} = \frac{-e^{z}}{e^{-z} - e^{z} + 2pz},$$

expression qui tend bien vers l'unité lorsque le module de z augmente indéfiniment, avec un argument compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. Si l'argument de z est égal à $\pm\frac{\pi}{2}$, la limite est nulle : circonstance qui, d'après les conditions énoncées ci-dessus, n'influe pas sur le résultat final. En second lieu, l'expression

$$\frac{\pi(z) - \psi(z)}{\pi(z)} = \frac{e^{z} - 2pz}{e^{z} - e^{-z} - 2pz}$$

tend vers l'unité, même pour $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$.

Considérons maintenant l'expression

$$\frac{\psi(z)}{\pi(z)} e^{z(x-x_0)} = \frac{-e^{z(x-x_0-1)}}{e^{z} - e^{-z} - 2pz}.$$

Sa limite, pour mod $z = \infty$ et pour un argument φ compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ ou égal à l'une de ces limites, sera nulle si l'on a

$$x - x_0 - 2 < 0 \qquad \text{ou} \qquad x < x_0 + 2.$$

Si x atteint la valeur $x_0 + 2$, l'expression se réduit à $\frac{-e^{z}}{e^{z} - e^{-z} - 2pz}$ et elle a une limite égale à -1 (ou nulle pour

$\varphi = \pm \frac{\pi}{2}\Big)$. Il faut donc que x n'atteigne pas $x_0 + 2$, tout en pouvant s'en rapprocher autant qu'on le veut.

Enfin l'expression

$$\frac{\pi(-z) - \psi(-z)}{\pi(-z)} e^{z(x_1 - x)} = \frac{e^{-z} + 2pz}{e^{-z} - e^{z} + 2pz} e^{z(x_1 - x)}$$

a une limite nulle pourvu que l'on pose $x_1 - x - 1 < 0$, d'où $x > x_1 - 1$, l'inégalité excluant, ici encore, l'égalité.

En résumé, la formule est applicable si l'on a

$$x_1 - 1 < x < x_0 + 2.$$

Faisons d'abord $x_1 = x_0 + 1$. Cette double inégalité devient

$$x_0 < x < x_0 + 2.$$

Elle est vérifiée du moment où x est, comme nous l'avons supposé, compris entre x_0 et x_1.

Faisons en second lieu $x_1 = x_0 + 2$. Il vient

$$x_0 + 1 < x < x_0 + 2.$$

D'après cela, si l'on connaît les valeurs de la fonction $F(x)$ pour un intervalle allant de x_0 à $x_0 + 2$, on pourra représenter cette fonction, dans cet intervalle, par la formule

$$F(x) = \sum \frac{e^{\lambda(x-1)}}{e^{\lambda} + e^{-\lambda} - 2p} \int_{x_0}^{\xi} e^{-\lambda\mu} F(\mu)\, d\mu \qquad (e^{\lambda} - e^{-\lambda} = 2p\lambda),$$

la limite supérieure, ξ, des intégrales définies, étant $x_0 + 1$ ou $x_0 + 2$ suivant que x est compris entre x_0 et $x_0 + 1$ ou entre $x_0 + 1$ et $x_0 + 2$.

Changeons, dans la formule précédente, x en $\frac{x}{h}$, μ en $\frac{\mu}{h}$ et posons $F\left(\frac{x}{h}\right) = f(x)$. Remplaçons en outre x_0 par $\frac{a}{h} - 1$. Il vient

$$f(x) = \frac{1}{h} \sum \frac{e^{\lambda\left(\frac{x}{h} - 1\right)}}{e^{\lambda} + e^{-\lambda} - 2p} \int_{a-h}^{\alpha} e^{-\lambda\frac{\mu}{h}} f(\mu)\, d\mu.$$

La nouvelle limite, α, est égale à a ou à $a + h$ suivant que x est compris entre $a - h$ et a ou entre a et $a + h$.

Nous avons ainsi l'expression de $f(x)$ sous forme d'une série de termes, dont chacun, pris isolément, vérifie l'équation proposée. Il resterait à chercher pour quelles formes de la fonction $f(x)$, et dans quelles conditions, la formule peut être utilisée en dehors des limites pour lesquelles elle est établie.

Sans chercher à élucider ce point délicat, je me borne à faire remarquer qu'en prenant un nombre limité, mais aussi grand qu'on le voudra, de termes de la série, on obtient une fonction analytique qui répond à la question et qui, dans l'intervalle de $a-h$ à $a+h$, diffère aussi peu qu'on le veut d'une fonction arbitrairement choisie. C'est là, au point de vue pratique, sinon au point de vue théorique, un résultat suffisant.

La question que nous venons de traiter pourrait être considérablement étendue. Considérons une équation qui ne renferme pas explicitement la variable x et qui soit linéaire et homogène par rapport aux quantités

$$\begin{array}{cccc} y_0, & y_1, & \ldots, & y_{n-1}, \\ y'_0, & y'_1, & \ldots, & y'_{n-1}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ y_0^{(p)}, & y_1^{(p)}, & \ldots, & y_{n-1}^{(p)}. \end{array}$$

Dans ce Tableau $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ désignent les valeurs prises par une même fonction, y, de x lorsqu'on donne à x les n valeurs

$$x_0, \quad x_0+h_1, \quad \ldots, \quad x_0+h_{n-1}$$

(les h étant des constantes). $y'_k, y''_k, \ldots, y_k^{(p)}$ $(0 \leqq k \leqq n-1)$ sont les p premières dérivées de y_k.

Comment intégrer une pareille équation?

On se procure immédiatement une infinité de solutions particulières en posant $y = e^{sx}$ et choisissant convenablement la constante s. On a, en effet,

$$\begin{array}{llll} y_0 = e^{sx_0}, & y_1 = e^{sh_1}e^{sx_0}, & \ldots, & y_{n-1} = e^{sh_{n-1}}e^{sx_0}, \\ y'_0 = se^{sx_0}, & y'_1 = se^{sh_1}e^{sx_0}, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_0^{(p)} = s^p e^{sx_0}, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

En substituant ces valeurs dans l'équation proposée, on voit disparaître e^{sx_0} en vertu de l'homogénéité supposée. Il reste simplement une relation transcendante en s, et chacune des racines, en nombre infini, fournit une solution. Ceci est vrai sans que l'équation ait besoin d'être linéaire. L'équation étant linéaire, on peut ajouter que toute combinaison linéaire et homogène d'un nombre fini de solutions particulières est encore une solution.

Admettons que les coefficients de l'équation proposée soient réels, ainsi que les h, et qu'on ne donne à la variable x que des valeurs réelles. Dans ces conditions les racines en s sont réelles ou deux à deux imaginaires conjuguées, et l'on peut évidemment s'arranger de manière à n'avoir pour les solutions particulières y que des fonctions réelles.

Il est aisé de voir que, si les h sont rangés dans l'ordre des grandeurs croissantes, la fonction inconnue peut être choisie arbitrairement dans un intervalle inférieur à h_{n-1}, mais aussi voisin qu'on le veut de h_{-1} : il faut seulement que, pour la valeur limite, x_0+h_{n-1}, de la variable les quantités $y_{n-1}, \ldots, y_{n-1}^{(p)}$ vérifient l'équation donnée. Quand on fait croître ensuite x au delà de x_0+h_{n-1}, l'équation fournit à chaque instant, et de proche en proche, une relation entre des quantités déjà connues et les $p+1$ quantités $y_{n-1}, y'_{n-1}, \ldots, y_{n-1}^{p}$.

D'après cela, à partir de la valeur $x=x_0+h_{n-1}$, l'inconnue y se trouve déterminée par une équation linéaire du $p^{\text{ième}}$ ordre, dont l'intégration introduit p constantes arbitraires, indépendantes des valeurs arbitraires attribuées à y dans l'intervalle de x_0 à x_0+h_{n-1}. Toutefois, si l'on veut que pour $x=x_0+h_{n-1}$ l'intégrale ne présente aucune discontinuité, non plus que ses $p-1$ premières dérivées, les constantes d'intégration se trouvent déterminées par cette condition. Il est clair, d'ailleurs, que si la fonction et ses $p-1$ premières dérivées sont continues, il en est de même des dérivées suivantes : on le reconnaît en joignant à l'équation proposée celles qu'on en déduit par des différentiations successives. Des remarques analogues s'appliquent au prolongement de la fonction pour les valeurs de x inférieures à x_0 ; mais alors y_0 prend la place de y_{n-1}. Dans le cas où les dérivées de y_{n-1}, ou de y_0, ne figurent dans l'équation que jusqu'à un ordre inférieur à p, le nombre des constantes arbitraires se trouve nécessairement réduit.

Il est naturel de chercher à exprimer l'intégrale générale par une série de termes de la forme Ae^{sx}, en prenant pour s les racines de l'équation transcendante, rangées dans un ordre convenable. Les constantes devraient être calculées de manière à faire coïncider l'intégrale, dans un intervalle égal à h_{n-1}, avec une fonction arbitrairement choisie. Mais un pareil problème paraît bien difficilement abordable, et le cas particulier traité en commençant montre qu'on ne peut guère espérer une solution un peu simple.