Bulletin de la S. M. F.

C. Störmer

Solution complète en nombres entiers de l'équation $m \arctan \frac{1}{x} + n \arctan \frac{1}{y} = k\frac{\pi}{4}$

Bulletin de la S. M. F., tome 27 (1899), p. 160-170
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1899__27__160_1>

SOLUTION COMPLÈTE EN NOMBRES ENTIERS DE L'ÉQUATION

$$m \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{x} + n \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{y} = k \frac{\pi}{4};$$

Par M. Carl Störmer.

1. Notions préliminaires. — Point de départ.

La solution complète en nombres entiers m, n, x et y de l'équation ci-dessus, quand k est entier ou nul, a été l'objet d'une question posée, en 1894, dans l'*Intermédiaire des mathématiciens,* par M. D. Gravé, de Saint-Pétersbourg (1).

J'ai réussi, il y a quelques années, à résoudre ce problème (2). Voici ma solution, que je viens d'abréger considérablement.

Je vais d'abord rappeler les définitions principales (3) dans la théorie des nombres entiers complexes.

On appelle *nombre entier complexe* un nombre $\omega = a + ib$, où a et b sont des nombres entiers ou nuls et i l'unité imaginaire.

$\omega = a + ib$ et $\omega' = a - ib$ sont appelés des *nombres conjugués*. Si $\alpha = \beta\nu$, où α, β et ν sont des nombres entiers complexes,

---

(1) Tome I, p. 228.

(2) Voir *Solution complète en nombres entiers* m, n, x, y *et* k *de l'équation* $m \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{x} + n \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{y} = k \frac{\pi}{4}$, dans les *Christiania Videnskabsselskabs-skrifter*, 1895.

(3) *Voir*, par exemple, Lejeune-Dirichlet, *Recherches sur les formes quadratiques à coefficients et à indéterminées complexes,* dans le *Journal de Crelle,* 1842.

on dit que α est *divisible* par β. Cela posé, on a les mêmes règles de divisibilité que pour les nombres naturels.

On a quatre *unités,* 1, -1, i et $-i$. On appelle ω, $-\omega$, $i\omega$ et $-i\omega$ nombres *associés;* ils se présentent de la même manière dans toutes les questions de divisibilité.

α et β sont dits *premiers entre eux,* s'ils n'ont que des unités comme diviseurs communs. Deux nombres réels, sans diviseur réel commun, ne peuvent non plus avoir des diviseurs complexes communs.

Un nombre entier complexe q, qui n'est pas une unité complexe, est appelé *nombre premier complexe,* s'il n'a pour diviseurs que des unités et ses propres associés. On démontre que tous les nombres premiers complexes appartiennent à l'une des catégories suivantes ou sont associés aux nombres ainsi définis :

1° Le nombre $1 + i$;

2° Les nombres premiers réels de la forme $4h + 3$, h étant entier positif ou nul;

3° Les nombres premiers complexes $u + iv$ et $u - iv$, u étant pair et v impair, résultant de la décomposition unique ([1]) en deux carrés $u^2 + v^2$ de tout nombre premier réel de la forme $4h + 1$.

Avec ces notations on trouve que la théorie des nombres entiers complexes est tout à fait la même que celle des nombres naturels et on les manie avec la même facilité que ceux-ci.

Pour appliquer cette théorie à l'étude de notre équation indéterminée, prenons pour point de départ la formule bien connue

$$a + ib = re^{i\varphi},$$

où $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ est le module et $\varphi = \operatorname{arctang} \frac{b}{a}$ l'argument de la quantité complexe $a + ib$. Elle nous donne

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} &(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2)\ldots(a_n + ib_n) \\ &= \mathrm{R}e^{i\left[\operatorname{arctang}\frac{b_1}{a_1} + \operatorname{arctang}\frac{b_2}{a_2} + \ldots + \operatorname{arctang}\frac{b_n}{a_n}\right]}, \end{aligned} \right.$$

où R est le module du premier membre. On voit alors que la con-

([1]) *Voir*, par exemple, LEGENDRE, *Théorie des Nombres*, seconde Partie, § III.

dition nécessaire et suffisante pour que la somme

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{b_1}{a_1}+\operatorname{arc\,tang}\frac{b_2}{a_2}+\ldots+\operatorname{arc\,tang}\frac{b_n}{a_n}$$

soit nulle ou égale à un multiple de π est que le produit

$$(a_1+ib_1)(a_2+ib_2)\ldots(a_n+ib_n)$$

soit réel.

Si maintenant les a et les b sont des nombres entiers, le produit ci dessus sera un nombre entier complexe et l'on peut lui appliquer la théorie de ces nombres. Je me suis servi de cette méthode dans mon travail déjà cité. Plus tard, j'ai reconnu que Gauss [1] avait déjà remarqué cette liaison entre les nombres entiers complexes et les arcstangentes, liaison qui se présente d'ailleurs très naturellement.

2. Condition du problème.

Nous allons d'abord résoudre complètement en nombres entiers ρ, k, a et b, l'équation

$$\rho\operatorname{arc\,tang}\frac{b}{a}=k\frac{\pi}{4}. \tag{2}$$

On peut supposer que ρ et k sont positifs et premiers entre eux et que a et b sont premiers entre eux. Alors, pour que l'équation soit vérifiée, il faut que le produit $P=(1-i)^k(a+ib)^\rho$ soit réel.

Soit q un diviseur premier complexe divisant P. Si q n'est pas égal à $\pm 1 \pm i$, il divisera $(a+ib)^\rho$ et par conséquent $a+ib$, et P étant égal à son conjugué P′, il divisera aussi $a-ib$. Mais alors q divisera $2a$ et $2ib$, ce qui est impossible, a et b étant premiers entre eux.

Il faut donc que $q=\pm 1\pm i$, c'est-à-dire que $a+ib$ ne peut pas admettre d'autres diviseurs premiers que $1+i$ et ses associés. D'un autre côté, a et b étant premiers entre eux, $a+ib$ n'admet pas de diviseurs réels et par conséquent il ne peut pas être divisible par $q^2=\pm 2i$. Il faut donc que

$$a+ib=\varepsilon(1+i),$$

[1] *Voir* Gauss, *Werke*, t. II, p. 523.

ε étant une unité complexe, ce qui donne

$$a = \pm 1, \qquad b = \pm 1, \qquad \operatorname{arc\,tang} \frac{b}{a} = k_1 \frac{\pi}{4},$$

k_1 étant entier, ce qui, substitué à (2), donne $\rho k_1 = k$, équation qui exige que

$$\rho = 1.$$

Cela posé, nous allons trouver les solutions en m, n, x et y de l'équation

$$(3) \qquad m \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{x} + n \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{y} = k \frac{\pi}{4},$$

où k est entier ou nul. On peut évidemment supposer qu'aucun des coefficients m, n et k n'est négatif. Quant aux x et y, on peut les supposer différents entre eux et en valeur absolue plus grands que 1. En effet, dans le cas contraire, on voit aisément qu'on est conduit à une équation de la forme (2), ce qui exige que $|x| = |y| = 1$.

Quant aux coefficients m et n, on peut les supposer *premiers entre eux*. En effet, si $k = 0$, la chose est évidente. Si $k > 0$, posons $m = \rho m_1$, $n = \rho n_1$, où m_1 et n_1 sont premiers entre eux. Il vient

$$\rho \left(m_1 \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{x} + n_1 \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{y} \right) = k \frac{\pi}{4},$$

où ρ et k sont premiers entre eux. Or, en appliquant le théorème bien connu d'addition des arcs-tangentes, on réduit l'expression entre crochets à la forme $\operatorname{arc\,tang} \frac{b}{a}$, où a et b sont entiers ou nuls. Si a ou b est nul, $\operatorname{arc\,tang} \frac{b}{a}$ sera un multiple de $\frac{\pi}{2}$ et si a et b sont différents de 0, on peut les supposer premiers entre eux et l'on est alors conduit à une équation de la forme (2), ce qui exige que $\operatorname{arc\,tang} \frac{b}{a}$ soit un multiple de $\frac{\pi}{4}$. On aura ainsi dans tous les cas

$$\operatorname{arc\,tang} \frac{b}{a} = k_1 \frac{\pi}{4},$$

k_1 étant entier; d'où, en substituant la valeur de $\operatorname{arc\,tang} \frac{b}{a}$,

$$m_1 \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{x} + n_1 \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{y} = k_1 \frac{\pi}{4},$$

équation de la même forme que (3), mais où m_1 et n_1 sont premiers entre eux.

Cela posé, pour que l'équation (3) soit vérifiée, il faut que le produit $(1-i)^k(x+i)^m(y+i)^n$ soit réel, c'est-à-dire il faut que

$$(4) \qquad (1-i)^k(x+i)^m(y+i)^n = (1+i)^k(x-i)^m(y-i)^n.$$

Posons

$$\left.\begin{array}{l} x+i=(1+i)^\nu(a+ib) \\ y+i=(1+i)^\mu(c+id) \end{array}\right\}, \quad \text{d'où} \quad \left\{\begin{array}{l} 1+x^2=2^\nu(a^2+b^2), \\ 1+y^2=2^\mu(c^2+d^2), \end{array}\right.$$

où $\nu = 0$ ou $= 1$, selon que $1+x^2$ est impair ou pair, et établissons les mêmes conditions pour μ. Or, une somme de deux carrés premiers entre eux n'étant jamais divisible par 4, $a+ib$ et $c+id$ ne sont pas divisibles par $1+i$. Enfin, un diviseur commun à $x+i$ et $x-i$ divisant $2i$, $a+ib$ et $a-ib$ seront premiers entre eux et de même les nombres $c+id$ et $c-id$.

En substituant ces valeurs dans l'équation (4) et remarquant que $1+i=i(1-i)$, il vient

$$(a+ib)^m(c+id)^n = i^\rho(a-ib)^m(c-id)^n,$$

ρ étant entier. Or, les nombres $(a+ib)$ et $(a-ib)$ étant premiers entre eux, il faut que

$$(a+ib)^m = \varepsilon(c-id)^n,$$

ε étant une unité complexe; et, en se rappelant que m et n sont premiers entre eux, on en tire

$$\begin{array}{l} a+ib=\varepsilon_1(\alpha+i\beta)^n, \\ c-id=\varepsilon'_2(\alpha+i\beta)^m, \end{array}$$

ε_1 et ε'_2 étant des unités complexes et $\alpha+i\beta$ étant un nombre entier complexe, ce qui donne

$$(5) \qquad \left\{\begin{array}{l} x+i=\varepsilon_1(1+i)^\nu(\alpha+i\beta)^n, \\ y+i=\varepsilon_2(1+i)^\mu(\alpha-i\beta)^m. \end{array}\right.$$

Il faut donc que x et y satisfassent à ces conditions. On en tire aisément

$$(6) \qquad \left\{\begin{array}{l} 1+x^2=2^\nu A^n, \\ 1+y^2=2^\mu A^m, \\ x+y\equiv 0 \pmod{A}, \end{array}\right.$$

où $A = \alpha^2 + \beta^2$ est un nombre impair > 1 et où ν et μ sont nuls ou égaux à 1 (¹).

3. Solution complète des équations (6).

On est ainsi conduit à trouver toutes les solutions entières positives et > 1 des équations indéterminées

$$1 + x^2 = z^n \qquad \text{et} \qquad 1 + x^2 = 2z^n.$$

M. Lebesgue (²) a démontré que la première est impossible en nombres entiers x et z, si $n > 1$.

Nous allons appliquer à la seconde un procédé analogue à celui de M. Lebesgue. Supposons d'abord n impair et > 1. Comme x est impair et > 1, posons $x = 2\rho + 1$, ρ étant positif, d'où

$$\rho^2 + (\rho + 1)^2 = z^n,$$

équation qui peut s'écrire

$$[\rho + (\rho + 1)i][\rho - (\rho + 1)i] = z^n.$$

Or, un diviseur entier complexe, commun à $\rho + (\rho + 1)i$ et à $\rho - (\rho + 1)i$, divise aussi 2ρ, $2(\rho + 1)$ et $\rho^2 + (\rho + 1)^2$ et se réduit par suite à une unité. Il faut donc que

$$\rho + (\rho + 1)i = \varepsilon(\alpha + i\beta)^n, \tag{7}$$

où ε est une unité complexe et où $\alpha + i\beta$ est un nombre entier complexe dont la norme $\alpha^2 + \beta^2$ est égale à z. En multipliant les deux membres par

$$(1 - i)^n = (-2i)^{\frac{n-1}{2}}(1 - i)$$

il vient

$$2^{\frac{n-1}{2}} x + 2^{\frac{n-1}{2}} i = \varepsilon_1[\alpha + \beta - (\alpha - \beta)i]^n,$$

ε_1 étant une unité complexe, équation qui peut s'écrire

$$2^{\frac{n-1}{2}} x + 2^{\frac{n-1}{2}} i = \varepsilon_1[(\alpha + \beta)A + (\alpha - \beta)Bi]$$

(¹) On peut aussi démontrer que ces conditions (6) sont suffisantes; mais nous n'en n'avons pas besoin ici. *Voir* les *Comptes rendus,* 1896, nᵒˢ 4 et 5.

(²) *Voir* les *Nouvelles Annales,* t. IX, p. 180; 1850.

où A et B sont des nombres entiers réels. Mais cela exige que

$$(\alpha+\beta)A = \pm 2^{\frac{n-1}{2}}$$

ou

$$(\alpha-\beta)B = \pm 2^{\frac{n-1}{2}}.$$

Or, $\alpha^2+\beta^2$ étant égal au nombre impair z, l'un des nombres α et β sera pair, l'autre impair et, par conséquent, $\alpha\pm\beta$ sera impair, ce qui donne

$$\alpha\pm\beta = \pm 1.$$

Si α est pair et égal à $2\alpha_1$, on en tire

$$\alpha+i\beta = 2\alpha_1 \pm i \pm 2\alpha_1 i = \pm i[1\pm 2\alpha_1(1\pm i)]$$

et si β est pair et égal à $2\beta_1$, il vient

$$\alpha+i\beta = \pm 1 \pm 2\beta_1 + 2\beta_1 i = \pm[1\pm 2\beta_1(1\pm i)],$$

c'est-à-dire que l'on aura, dans tous les cas,

$$\alpha+i\beta = \varepsilon_2[1+2r(1\pm i)],$$

où r est un nombre entier et où ε_2 est une unité complexe, ce qui, substitué dans (7), donne

$$\rho+(\rho+1)i = \varepsilon_3[1+2r(1\pm i)]^n, \tag{8}$$

ε_3 étant une unité complexe.

En développant le second membre, on aura

$$[1+2r(1\pm i)]^n = P \pm iQ$$

où

$$P = 1+\binom{n}{1}(2r)-2\binom{n}{3}(2r)^3+\sum_{k=4}^{n} 4a_k\binom{n}{k}(2r)^k,$$

$$Q = \binom{n}{1}(2r)+2\binom{n}{2}(2r)^2+2\binom{n}{3}(2r)^3+\sum_{k=4}^{n} 4b_k\binom{n}{k}(2r)^k,$$

a_k et b_k étant des nombres entiers ou nuls et où l'on a posé

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots k} = \binom{n}{k}.$$

Pour que l'équation (8) soit vérifiée, il faut que

$$P\pm Q = \pm 1.$$

On aura donc les cas suivants :

1° $P + Q = 1$, ce qui donne

$$1 + 4nr + 8Mr = 1,$$

où M est un entier, d'où

$$n + 2M = 0,$$

ce qui est impossible, n étant impair.

2° $P \pm Q = -1$, ce qui donne une équation de la forme

$$2 + 4M = 0,$$

M étant entier, ce qui est aussi impossible.

3° $P - Q = 1$, ce qui donne

$$-2\binom{n}{2}(2r)^2 - 4\binom{n}{3}(2r)^3 + \sum_{k=4}^{n} 4(a_k - b_k)\binom{n}{k}(2r)^k = 0,$$

d'où

$$-2\binom{n}{3}(2r) + \sum_{k=4}^{n} 2(a_k - b_k)\binom{n}{k}(2r)^{k-2} = \frac{n(n-1)}{1.2}.$$

Or, n étant impair et > 1, on peut poser $n - 1 = 2^{\alpha+1}a$, où a doit être supposé impair et α entier positif ou nul, ce qui donne

$$(9) \qquad 2^{\alpha+2}M + \sum_{k=4}^{n} 2(a_k - b_k)\binom{n}{k}(2r)^{k-2} = 2^{\alpha}na,$$

où M est un nombre entier. Considérons le terme général sous le signe de sommation

$$U_k = 2(a_k - b_k)\,\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots k}\,(2r)^{k-2}$$
$$(k = 4, 5, 6, \ldots, n).$$

Ce terme U_k est un nombre entier ou nul. En disposant autrement les facteurs et en remplaçant $n - 1$ par sa valeur $2^{\alpha+1}a$, on aura

$$U_k = 2^{\alpha+1}na(n-2)\ldots(n-k+1)\,\frac{2^{k-1}}{1.2.3\ldots k}\,(a_k - b_k)r^{k-2}.$$

Or, comme on le sait [1], la plus grande puissance de 2 qui di-

[1] *Voir* Legendre, *Théorie des Nombres*, Introduction, XVIII.

vise $1.2.3 \ldots k$ sera égale ou inférieure à 2^{k-1} et, par conséquent, la forme irréductible de la fraction

$$\frac{2^{k-1}}{1.2.3 \ldots k}$$

ne contiendra pas le diviseur 2 dans son dénominateur. Tous les autres diviseurs de $1.2.3 \ldots k$ divisant le produit $na(n-2)\ldots(n-k+1)$, on peut écrire

$$U_k = 2^{\alpha+1} N_k,$$

N_k étant entier ou nul; en substituant ces valeurs en l'équation (9), il vient

$$2^{\alpha+2} M + 2^{\alpha+1} N = 2^{\alpha} na,$$

N étant entier ou nul; d'où

$$4M + 2N = na,$$

ce qui est impossible, na étant impair et > 0.

Donc, l'équation $1 + x^2 = 2z^n$ n'admet pas pour x et z des valeurs entières supérieures à 1, si n est un nombre impair > 1.

On en déduit que l'impossibilité subsiste encore si n contient un diviseur impair > 1. En effet, si $n = \rho m$, m étant impair et > 1, l'équation se réduit à $1 + x^2 = 2(z^\rho)^m$.

Donc pour que l'équation $1 + x^2 = 2z^n$, où $n > 1$, admette des solutions entières supérieures à 1, il faut que n soit une puissance de 2. Or, Lagrange (1) a démontré que l'unique solution en nombres entiers > 1 de l'équation $1 + x^2 = 2z^4$ est $x = 239$, $z = 13$, et, par conséquent, notre équation devient impossible pour $n > 4$.

Nous sommes ainsi conduit au théorème suivant :

Les valeurs entières positives de n, pour lesquelles l'équation $1 + x^2 = 2z^n$ admet des solutions entières plus grandes que 1, sont $n = 1$, $n = 2$ et $n = 4$.

Si $n = 1$, il y a une infinité de solutions, si $n = 2$, l'équation se réduit à l'équation de Pell $x^2 - 2z^2 = -1$ qui a aussi une infinité de solutions données par des formules bien connues (2), et si $n = 4$, on a l'unique solution $x = 239$, $z = 13$.

---

(1) *Voir* LAGRANGE, *Œuvres*, t. IV, p. 394, et aussi l'*Intermédiaire*, t. V, p. 94.

(2) *Voir*, par exemple, LEGENDRE, *Théorie des Nombres*, première Partie, § VI.

4. Solution complète du problème.

Les équations (6) ne peuvent donc être résolues que dans les cas suivants :

$$(\mathrm{I})\left\{\begin{array}{l}1+x^2=\;\mathrm{A},\\ 1+y^2=2\mathrm{A},\end{array}\right.\qquad(\mathrm{II})\left\{\begin{array}{l}1+x^2=\;\mathrm{A},\\ 1+y^2=2\mathrm{A}^2,\end{array}\right.\qquad(\mathrm{III})\left\{\begin{array}{l}1+x^2=2\mathrm{A},\\ 1+y^2=2\mathrm{A}^2,\end{array}\right.$$

$$(\mathrm{IV})\left\{\begin{array}{l}1+x^2=\;\mathrm{A},\\ 1+y^2=2\mathrm{A}^4,\end{array}\right.\qquad(\mathrm{V})\left\{\begin{array}{l}1+x^2=2\mathrm{A},\\ 1+y^2=2\mathrm{A}^4.\end{array}\right.$$

Nous allons en déduire toutes les solutions de notre équation (3) en étudiant les équations (5) correspondantes.

Dans *le premier cas,* on aura

$$x+i=\varepsilon_1(\alpha+i\beta),$$
$$y+i=\varepsilon_2(1+i)(\alpha-i\beta),$$

d'où

$$y+i=\varepsilon_3(1+i)(x-i)=\varepsilon_3[x+1+(x-1)i],$$

ε_3 étant une unité complexe. En identifiant les parties purement imaginaires, il vient

$$\pm x\pm 1=1,$$

qui donne $x=0$ à rejeter et $x=\pm 2$, d'où $\mathrm{A}=5$ et $y=\pm 3$. Or, pour que $x+y$ soit divisible par A, il faut que x et y aient le même signe et l'on aura la première solution de notre équation, *celle d'Euler,*

$$\operatorname{arctang}\frac{1}{2}+\operatorname{arctang}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}. \tag{10}$$

Dans *le deuxième cas,* on aura

$$x+i=\varepsilon_1(\alpha+i\beta),$$
$$y+i=\varepsilon_2(1+i)(\alpha-i\beta)^2,$$

d'où

$$y+i=\varepsilon_3(1+i)(x-i)^2=\varepsilon_3[x^2+2x-1+(x^2-2x-1)i],$$

ce qui donne

$$x^2\pm 2x-1=\pm 1,$$

d'où $x=\pm 1\pm\sqrt{3}$ et $x=0$, valeurs à rejeter, et $x=\pm 2$, ce qui donne $\mathrm{A}=5$ et $y=\pm 7$. Pour que $x+y$ soit divisible par A, il faut que x et y aient des signes opposés; on trouve ainsi comme deuxième solution

$$(11) \qquad 2 \operatorname{arctang} \frac{1}{2} - \operatorname{arctang} \frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}.$$

Dans *le troisième cas,* on aura

$$x + i = \varepsilon_1(1 + i)(\alpha + i\beta),$$
$$y + i = \varepsilon_2(1 + i)(\alpha - i\beta)^2,$$

d'où

$$2y + 2i = \varepsilon_3(1 + i)(x - i)^2,$$

ce qui donne

$$x^2 \pm 2x - 1 = \pm 2,$$

d'où $x = \pm 1$, à rejeter, et $x = \pm 3$, d'où $A = 5$ et $y = \pm 7$.

Pour que $x + y$ soit divisible par A, il faut que x et y aient le même signe; on aura ainsi la troisième solution de notre problème, *celle de Vega,*

$$(12) \qquad 2 \operatorname{arctang} \frac{1}{3} + \operatorname{arctang} \frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}.$$

Dans *les deux derniers cas,* on a $A = 13, y = \pm 239$.

Le système IV n'a donc pas de solution et dans le dernier cas on a $x = \pm 5$. Pour que $x + y$ soit divisible par A, il faut choisir les signes opposés de x et de y et l'on trouve ainsi la dernière des solutions, *celle de Machin,*

$$(13) \qquad 4 \operatorname{arctang} \frac{1}{5} - \operatorname{arctang} \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}.$$

Les équations (10), (11), (12) et (13) sont ainsi les seules solutions de notre problème ([1]).

([1]) J'ai fait aussi une étude assez détaillée de l'équation à trois termes $\lambda \operatorname{arctang} \frac{1}{x} + \mu \operatorname{arctang} \frac{1}{y} + \nu \operatorname{arctang} \frac{1}{z} = k\frac{\pi}{4}$ et de l'équation générale à n termes. *Voir* sur ce sujet : *Comptes rendus,* 1896, n^{os} 4 et 5, et mon Mémoire : *Sur l'application de la théorie des nombres entiers complexes à la solution en nombres rationnels de l'équation* $c_1 \operatorname{arctang} x_1 + \ldots + c_n \operatorname{arctang} x_n = k\frac{\pi}{4}$, publié dans l'*Archiv for Mathematik og Naturvidenskab,* Christiania, 1896.