COMBEBIAC.

Calcul des triquaternions

Bulletin de la S. M. F., tome 27 (1899), p. 180-194
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1899__27__180_1>

CALCUL DES TRIQUATERNIONS;

Par M. Combebiac.

Le calcul des quaternions réalise une simplification sur la méthode cartésienne, en supprimant les axes de coordonnées, sinon l'origine.

Les méthodes de l'*Ausdehnungslehre* de Grassmann se passent de tout système de référence, mais ne constituent pas un système numérique complexe, ce qui rend leur application pénible et très limitée.

Nous nous proposons d'établir un système numérique complexe susceptible de représenter les faits géométriques sans système de référence.

I.

SYSTÈME NUMÉRIQUE COMPLEXE DES TRIQUATERNIONS.

Le système numérique complexe des biquaternions (¹) repré-

(¹) Un biquaternion est une expression de la forme $q + \omega q_1$, où q et q_1 sont des quaternions et ω une unité complexe, dont le carré est nul.

sente, comme on sait, le groupe des mouvements sans déformation de l'espace.

Les mouvements dont l'angle de rotation est π et les complexes linéaires se correspondant d'une manière univoque, les biquaternions permettent de représenter les complexes linéaires, et, par suite, les lignes droites, qui en sont un cas particulier.

Mais aucun mouvement n'est caractéristique d'un point ou d'un plan. Ces éléments essentiels de l'espace ne sont donc pas représentés directement dans le calcul des biquaternions.

Pour réaliser un calcul présentant cet avantage, il suffit d'introduire quatre nouvelles unités obtenues en multipliant les quatre unités quaternioniennes 1, i, j, k par une autre μ commutative avec elles et formant avec ω et l'unité vulgaire un système numérique ayant les règles de multiplication suivantes :

$$\mu^2 = 1, \qquad \omega^2 = 0, \qquad \omega\mu = -\mu\omega = \omega.$$

On sait, d'après les recherches de M. Scheffers (1) sur les systèmes numériques complexes, que l'on obtient par ce procédé un système numérique à douze unités, comprenant celui des quaternions.

Nous appellerons *triquaternions* les quantités complexes composant ce système.

Un triquaternion est donc une expression de la forme

$$q + \omega q_1 + \mu q_2,$$

où q, q_1, q_2 sont des quaternions.

Les douze unités du système sont les quatre unités quaternioniennes et les produits de ces unités, soit par ω, soit par μ.

Dans ce système, les mouvements sont représentés, comme dans le système des biquaternions, par des expressions de la forme

$$q + \omega q_1,$$

avec la condition

$$q\overline{q_1} + q_1\overline{q} = 0,$$

$\overline{q}$ et $\overline{q_1}$ étant les quaternions conjugués de q et de q_1.

(1) SCHEFFERS, *Complexe-Zahlensysteme* (*Math. Ann.*, B. XXXIX; 1891).

Les transformations symétrales, c'est-à-dire les transformations qui résultent d'un mouvement et d'une symétrie, sont représentées par des expressions de la forme

$$\mu q + \omega q_1,$$

toujours avec la condition

$$q\overline{q_1} + q_1\overline{q} = 0.$$

Une transformation symétrale générale conserve un point et un plan passant par ce point.

Le vecteur allant de l'origine des coordonnées au point fixe est représenté par la partie vectorielle de q_1 divisée par la partie scalaire de q.

Le vecteur perpendiculaire au plan est la partie vectorielle de q.

L'angle de rotation est déterminé par q comme dans les mouvements euclidiens.

Les triquaternions permettent donc de représenter, outre les mouvements euclidiens, les transformations symétrales (1), et, par suite, les points et les plans, qui seront naturellement représentés par les opérations symétrales les plus simples qu'ils déterminent, savoir :

Un point de coordonnées $\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \frac{x_3}{x_0}$, par

$$\mu x_0 + \omega(ix_1 + jx_2 + kx_3);$$

Un plan d'équation $\beta_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$, par

$$\omega\beta_0 + \mu(i\alpha_1 + j\alpha_2 + k\alpha_3);$$

---

(1) M. Study a montré [Study, *Parameter-darstellung der Bewegungen und Umlegungen* (*Math. Ann.*, B. XXXIX; 1891)] que la multiplication des biquaternions peut représenter, outre la composition des mouvements entre eux, celle des transformations symétrales entre elles et avec les mouvements, à condition de changer les signes des coefficients de ωi, ωj, ωk, lorsque le premier des deux facteurs est une transformation symétrale. De plus, le résultat doit être pris comme transformation symétrale, si un seul des facteurs est une transformation symétrale, et comme mouvement dans les autres cas. C'est ce que l'on réalise en posant $\mu\omega = -\omega$.

Cette remarque est l'origine de ce Mémoire.

Une droite de coordonnées $\frac{p_{01}}{\alpha_1} : \frac{p_{02}}{\alpha_2} : \frac{p_{03}}{\alpha_3} : \frac{p_{23}}{\beta_1} : \frac{p_{31}}{\beta_2} : \frac{p_{12}}{\beta_3}$, par

$$i\alpha_1 + j\alpha_2 + k\alpha_3 + \omega(i\beta_1 + j\beta_2 + k\beta_3),$$

avec la condition $\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0$.

Appelons *similitude* une transformation résultant d'un mouvement et d'une homothétie.

Une similitude est représentée par une expression de la forme

$$q + \omega q_1 + \mu\lambda q,$$

où λ est un nombre vulgaire.

Le coefficient d'homothétie de la transformation a pour valeur

$$\frac{1+\lambda}{1-\lambda}.$$

On vérifie directement que le produit de deux expressions de cette forme a la même forme.

Si l'on veut qu'une similitude soit représentée par des triquaternions ne différant que par un facteur numérique, il suffit de poser la condition déjà signalée

$$q\bar{q}_1 + q_1\bar{q} = 0.$$

II.

FONCTIONS FONDAMENTALES.

Écrivons un triquaternion sous la forme

$$r \equiv w + l + p,$$

où w représente une quantité numérique vulgaire, p un plan et l une quantité de la forme

$$\mu x_0 + \rho + \omega\rho_1.$$

On voit que chacune des unités entrant dans une des trois expressions w, l, p n'entre dans aucune des deux autres, de sorte que r ne peut être mis sous la forme précédente que d'une seule manière.

De plus, cette forme de r est invariante par rapport au groupe des mouvements sans déformation ou, ce qui revient au même, est indépendante du système de référence, en tant que l'on ne considère que des systèmes de coordonnées trirectangulaires.

En effet, pour effectuer le mouvement représenté par

$$q + \omega q_1,$$

il suffit d'appliquer l'opération

$$(q + \omega q_1)(.)(q + \omega q_1)^{-1} \equiv \frac{1}{T^2 q}(q + \omega q_1)(.)(\bar{q} + \omega \bar{q}_1),$$

qui représente une transformation du groupe adjoint au groupe des mouvements euclidiens.

Cela résulte de la théorie des groupes de transformations, dont relève la théorie des systèmes numériques complexes. Car on sait, d'après les travaux de M. Poincaré et de M. Study, que chaque système numérique complexe représente un groupe projectif simplement transitif dont le groupe réciproque est aussi projectif.

Ainsi les quantités w, l et p sont bien déterminées par le triquaternion r, c'est-à-dire sont des fonctions de r, et nous pourrons poser

$$w = Gr, \qquad l = Lr, \qquad p = Pr.$$

Il résulte des règles de multiplication du système des triquaternions que le carré d'un point est une quantité vulgaire positive, le carré d'une droite une quantité vulgaire négative, ainsi que le carré d'un plan.

En mettant un triquaternion sous la forme

$$r \equiv w + \mu x_0 + d + p,$$

nous introduirons une nouvelle fonction : le *tenseur* de r

$$Tr = \sqrt{w^2 + x_0^2 - d^2 - p^2}.$$

Le tenseur d'un produit est égal au produit des tenseurs des facteurs.

III.

ÉLÉMENTS LINÉAIRES.

Examinons la nature des éléments géométriques représentés par les expressions de la forme

$$l \equiv \mu x_0 + \rho + \omega\rho_1.$$

Nous nous servirons, pour simplifier l'écriture, des fonctions quaternioniennes S et V.

Si $\rho = 0$, l représente un point.

Si $x_0 = 0$, l représente un complexe linéaire, qui devient une droite, si $S\rho\rho_1 = 0$.

Si l'on a en même temps

$$\rho = 0, \qquad x_0 = 0,$$

l'expression se réduit à $\omega\rho_1$ et représente à la fois le point à l'infini dans la direction indiquée par ρ_1 et la polaire de ce point, par rapport au cercle imaginaire, c'est-à-dire la droite de l'infini commune aux plans perpendiculaires à ρ_1.

Notre calcul ne distingue donc pas entre les points et les droites de l'infini, et ce sont ces quantités que nous appellerons des *vecteurs*.

Un complexe linéaire $\rho + \omega\rho_1$ peut toujours se mettre sous la forme de la somme d'une droite et d'un vecteur ayant la même direction. Il suffit, pour cela, de décomposer $\omega\rho_1$ en deux vecteurs ayant l'un la direction de ρ, l'autre une direction perpendiculaire.

L'expression l peut se mettre sous la forme de la somme d'un point et d'une droite passant par ce point. Il est facile de le voir géométriquement. On le voit aussi en écrivant l sous la forme

$$(\mu x_0 + \omega\beta) + (\rho + \omega\rho_1 - \omega\beta),$$

où β est déterminé par la condition

$$V\rho\beta + x_0(\rho_1 - \beta) = 0,$$

d'où

$$(x_0^2 - \rho^2)\beta = x_0^2\rho_1 + x_0 V\rho\rho_1 - \rho S\rho\rho_1.$$

Nous dirons que l représente un *élément linéaire*.

Un élément linéaire dépend, en somme, d'un point et d'une direction. L'expression l représente aussi un *élément superficiel*, c'est-à-dire un point et un plan le contenant, savoir le plan perpendiculaire à la direction déterminée par l.

En mettant l'élément linéaire sous la forme

$$l = m + d,$$

où m est un point et d une droite passant par ce point, nous appellerons *masse* de l'élément la quantité numérique $\mathrm{T}m$ et *axe* de l'élément la droite $\frac{d}{x_0}$. La *longueur* de l'élément sera la longueur de l'axe, c'est-à-dire $\sqrt{\frac{-d^2}{x_0^2}}$.

Posons encore

$$\bar{l} = m - d.$$

On a

$$l\bar{l} = m^2 - d^2 - md + dm = m^2 - d^2,$$

car l'expression $md - dm$, qui est égale à $2\mathrm{L}md$, est nulle lorsque le point m est situé sur d.

La fonction $\bar{l}$ de l est donc déterminée par l'équation

$$\bar{l} = l^{-1}\mathrm{T}\,l^2.$$

On a évidemment

$$m = \frac{l+\bar{l}}{2}, \quad d = \frac{\bar{l}-l}{2}.$$

On a

$$l^2 = x_0^2 + \rho^2 + 2(x_0\mu\rho + \omega\mathrm{S}\rho\rho_1).$$

$x_0^2 + \rho^2$ est une quantité vulgaire. L'expression entre parenthèses est un plan. La condition

$$\mathrm{P}\,l^2 = 0$$

exprime que l est un point ($\rho = 0$) ou une droite ($x_0 = 0$, $\mathrm{S}\rho\rho_1 = 0$).

On vérifie directement que $\mathrm{P}l^2$ représente le plan perpendiculaire à la direction de l et passant par le point de l.

Si l est un complexe, c'est-à-dire si son point est rejeté à l'infini, $\mathrm{P}l^2$ représente le plan de l'infini avec un coefficient égal au *moment* du complexe. On remarque que la connaissance de $\mathrm{G}l^2$ et de $\mathrm{T}l^2$ détermine les quantités x_0^2 et ρ^2, c'est-à-dire la masse du point et la longueur de la droite, qui sont ainsi indépendantes du système de référence.

Le produit ωl se compose d'un vecteur, qui représente la direction de l et d'une partie planaire, qui est le plan de l'infini ω avec $-x_0$ pour coefficient.

La notion d'élément linéaire est indépendante du calcul des triquaternions, et la Géométrie des éléments linéaires paraît présenter un intérêt comparable à celui de la Géométrie réglée et de la Géométrie des sphères.

Considérons les transformations projectives de la variété M_6 formée des éléments linéaires, c'est-à-dire les transformations linéaires homogènes des coordonnées dont l'ensemble est représenté par x_0, ρ, ρ_1.

Ne retenons parmi ces transformations que celles qui conservent la variété linéaire

$$x_0 = 0,$$

et, dans cette variété, la quadrique dont les équations sont

$$x_0 = 0, \qquad S\rho\rho_1 = 0.$$

Remplaçons les sept coordonnées homogènes par six coordonnées obtenues en divisant les premières par x_0, ce qui revient à égaler x_0 à l'unité et à prendre comme coordonnées de l'élément ρ et ρ_1.

Les transformations considérées laissent invariante une équation différentielle quadratique

$$S\,d\rho\,d\rho_1 = 0.$$

Le groupe des transformations projectives de la variété M_6 qui conservent une expression quadratique $S\,d\rho\,d\rho_1$ présente des propriétés tout à fait analogues à celles du groupe euclidien de l'espace ponctuel.

Deux éléments linéaires présentent par rapport à ce groupe un invariant correspondant à la distance dans l'espace ponctuel. Cet invariant est

$$S(\rho - \rho')(\rho_1 - \rho'_1)$$

si les vecteurs servant de coordonnées aux deux éléments sont (ρ, ρ_1) et (ρ', ρ'_1).

On peut, dans cette expression, remplacer ρ_1 et ρ'_1 par leurs expressions en fonction des vecteurs β et β' des points, savoir :

$$\rho_1 = \beta - V\rho\beta, \qquad \rho'_1 = \beta' - V\rho'\beta'.$$

L'expression de l'invariant devient

$$S(\rho - \rho')(\beta' - \beta) + S\rho\rho'(\beta' - \beta)$$

ou

$$S(\rho - \rho' - V\rho\rho')(\beta - \beta').$$

On voit que sa valeur est indépendante du système de coordonnées, car le premier facteur ne dépend que des axes des deux éléments, et le second facteur est le vecteur allant du point β au point β'.

On peut donner à cet invariant le nom de *moment* des deux éléments.

Deux complexes linéaires c et c' ont aussi un invariant correspondant dans l'espace ponctuel au cosinus de l'angle de deux directions. Cet invariant a pour expression

$$\frac{S\rho\rho'_1 + S\rho_1\rho'}{\sqrt{\rho^2\rho'^2}} \quad \text{ou} \quad \frac{\omega^{-1}Pcc'}{TcTc'},$$

C'est le moment des deux complexes.

La variété linéaire M_3 formée des points de l'espace rencontre la variété linéaire M_5 formée des complexes linéaires suivant une variété linéaire M_2 formée des points ou droites de l'infini. Cette variété M_2 est évidemment une génératrice linéaire de la quadrique des droites.

L'expression différentielle $Sd\rho d\rho_1$ joue le même rôle que $dx^2 + dy^2 + dz^2$ dans l'espace ponctuel. La variété M_5 des complexes linéaires correspond au plan de l'infini ; la quadrique des droites, au cercle imaginaire ; la variété M_3 des points de l'espace, à une droite isotrope.

La différence $l' - l$ de deux éléments linéaires l et l' ayant des masses égales à l'unité est un complexe linéaire.

Le moment de ces deux éléments est représenté par les coefficient de ω dans $P(l' - l)^2$.

La condition

$$P(l' - l)^2 = 0$$

exprime que le complexe $l' - l$ est une ligne droite.

Cette condition est réalisée, par exemple, quand les droites des deux éléments sont parallèles et égales; $l' - l$ est, dans ce cas, un vecteur.

$\mathrm{L}ll'$ est un complexe dont l'axe est perpendiculaire aux axes de l et l'.

Si les deux facteurs sont des points, $\mathrm{L}ll'$ représente le vecteur qu'ils déterminent, multiplié par les masses des deux points.

Si l'un des facteurs est un point et l'autre une droite, $\mathrm{L}ll'$ représente le vecteur perpendiculaire au plan passant par ce point et cette droite, avec une longueur proportionnelle à la distance du point à la droite.

L'équation

$$\mathrm{L}ll' = 0$$

exprime que les axes de l et l', ainsi que leurs points, coïncident en position, la masse et la longueur pouvant être différentes pour les deux éléments.

En particulier, si l'un des éléments est une droite, c'est-à-dire si son point est nul, l'autre élément doit avoir son point sur cette droite, et son axe dirigé suivant cette droite, de sorte que si l'un des facteurs est un point et l'autre une droite, la relation précédente exprime que le point est situé sur la droite.

$\mathrm{P}ll'$ est un plan perpendiculaire à la résultante des deux axes. Il est rejeté à l'infini, si cette résultante est nulle, c'est-à-dire si les deux axes forment un couple, ou encore si les deux éléments l et l' sont des complexes. Enfin le plan à l'infini devient nul lui-même si les points de l et l' sont situés dans un plan perpendiculaire aux deux axes ou si les deux complexes sont en involution.

Si l'un des facteurs est un point et l'autre une droite, $\mathrm{P}ll'$ représente le plan mené par le point perpendiculairement à la droite.

Si les deux facteurs sont des complexes, $\mathrm{P}ll'$ a pour expression le symbole du plan de l'infini ω pris avec le signe — et multiplié par les tenseurs des facteurs et par leur moment (par leur distance, si les complexes sont des droites).

Pour terminer l'interprétation du produit de deux éléments linéaires, remarquons les trois formules :

$$\mathrm{G}md = 0, \qquad \mathrm{G}mm' = \mathrm{T}m\mathrm{T}m', \qquad \mathrm{G}dd' = -\mathrm{T}d\mathrm{T}d'\cos(d, d').$$

La nullité de $\mathrm{G}dd'$ exprime la perpendicularité des deux droites.

IV.

PRODUIT DE DEUX FACTEURS DONT L'UN EST UN PLAN.

Remarquons les formules suivantes où l et l' représentent des éléments linéaires, p et p' des plans :

$$\begin{array}{lll} \mathrm{G}ll' = \mathrm{S}l'l, & \mathrm{L}ll' = -\mathrm{L}l'l, & \mathrm{P}ll' = \mathrm{P}l'l, \\ \mathrm{G}lp = 0, & \mathrm{L}lp = \mathrm{L}pl, & \mathrm{P}lp = -\mathrm{P}pl, \\ \mathrm{G}pp' = \mathrm{S}p'p, & \mathrm{L}pp' = -\mathrm{L}p'p, & \mathrm{P}pp' = 0. \end{array}$$

Ces résultats peuvent être résumés ainsi :

La fonction G admet l'inversion de l'ordre des facteurs. La fonction L l'admet quand les facteurs sont d'espèces différentes et change de signe dans le cas contraire. La fonction P se comporte d'une manière inverse.

Nous avons interprété dans le paragraphe précédent le produit de deux éléments linéaires.

Examinons maintenant le produit de deux plans et celui d'un élément linéaire et d'un plan.

On a

$$pp' = \mathrm{G}pp' + \mathrm{L}pp' = -\mathrm{T}p\mathrm{T}p\cos(p, p') + \mathrm{T}p\mathrm{T}p'\,\delta\sin(p, p'),$$

où δ est la droite d'intersection des deux plans p et p', et (p, p') l'angle des deux plans, c'est-à-dire l'angle déterminé par la rotation positive autour de δ, qui amène le côté positif de p en coïncidence avec le côté positif de p'. Le sens de la rotation positive par rapport à une droite dirigée dépend des conventions primitives que l'on a dû faire en posant $ij = k$. On voit que notre définition ne détermine pas une direction positive pour δ ni un signe pour $\sin(p, p')$. Le signe de $\sin(p, p')$ change avec la direction choisie pour δ, mais le produit $\delta\sin(p, p')$ est bien déterminé.

L'expression $\mathrm{L}lp$ représente un élément linéaire, dont le point est sur le plan p et dont l'axe est perpendiculaire à ce plan.

Si l se réduit à un point, $\mathrm{L}lp$ est la droite menée par ce point perpendiculairement au plan p.

Si l se réduit à une droite, $\mathrm{L}lp$ est son point d'intersection avec le plan p, pris avec une masse proportionnelle au sinus de l'angle de la droite et du plan.

L'équation

$$\mathrm{L}\,dp = 0$$

exprime que la droite d est située dans le plan p.

L'expression $\mathrm{P}\,lp$ représente un plan perpendiculaire au plan p et parallèle à l'axe de l.

Lorsque l'élément l se réduit à une droite, $\mathrm{P}\,lp$ représente le plan mené par cette droite perpendiculairement au plan p.

Si l est un point, $\mathrm{P}\,lp$ se réduit au symbole ω du plan de l'infini pris avec le signe $-$ et multiplié par les tenseurs du plan et du point et par la distance du point au plan, affectée d'un signe convenable, de sorte que l'équation

$$\mathrm{P}\,mp = 0,$$

où m représente un point variable, est l'équation du plan p.

V.

APPLICATION AU MOUVEMENT DES SYSTÈMES INDÉFORMABLES.

Cette application a pour but de montrer la simplicité des calculs en triquaternions.

Nous savons qu'un mouvement sans déformation est représenté par un biquaternion

$$r \equiv q + \omega q_1 \equiv \alpha_0 + i\alpha_1 + j\alpha_2 + k\alpha_3 + \omega(\beta_0 + i\beta_1 + j\beta_2 + k\beta_3)$$

satisfaisant à la condition

$$q\overline{q_1} + q_1\overline{q} = 0 \qquad [\mathrm{P}r^2 - 2(\mathrm{L}r)^2 = 0],$$

ou

$$\alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0.$$

La droite qui reste invariable dans le mouvement est l'axe du complexe $\mathrm{L}r$

$$i\alpha_1 + j\alpha_2 + k\alpha_3 + \omega(i\beta_1 + j\beta_2 + k\beta_3).$$

L'angle de rotation 2θ et la grandeur du glissement 2η sont déterminés par les formules

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\alpha_0}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}}, \qquad \eta = \frac{\beta_0}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}}.$$

Supposons

$$\mathrm{T}r = 1,$$

c'est-à-dire

$$\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1,$$

et désignons par δ l'axe du mouvement pris avec un tenseur égal à l'unité.

Nous pouvons alors, d'après ce qui précède, écrire r sous la forme

$$r \equiv \cos\theta + \delta\sin\theta - \omega\,\delta\eta\cos\theta + \omega\eta\sin\theta.$$

Un point μ devient, après le mouvement représenté par r,

$$(1)\qquad \begin{cases} \mu' = r^{-1}\mu r = (\cos\theta - \delta\sin\theta + \omega\,\delta\eta\cos\theta + \omega\eta\sin\theta) \\ \qquad\qquad \times\ \mu(\cos\theta + \delta\sin\theta - \omega\,\delta\eta\cos\theta + \omega\eta\sin\theta), \end{cases}$$

ou, en effectuant les calculs,

$$(1)^a \qquad \mu' = \mu - 2\,\delta\mathrm{L}\mu\,\delta\sin^2\theta + \mathrm{L}\mu\,\delta\sin 2\theta + 2\omega\,\delta\eta,$$

ou encore, en mettant en évidence la projection $\delta\mathrm{P}\mu\,\delta$ du point μ sur l'axe,

$$(1)^b \qquad \mu' = -\,\delta\mathrm{P}\mu\,\delta + \delta\mathrm{L}\mu\,\delta\cos 2\theta + \mathrm{L}\mu\,\delta\sin 2\theta + 2\omega\,\delta\eta.$$

Les droites et les plans donnent lieu à des formules analogues. C'est ainsi que l'on a

$$(2) \qquad d' = r^{-1} d r,$$

ou, en supposant d'abord η nul,

$$(2)^a \qquad d' = d - 2\delta\mathrm{L}\,d\delta\sin^2\theta + \mathrm{L}\,d\delta\sin 2\theta,$$

$$(2)^b \qquad d' = -\,\delta\mathrm{P}\,d\delta + \delta\mathrm{L}\,d\delta\sin^2\theta + \mathrm{L}\,d\delta\sin 2\theta.$$

Si η n'est pas nul, on doit ajouter à chacune des deux expressions précédentes $2\omega\mathrm{L}\,\delta d'\eta$.

Enfin, on a, de même,

$$(3) \qquad p' = r^{-1} p r,$$

$$(3)^a \qquad p' = p - 2\,\delta\mathrm{P}p\,\delta\sin^2\theta + \mathrm{P}p\,\delta\sin 2\theta + 2\mathrm{P}\omega\,\delta p\eta,$$

$$(3)^b \qquad p' = -\,\delta\mathrm{L}p\,\delta + \delta\mathrm{P}p\,\delta\cos 2\theta + \mathrm{P}p\,\delta\sin 2\theta + 2\mathrm{P}\omega\,\delta p\eta.$$

Supposons que r représente un mouvement infinitésimal, c'est-à-dire que θ et η soient infiniment petits. Dans ce cas, en désignant par λ le rapport $\frac{\eta}{\theta}$ et en négligeant les infiniment petits du second ordre, le biquaternion r deviendra

$$1+(\delta-\omega\,\delta\lambda)\theta,$$

et l'on aura

$$\mu'=\mu+2\mathrm{L}\mu(\delta-\omega\,\delta\lambda)\theta. \tag{4}$$

Faisons maintenant intervenir le temps. On pourra poser

$$\frac{d\mu}{dt}=\mathrm{L}\mu c, \tag{5}$$

en désignant par c un complexe linéaire, que l'on peut appeler le *complexe instantané*.

L'accélération du point μ a évidemment pour expression

$$\frac{d^2\mu}{dt^2}=\mathrm{L}\mu\frac{dc}{dt}+\mathrm{L}\frac{d\mu}{dt}c=\mathrm{L}\mu\frac{dc}{dt}+\mathrm{L.L}\mu c.c.$$

Dans le mouvement d'un système indéformable, la position à un instant donné peut être déterminée par le biquaternion r représentant le déplacement unique par lequel on passerait d'une position arbitrairement choisie à la position au temps t.

Exprimons le complexe instantané en fonction de r et de $\frac{dr}{dt}$.

On a, en désignant par μ_0 la position initiale du point μ,

$$\mu=r^{-1}\mu_0 r,$$

d'où

$$\frac{d\mu}{dt}=\frac{d(r^{-1})}{dt}\mu_0 r+r^{-1}\mu_0\frac{dr}{dt}=-r^{-1}\frac{dr}{dt}r^{-1}\mu_0 r+r^{-1}\mu_0\frac{dr}{dt}$$
$$=-r^{-1}\frac{dr}{dt}\mu+\mu r^{-1}\frac{dr}{dt}=-2\mathrm{L}.\mu\mathrm{L}\frac{dr}{di}r^{-1},$$

en remarquant que $\mathrm{P}\frac{dr}{dt}r^{-1}=0$.

On voit donc, par comparaison avec la formule (5), que le complexe instantané a pour expression

$$c=-2\mathrm{L}\frac{dr}{dt}r^{-1}. \tag{6}$$

Si nous supposons, comme nous pouvons toujours le faire, que r conserve son tenseur égal à l'unité, l'on a $\mathrm{G}.r^{-1}\frac{dr}{dt}=0$.

Par suite, l'on peut écrire simplement

$$c=-2\frac{dr}{dt}r^{-1}, \tag{6^a}$$

d'où

$$(7) \qquad r^{-1}cr = -2r^{-1}\frac{dr}{dt}.$$

$r^{-1}cr$ représente le complexe qui, par le mouvement r, devient le complexe instantané. $r^{-1}cr$ représente donc la position du complexe instantané par rapport au système mobile.

Avant d'entreprendre par le calcul des triquaternions la dynamique des solides, il est nécessaire de combler une lacune de ce calcul, qui a en effet le grand défaut de ne pas permettre l'introduction commode de la droite joignant deux points donnés ou du plan contenant une droite et un point donnés.

Ce sera l'objet d'une prochaine Communication.