BULLETIN DE LA S. M. F.

G. HALPHEN

Sur le contact des courbes planes avec les coniques et les courbes du troisième degré

Bulletin de la S. M. F., tome 4 (1875-1876), p. 59-85
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1875-1876__4__59_1>

Sur le contact des courbes planes avec les coniques et les courbes du troisième degré; par M. Halphen.

(Séance du 15 décembre 1875.)

1. Parmi les espèces, en nombre indéfini, de points particuliers dont la théorie du contact nous révèle l'existence sur les courbes planes, je me propose ici d'en considérer spécialement deux. J'envisagerai les points en lesquels une courbe se rapproche plus qu'en tout autre point, en premier lieu d'une conique, en second lieu d'une courbe du troisième degré ou *cubique*. Les premiers ont déjà attiré l'attention de plusieurs géomètres, notamment MM. Cayley, Zeuthen, Painvin. Ils ont reçu de M. Cayley le nom de *points sextactiques*, généralement adopté. Les seconds ne me paraissent pas avoir été étudiés jusqu'à présent. Le problème que je me propose ici consiste à trouver le nombre de ces points sur une courbe algébrique offrant des singularités quelconques. Pour résoudre ce problème, j'établirai d'abord une proposition générale, propre à fournir la solution de beaucoup de questions analogues. Ce sera l'objet du § I. Dans les §§ II et III, je résoudrai le problème relatif au contact des coniques, puis le problème relatif au contact des cubiques.

§ I.

2. Soit $U(x, y) = 0$ une équation algébrique. Je suppose que, pour une valeur ξ de la variable x, les racines y se répartissent en divers *systèmes circulaires*. On sait que la propriété caractéristique de ces systèmes circulaires est la suivante : *Soit n le nombre des racines comprises dans l'un d'eux; ces n racines forment, pour les petites valeurs de $(x - \xi)$, une seule et même fonction synec-*

tique de $(x-\xi)^{\frac{1}{n}}$. Par suite, ces n racines sont représentées à la fois par les équations

$$(1)\qquad x-\xi=t^n,\quad y=\mathrm{F}(t),$$

où $\mathrm{F}(t)$ est une fonction synectique pour les petites valeurs de t, c'est-à-dire développable en série convergente suivant les puissances entières et ascendantes de t. Le cas où des racines y seraient infinies ne fait pas exception. La fonction $\mathrm{F}(t)$ se compose alors de la somme de quelques termes, dans lesquels les exposants de t sont négatifs, et d'une série convergente.

Soit maintenant $\Phi(x,y)$ une fonction entière. Si l'on prend pour x une valeur quelconque, et pour y successivement toutes les racines de $\mathrm{U}=0$, on obtient la résultante en x des équations $\Phi=0$, $\mathrm{U}=0$, en égalant à zéro le produit de toutes les expressions de $\Phi(x,y)$. Soit $\mathrm{R}(x)=0$ cette résultante, sous forme entière; on a

$$(2)\qquad \mathrm{R}(x)=\Pi\Phi(x,y).$$

Si, dans cette identité, on fait $x=\xi$, on devra, dans le second membre, mettre successivement pour y tous les développements tels que $\mathrm{F}\left[(x-\xi)^{\frac{1}{n}}\right]$. Par suite, si ξ est une racine de $\mathrm{R}(x)$, voici comment on pourra évaluer l'ordre de multiplicité de cette racine. Substituons dans $\Phi(x,y)$ à x et y les expressions (1); ordonnons le résultat suivant les puissances ascendantes de t. Soit h le degré de t au premier terme. Soient, de même, h', h'',... les nombres analogues obtenus en considérant les autres systèmes circulaires de racines répondant à la valeur ξ de x. L'ordre de multiplicité de la racine ξ de $\mathrm{R}(x)$ est égal à $h+h'+h''+\ldots$.

Pour faciliter le langage, je dirai que le nombre h est *l'ordre de la fonction* $\Phi(x,y)$ *relativement au système circulaire* (1). On voit que *la somme des ordres de la fonction* Φ *relativement à tous les systèmes circulaires de racines* y *de* $\mathrm{U}(x,y)=0$, *qui répondent à toutes les valeurs finies de* x, *est égal à la somme des ordres de multiplicité des racines de* $\mathrm{R}(x)$, *c'est-à-dire au degré de cette résultante.*

Je vais transformer ce dernier énoncé, en considérant dans l'équation (2) une valeur infiniment grande de x. Pour une telle valeur de x, les racines y se répartissent en groupes dont le type est contenu dans les équations

$$(3) \qquad x = t^{-n}, \quad y = \mathrm{F}(t),$$

dans lesquelles n est un entier positif, et F a la même signification que précédemment. Je substitue dans (2) à x et y les expressions (3). Soit $(-k)$ le degré de t au premier terme. Soient $(-k')$, $(-k'')$, ... les nombres analogues obtenus en opérant de même avec les autres expressions analogues à (3). Le degré de $\mathrm{R}(x)$ est $k + k' + k'' + \ldots$. J'applique ici, comme on le voit, un procédé d'élimination bien connu.

On peut considérer les équations (3) comme cas particulier des équations (1). Il suffit pour cela d'admettre que, dans (1), n est un entier positif ou négatif. Alors le nombre $(-k)$ est, d'après la définition ci-dessus, l'ordre de $\Phi(x, y)$ relativement au système circulaire (3). Voici donc l'énoncé que j'obtiens au lieu du précédent :

Théorème I. — *La somme des ordres d'une fonction entière $\Phi(x, y)$, relativement à tous les systèmes circulaires de racines y d'une équation algébrique $\mathrm{U}(x, y) = 0$, correspondant à toutes les valeurs finies ou infinies de x, est nulle.*

L'avantage que présente cette forme d'énoncé consiste en ce que la proposition peut de la sorte être étendue à des fonctions plus générales. Soit, par exemple, une fonction rationnelle, quotient de deux fonctions entières, $\psi(x, y)$, $\theta(x, y)$. L'ordre du quotient relativement à un système circulaire est égal à la différence des ordres de ψ et de θ. Par suite :

Théorème II. — *La somme des ordres d'une fonction rationnelle de x et y, relativement à tous les systèmes circulaires de racines y d'une équation $\mathrm{U}(x, y) = 0$, correspondant à toutes les valeurs finies ou infinies de x, est nulle.*

Sous une forme plus usitée, mais moins appropriée aux applications que j'ai en vue, le théorème II exprime que *le nombre des zéros d'une fonction algébrique quelconque d'une variable est égal au nombre de ses infinis*. Il importe d'observer que *le théorème II s'applique sans modification à une fonction rationnelle de x, y et des dérivées de y*. Car, en vertu de l'équation $\mathrm{U}(x, y) = 0$, ces dérivées s'expriment rationnellement au moyen de x, y. Donc la fonction considérée ne diffère pas au fond d'une fonction rationnelle de x et y seuls.

3. Voici une dernière proposition préparatoire, très-simple, et qui vraisemblablement n'est pas nouvelle.

Soit D *un déterminant composé de la ligne*

$$x^{q_0},\quad x^{q_1},\quad x^{q_2},\quad \ldots,\quad x^{q_n}$$

et de n lignes formées avec les dérivées premières, secondes,..., $n^{\text{ièmes}}$ *des termes de la première ligne. On a*

$$\mathrm{D} = \mathrm{Q}x^{\Sigma q - \frac{n(n+1)}{2}},$$

où l'on a posé

$$\mathrm{Q} = (q_n - q_0)(q_{n-1} - q_0)\ldots(q_1 - q_0)(q_n - q_1)\ldots(q_2 - q_1)\ldots(q_n - q_{n-1}).$$

Je laisse au lecteur le soin de démontrer cette proposition, et j'arrive maintenant au premier de nos problèmes : *Trouver le nombre des points sextactiques d'une courbe algébrique donnée.*

§ II.

4. Soit $\mathrm{U}(x, y) = 0$ l'équation de la courbe. Soit

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^5y}{dx^5}\right) = 0$$

l'équation différentielle des coniques. On a à étudier les points de la courbe U, dont les coordonnées satisfont à cette équation différentielle. Un point sextactique ordinaire sera un point simple, dont les coordonnées annuleront f, et tel que les coordonnées d'un point infiniment voisin, pris sur la courbe à distance infiniment petite du premier ordre, rendent f infiniment petit du premier ordre. Si l'on ajoute au nombre de ces points la somme des ordres de f relativement à tous les systèmes circulaires de racines y, pour lesquels cet ordre n'est pas égal à l'unité, la somme totale est nulle, en vertu du théorème II. On voit donc comment ce théorème conduit à la solution de notre problème.

Je considère d'abord les systèmes circulaires correspondant à une valeur infiniment grande de x. Comme il s'agit de l'étude de points jouissant d'une propriété projective, je puis supposer que la courbe U n'a à l'infini que des points simples ordinaires, qui ne soient pasdes points sextactiques. Chacun des systèmes circulaires à considérer se compose d'une seule racine, et les équations (3) se réduisent à

$$(4)\quad x = t^{-1},\quad y = \mathrm{F}(t) = \mathrm{A}t^{-1} + \mathrm{B} + \mathrm{C}t + \ldots = \mathrm{A}x + \mathrm{B} + \frac{\mathrm{C}}{x} + \ldots.$$

Soit β l'ordre de f relativement à un tel système circulaire. Je calculerai tout à l'heure ce nombre. Soit m le degré de U. Il y a m systèmes circulaires tels que (4). La somme des ordres de f relativement à ces systèmes circulaires est $m\beta$.

Si, en un point de U, la tangente est parallèle à l'axe des y, les dérivées de y sont infinies en ce point. Pour la même raison que tout à l'heure, on peut admettre que tous les points analogues sont des points à distance finie, simples et non sextactiques. Soient ξ, η les coordonnées de l'un d'eux; les deux racines y, qui coïncident avec η pour $x = \xi$, forment le système circulaire

$$(5)\quad \begin{cases} x - \xi = t^2, \\ y - \eta = \mathrm{F}(t) = \mathrm{A}t + \mathrm{B}t^2 + \mathrm{C}t^3 + \ldots \\ \qquad = \mathrm{A}(x-\xi)^{\frac{1}{2}} + \mathrm{B}(x-\xi) + \mathrm{C}(x-\xi)^{\frac{3}{2}} + \ldots. \end{cases}$$

Soit α l'ordre de f relativement à un tel système circulaire. Je calculerai tout à l'heure ce nombre. Soit c la classe de U. Il y a c systèmes circulaires tels que (5). La somme des ordres de f relativement à ces systèmes est $c\alpha$.

Je vais calculer maintenant β et α. A cet effet, je forme d'abord la quantité f.

5. La fonction f est le déterminant composé : 1° de la ligne

$$(\mathrm{A})\qquad 1,\quad x,\quad x^2,\quad y,\quad xy,\quad y^2;$$

2° des cinq lignes obtenues en prenant successivement les dérivées par rapport à x des termes de (A).

Il ne serait pas nécessaire de développer ce déterminant pour résoudre le problème; mais il se présente ici une circonstance analytique, qui nous échapperait tout d'abord si nous ne commencions par faire ce calcul. Je vais donc effectuer le développement. Je remarque d'abord que f se réduit évidemment à

$$f = \begin{vmatrix} y''' & (xy)''' & (y^2)''' \\ y^{\text{IV}} & (xy)^{\text{IV}} & (y^2)^{\text{IV}} \\ y^{\text{V}} & (xy)^{\text{V}} & (y^2)^{\text{V}} \end{vmatrix}.$$

On pourrait développer les dérivées et faire ensuite les réductions. Une remarque permet d'éviter ce calcul. Conformément à une observation que j'ai déjà eu l'occasion de faire ([1]), on sait d'avance que f ne contient ni x, ni y, ni y'. On peut donc supposer que ces trois quantités sont nulles. Posant alors

$$(6) \qquad a_i = \frac{y^{(i)}}{1.2.3\ldots i},$$

j'ai pour y le développement

$$y = a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \ldots,$$

et ensuite

$$xy = a_2 x^3 + a_3 x^4 + a_4 x^5 + \ldots,$$
$$y^2 = a_2^2 x^4 + 2 a_2 a_3 x^5 + \ldots;$$

par suite, à un facteur numérique près, f se réduit à

$$(7) \qquad f = \begin{vmatrix} a_3 & a_2 & 0 \\ a_4 & a_3 & a_2^2 \\ a_5 & a_4 & 2a_2a_3 \end{vmatrix} = a_2 \begin{vmatrix} a_3 & a_2 & 0 \\ a_4 & a_3 & a_2 \\ a_5 & a_4 & 2a_3 \end{vmatrix} = a_2 \varphi.$$

On voit que f se décompose en deux facteurs, a_2 et φ. D'après (6), a_2 est à un facteur numérique près la dérivée seconde y''. En égalant à zéro ce facteur, on a l'équation caractéristique des points d'inflexion. En égalant à zéro le facteur φ, on a l'équation caractéristique des points sextatiques.

Dans tout ce qui suit, j'opérerai sur f et non sur φ; par suite, pour trouver l'ordre de φ relativement à un système circulaire, je chercherai l'ordre de f et celui de a_2, et je retrancherai ce dernier du précédent. La différence sera l'ordre de φ.

6. Je vais calculer β, c'est-à-dire l'ordre de φ relativement au système circulaire (4). On voit donc que β est, au signe près, le

---

([1]) *Bulletin de la Société mathématique*, t. III, p. 31.

degré de la partie principale de φ où l'on substitue à y le développement

$$y = Ax + B + \frac{C}{x} + \ldots.$$

Pour le facteur a_2 ou y'', la partie principale est $\frac{2C}{x^3}$. Elle est, en x, du degré -3; en t, du degré 3. Ainsi l'ordre de a_2, relativement au système circulaire (4), est égal à 3.

Pour calculer l'ordre de f, j'observe que par des combinaisons linéaires on amène les divers termes de la ligne (A) (n° 5) à avoir pour parties principales, à des facteurs constants près,

$$1, \quad x, \quad x^2, \quad x^{-1}, \quad x^{-2}, \quad x^{-3}.$$

Par suite, d'après la proposition du n° 3, la partie principale de f est du degré -18 en x, ou du degré 18 en t. Si j'en retranche le nombre 3, ordre de a_2, j'ai, pour l'ordre β de φ, $\beta = 15$.

7. Pour calculer α, je calcule d'abord l'ordre de y'' relativement au système circulaire (5). La partie principale de y'' est du degré $-\frac{3}{2}$ relativement à $(x - \xi)$, ou du degré -3 relativement à t. L'ordre de y'' est ainsi égal à -3.

Pour calculer l'ordre de f, je ramène par des combinaisons linéaires la ligne (A) à se composer de termes dont les parties principales sont, à des facteurs constants près,

$$1, \quad (x-\xi)^{\frac{1}{2}}, \quad (x-\xi), \quad (x-\xi)^{\frac{3}{2}}, \quad (x-\xi)^2, \quad (x-\xi)^{\frac{5}{2}}.$$

D'après le n° 3, le degré de la partie principale de f est, en $(x - \xi)$, égal à $-\frac{15}{2}$. Relativement à t, son degré est donc -15. Par suite, l'ordre de φ est $-15 + 3$ ou -12. Donc $\alpha = -12$.

Soit S la somme des ordres de φ relativement à tous les systèmes circulaires qu'il nous reste à envisager. Conformément au théorème II, on a

$$S - 12c + 15m = 0. \tag{8}$$

8. Soient

$$x - \xi = t^n, \quad y - \eta = F(t) = A t^{n+r} + B t^{n+r+s} + \ldots$$

les équations d'un système circulaire pris parmi ceux qu'il nous reste à considérer. Pour aucun d'eux la tangente n'est parallèle à l'axe des y; ils répondent d'ailleurs à des valeurs finies de x et de y. Donc les nombres n, r, s, ... sont des entiers non négatifs. Je dis qu'on peut supposer que r ne soit pas nul, et aussi que ξ et η soient nuls. Si, en effet, r est nul, changeons x en $(x+\xi)$ et y en $(y+\eta+\mathrm{A}x)$. Cette substitution réalise notre hypothèse; mais la fonction f, ne contenant ni x, ni y, ni la dérivée première y', n'est pas altérée par cette substitution. Donc, pour calculer l'ordre de la fonction f relativement à un quelconque des systèmes circulaires considérés, on peut supposer ce dernier ramené à la forme

$$(9) \qquad x = t^n, \quad y = \mathrm{A}t^{n+r} + \mathrm{B}t^{n+r+s} + \ldots,$$

où r est positif. En d'autres termes, on peut supposer que l'origine des coordonnées et l'axe des x soient l'origine et la tangente du système circulaire.

Cela étant, je commence par m'occuper de l'ordre de y'' relativement au système circulaire (9). Il est clair que la partie principale de y'' est, en x, du degré $\frac{r-n}{n}$, par suite, en t, du degré $(r-n)$. Nous rappelant que, pour la fonction y'', les nombres analogues à β et à α sont 3 et -3, nous obtenons incidemment, d'après le théorème II, la relation

$$(10) \qquad \Sigma(r-n) - 3c + 3m = 0,$$

où le signe sommatoire s'étend à tous les systèmes circulaires pour lesquels les nombres n et r sont différents. Si l'on remarque que chaque point d'inflexion ordinaire ($n=1$, $r=2$) figure pour une unité dans cette somme, on voit que cette formule donne le nombre des points d'inflexion d'une courbe algébrique quelconque.

9. Je considère maintenant la quantité f. La première ligne de ce déterminant est

$$(\mathrm{A}) \qquad 1, \quad x, \quad x^2, \quad y, \quad xy, \quad y^2.$$

Je cherche son ordre relativement au système circulaire (9). Je suppose, en premier lieu, que r soit différent de n. Comme r est positif, on voit que les parties principales des divers termes de (A) sont toutes de degrés différents, savoir

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad 1+\frac{r}{n},\quad 2+\frac{r}{n},\quad 2+\frac{2r}{n}.$$

Par suite, d'après la proposition du n° 3, la partie principale de f est, en x, du degré

$$1+2+1+\frac{r}{n}+2+\frac{r}{n}+2+\frac{2r}{n}-15=\frac{4r-7n}{n}.$$

Le degré en t ou l'ordre de f relativement au système circulaire est donc $(4r-7n)$.

Si l'on n'avait pas effectué le calcul du n° 5, ce résultat eût averti que y'' est en facteur dans f. En effet, si l'on suppose $n=1$, $r=2$, on voit que l'ordre de f est l'unité; donc f s'évanouit en chaque point d'inflexion.

L'ordre de y'', relativement au système circulaire considéré, étant $(r-n)$, celui de φ est $4r-7n-(r-n)=3r-6n$.

Considérant successivement tous les systèmes circulaires pour lesquels les nombres n et r sont différents, c'est-à-dire toutes les branches de la courbe qui ont avec leurs tangentes des contacts dont l'ordre diffère de l'unité, je pose

$$(11)\qquad G=\Sigma(3r-6n),\quad r \gtrless n.$$

Le nombre G est un élément de la somme désignée précédemment par S (n° 7).

10. J'examine maintenant ce qui est relatif à un système circulaire pour lequel les nombres n et r sont égaux, c'est-à-dire défini par

$$(12)\qquad x=t^n,\quad y=At^{2n}+Bt^{2n+s}+\ldots.$$

Les branches qui composent ce système circulaire ont, avec leur tangente à l'origine, des contacts du premier ordre. Si le nombre n est l'unité, le système circulaire se réduit à une seule branche.

Je considère encore la ligne (A) du déterminant f (n° 9). Les parties principales des divers termes de cette ligne, sauf le terme y, sont respectivement des degrés 0, 1, 2, 3, 4. Quant au terme y, sa partie principale est du second degré, et disparaît dans le déterminant. Pour la faire disparaître immédiatement, je fais une combinaison linéaire des termes de (A), de telle sorte que la partie principale de cette combinaison soit d'un degré différent des nombres o, 1, 2, 3, 4. Soit C cette combinaison

$$(13) \qquad C = ax^2 + by + cxy + dy^2,$$

et $\frac{\lambda}{n}$ le degré de la partie principale de C. On voit alors (n° 3) que le degré de la partie principale de f est, en x, $\frac{\lambda - 5n}{n}$; par suite, l'ordre de f, relativement au système circulaire (12), est $(\lambda - 5n)$. C'est aussi l'ordre de φ, car celui du facteur y'' est zéro.

Je considère successivement tous les systèmes circulaires pour lesquels le nombre $(\lambda - 5n)$ n'est pas nul, et je pose

$$(14) \qquad L = \Sigma(\lambda - 5n).$$

L'équation (8) devient

$$(15) \qquad G + L = 12c - 15m.$$

Cette dernière relation contient la solution du problème. Pour s'en convaincre, il suffit d'examiner la signification du nombre $(\lambda - 5n)$ quand on suppose $n = 1$. Dans cette hypothèse, le système circulaire (12) se réduit à une branche unique. D'autre part, la quantité C étant infiniment petite de l'ordre λ quand x est infiniment petit du premier ordre, la conique $C = 0$ a, avec la branche de courbe, à l'origine, un contact d'ordre $(\lambda - 1)$.

Il est manifeste qu'en général λ est égal à 5, et le nombre $(\lambda - 5n)$ est alors égal à zéro; mais, si λ est égal à 6, le nombre $(\lambda - 5n)$ est égal à l'unité. Donc chaque point sextactique figure pour une unité dans L. Si λ est égal à $(5 + h)$ $(h = 1, 2, \ldots)$, c'est qu'alors la courbe a, en un point, avec une conique un contact d'ordre $(4 + h)$. Ce point figure, dans L, pour h unités, et compte pour h points sextactiques. Il suffit donc de calculer directement les éléments $(\lambda - 5n)$ relatifs aux valeurs de n différentes de l'unité, pour conclure de l'équation (15) le nombre des points sextactiques, les nombres m, c, G étant supposés connus.

Les éléments $(\lambda - 5n)$ que l'on doit calculer directement sont relatifs uniquement à des points singuliers, et, dans beaucoup de cas, ils sont nuls. Il me reste à dire comment on peut les obtenir. Je suppose que l'on ait reconnu l'existence, sur la courbe considérée, d'un système circulaire de n branches ($n > 1$), ayant avec la tangente des contacts du premier ordre. Soient alors (12) les équations qui représentent ce système circulaire, ou plutôt soit

$$y = Ax^2 + Bx^{2+\frac{s}{n}} + \dots \tag{16}$$

le développement commun qui représente ces n branches. On sait que, dans le développement prolongé suffisamment, on rencontrera nécessairement un exposant fractionnaire. Si le premier exposant fractionnaire est inférieur à 5, il est manifeste que le nombre $\frac{\lambda}{n}$ est égal à cet exposant. Le nombre λ est ainsi trouvé pour ce cas, et l'on voit que $(\lambda - 5n)$ est alors un nombre négatif. Si, au contraire, le premier exposant fractionnaire est supérieur à 5, alors $\frac{\lambda}{n}$ peut être égal ou supérieur à 5, et, en aucun cas, ne peut dépasser cet exposant. Pour reconnaître la valeur de λ, on devra calculer directement les coefficients de C, de manière que les termes du deuxième au quatrième ordre disparaissent. Le nombre $\frac{\lambda}{n}$ est alors égal à l'ordre minimum des termes qui subsistent. On voit que, dans ce cas, le nombre $(\lambda - 5n)$ est nul ou positif.

Les points appelés communément *points de rebroussement de deuxième espèce* nous offrent l'exemple de ces divers cas. On obtient cette singularité en supposant que n soit égal à 2. Soit $\frac{2k+1}{2}$ le premier exposant fractionnaire. Il sera inférieur ou supérieur à 5 suivant que k sera inférieur ou non à 5. Ainsi les rebroussements

$$y = Ax^2 + Bx^{\frac{5}{2}} + \dots,$$

$$y = Ax^2 + Bx^3 + Cx^{\frac{7}{2}} + \dots,$$

$$y = Ax^2 + Bx^3 + Cx^4 + Dx^{\frac{9}{2}} + \dots$$

fournissent au nombre L les éléments -5, -3, -1.

Au contraire, le rebroussement

$$y = Ax^2 + Bx^3 + Cx^4 + Dx^5 + Ex^{\frac{11}{2}} + \dots$$

donne généralement $\lambda - 5n = 0$. Mais on peut avoir aussi $\frac{\lambda}{n} = \frac{11}{2}$. Si, par exemple, les coefficients B, C, D sont nuls à la fois, chacune des deux branches du rebroussement a un contact d'ordre $\frac{9}{2}$ avec la parabole $y = Ax^2$; et l'on a $\lambda - 5n = 1$.

11. Pour fixer complétement les idées à ce sujet, je considère la courbe représentée par ce dernier développement, ou plutôt la courbe représentée par l'équation en coordonnées triangulaires

$$U = z(yz^4 - Ax^2z^3 - Dx^5)^2 - x^{11} = 0.$$

Cette courbe possède deux points singuliers :

1° Le point $Y(z = 0, x = 0)$. En ce point la courbe U se compose d'un système circulaire dont l'ordre de multiplicité est 9. Le développement commun aux neuf branches constituant ce système circulaire est

$$\frac{z}{y} = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{11}{9}} + \ldots.$$

La tangente est la droite $z = 0$. D'après des principes connus, l'abaissement que ce point produit dans la classe est égal à 8×11.

2° Le point $Z(x = 0, y = 0)$. Ce point est un rebroussement :

$$\frac{y}{z} = A\left(\frac{x}{z}\right)^2 + D\left(\frac{x}{z}\right)^5 + \left(\frac{x}{z}\right)^{\frac{11}{2}}$$

L'abaissement produit dans la classe par ce point est égal à 11; par suite, le degré m étant égal à 11, la classe c est égale à $10 \times 11 - 8 \times 11 - 11$, c'est-à-dire $c = m = 11$.

De plus, le point Y est l'origine du seul système circulaire pour lequel les nombres r et n soient différents, et l'on a

$$n = 9, \quad r = 11 - 9 = 2.$$

Donc, en premier lieu, la formule (10) montre que la courbe U possède sept points d'inflexion. Ce résultat est facile à vérifier directement.

Le nombre G est ici égal à -3×16, le nombre $(12c - 15m)$ à -3×11. On a donc, d'après (15),

$$L = 15.$$

Par suite, d'après les remarques du numéro précédent, la courbe U a quinze points sextactiques; mais, si D est nul, elle n'en a plus que quatorze.

12. Les résultats généraux contenus dans la formule (15) peuvent être énoncés de diverses manières. La forme la plus simple s'obtient comme il suit. Dans (15), je remets pour G son expression, et j'ai

$$L + 3\Sigma(r - 2n) = 12c - 15m.$$

Combinant cette relation avec (10) de manière à éliminer r, et désignant Σn par la lettre N, j'obtiens

$$L = 3(c - 2m + N); \tag{17}$$

d'où l'énoncé suivant :

Théorème III. — *Soient m, c le degré et la classe d'une courbe* U, N *le nombre total des branches de cette courbe ayant avec leurs tangentes des contacts d'ordre différent de l'unité; soit enfin* $(4 + l)$ *l'ordre du contact d'une branche de* U *avec sa conique osculatrice, en un point où cet ordre diffère de* 4, *et où le contact avec la tangente est du premier ordre. On a*

$$\Sigma l = 3(c - 2m + N).$$

13. *Exemples.* — Pour une courbe qui n'a aucune singularité au point de vue des coordonnées ponctuelles, on trouve ainsi $m(12m - 27)$ pour le nombre des points sextactiques. On conclut de là que *les points sextactiques d'une courbe de degré m et de classe c sont sur une courbe de degré* $(12m - 27)$, *et que les tangentes de la courbe en ces points touchent une courbe de classe* $(12c - 27)$ [1].

Pour une courbe n'ayant que des singularités ordinaires, N est le nombre des points d'inflexion augmenté du double du nombre des points de rebroussement ordinaires. Soit r le nombre de ces derniers, on en conclut pour le nombre des points sextactiques l'expression $12c - 15m + 9r$; ou encore l'expression corrélative $12m - 15c + 9i$, i étant le nombre des inflexions.

---

[1] *Voir* Cayley, *Phil. Transact.*; 1865. — Painvin, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXVIII.

En dernier lieu, pour la courbe dont l'équation homogène est

$$x^p y^q = A z^{p+q},$$

p et q étant des entiers positifs premiers entre eux, on a

$$m = c = p + q = N;$$

par suite, le nombre des points sextactiques est zéro, résultat qu'il était aisé de prévoir.

§ III.

14. En un point quelconque d'une courbe U, on peut généralement mener une cubique ayant, en ce point, avec U un contact du huitième ordre. *Trouver le nombre des points en lesquels l'ordre le plus élevé possible du contact entre* U *et une cubique surpasse* 8; tel est le problème dont je vais maintenant m'occuper.

Je suivrai ici exactement la même marche que pour le problème précédent. L'équation différentielle à considérer $F = 0$ est celle des cubiques dans le plan. Elle est du neuvième ordre. Son premier membre F est un déterminant composé en premier lieu de la ligne (B)

$$\text{(B)} \qquad 1,\ x, x^2, x^3,\ y,\ xy,\ x^2y,\ y^2,\ x^2y,\ y^3,$$

et, en second lieu, des neuf lignes obtenues en prenant les dérivées successives des termes de (B) jusqu'au neuvième ordre inclusivement.

Je considère, comme aux nos 4, 5, 6, les systèmes circulaires de branches infinies et de branches dont les tangentes sont parallèles à l'axe des y. Je désigne par S la somme des ordres de F relativement aux autres systèmes circulaires. Par un calcul entièrement analogue à celui des numéros précités, j'obtiens l'équation suivante, analogue à (8) :

$$\text{(18)} \qquad S - 45c + 60m = 0.$$

Je vais maintenant m'occuper de calculer S. A cet effet, je considérerai, pour les mêmes raisons qu'au n° 8, des systèmes circulaires réduits à la forme

$$\text{(19)} \qquad x = t^n, \quad y = A t^{n+r} + B t^{n+r+s} + \ldots,$$

où r, s, ... sont, comme n, des entiers positifs qui ne peuvent être nuls. Le problème actuel étant plus compliqué que le précédent, on ne devra pas s'étonner de voir se multiplier les cas qu'il va être nécessaire de distinguer.

Je suppose d'abord r différent de n, c'est-à-dire le système circulaire (19) composé de branches ayant avec la tangente des contacts d'ordre différent de l'unité. Dans la question précédente, cette supposition donnait lieu à un résultat simple, qui n'exigeait pas la distinction de plusieurs cas. Cette simplicité provient de ce qu'alors les coniques osculatrices se réduisent à la tangente du système circulaire. Dans la question actuelle, les cubiques osculatrices se réduisent aussi à la tangente si l'ordre $\frac{r}{n}$ du contact de chaque branche avec cette tangente ne peut être reproduit par une branche de cubique; mais, dans le cas contraire, il existe effectivement une ou plusieurs cubiques osculatrices. C'est ce qui a lieu si le contact exceptionnel $\frac{r}{n}$ est d'ordre 2 ou d'ordre $\frac{1}{2}$. On peut ainsi prévoir d'avance la nécessité de distinguer ici trois cas :

1° $\frac{r}{n}$ différent de 1, de 2 et de $\frac{1}{2}$;

2° $\frac{r}{n} = 2$;

3° $\frac{r}{n} = \frac{1}{2}$.

J'aurai ensuite à examiner ce qui est relatif au cas où les nombres r et n sont égaux, cas dans lequel sont comprises les branches simples ordinaires.

15. Les parties principales des termes de la ligne (B), en vertu des relations (19), sont, par rapport à x, des degrés

$$(\mathrm{B}')\quad 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 1+\frac{r}{n},\ 2+\frac{r}{n},\ 3+\frac{r}{n},\ 2+2\frac{r}{n},\ 3+2\frac{r}{n},\ 3+3\frac{r}{n}.$$

On reconnaîtra que tous ces nombres sont différents entre eux si $\frac{r}{n}$ est différent des trois nombres 1, 2 et $\frac{1}{2}$. D'après la proposition du n° 3, il en résulte qu'alors le degré en x de la partie principale du déterminant F est égal à $\left(10\frac{r}{n}-25\right)$: par suite, l'ordre de F relativement au système circulaire est égal à $(10r-25n)$. Je pose

$$H=\Sigma(10r-25n),$$

la sommation s'appliquant à tous les systèmes circulaires pour lesquels $\frac{r}{n}$ diffère des nombres 1, 2, $\frac{1}{2}$. Le nombre H est un premier élément de la somme S.

16. Je suppose maintenant $\frac{r}{n}=2$. Les nombres qui composent la ligne (B′) sont les suivants :

$$(B'') \qquad 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9.$$

Le nombre 3 est répété deux fois. On doit donc, dans le déterminant F, remplacer le terme correspondant à l'un de ces nombres, le second par exemple, par une combinaison linéaire de ce terme avec les autres, de telle sorte que le degré de la partie principale de cette combinaison soit différent de tous les autres nombres de la ligne (B″). Soit $\frac{\mu}{n}$ ce degré. On trouve alors, pour l'ordre de F relativement au système circulaire, le nombre $(\mu-8n)$. Ce résultat exige quelques observations.

En premier lieu, supposons $n=1$. Le système circulaire envisagé se réduit alors à une branche simple ayant une inflexion simple à l'origine. On trouvera généralement alors pour μ le nombre 8 ; d'où résulte que $(\mu-8n)$ est nul. Ainsi, pour un point d'inflexion, la quantité F ne s'évanouit pas. C'est, on se le rappelle, le contraire qui se produit à l'égard du déterminant f, considéré dans le problème précédent (n° 9). Soit

$$C=ax^3+by+cxy+dx^2y+ey^2+fxy^2+gy^3$$

la combinaison des termes de la ligne (B) que l'on a dû faire pour obtenir l'ordre 8 à la partie principale. J'observe que le coefficient du dernier terme, g, est entièrement arbitraire, nul si l'on veut, puisque y^3 est du neuvième ordre. On a donc une infinité de cubiques, représentées par l'équation $C=0$, et formant un faisceau, dont les contacts au point considéré avec la courbe sont du septième ordre; et il est évident qu'il n'existe aucune cubique ayant en ce point avec la courbe un contact du huitième ordre.

En déterminant les coefficients $a, b, \ldots, f$ de C, de manière à faire disparaître les termes d'ordre 3, 4,..., 7, il peut arriver, dans des cas particuliers, que les termes du huitième ordre disparaissent aussi. Alors toutes les cubiques du précédent faisceau ont avec la courbe des contacts du huitième ordre; mais on peut déterminer g de manière à faire disparaître aussi les termes du neuvième ordre. Il existe donc une cubique ayant avec la courbe un contact d'ordre égal ou supérieur à 9. En outre, la combinaison C qu'il faut substituer à y dans la ligne (B) répond à cette dernière cubique, sans quoi le nombre 9 serait répété deux fois dans la ligne (B″) transformée; donc, dans ce cas, le nombre $(\mu - 8n)$ est au moins égal à 2. Ainsi :

THÉORÈME IV. — *En un point d'inflexion simple d'une courbe* U, *l'ordre le plus élevé du contact que l'on puisse établir entre cette courbe et une cubique est, en général, égal à* 7. *Si cet ordre dépasse le nombre* 7, *il est au moins égal à* 9.

Soit $7 + \omega$ *l'ordre de ce contact* $(n = 1, \mu = 8 + \omega)$, *l'ordre de* F, *relatif à ce point de la courbe* U, *est égal à* ω.

Cette dernière conclusion subsiste dans le cas où n diffère de l'unité, avec cette modification que l'ordre de F relativement au système circulaire est égal à $n\omega$. Quant au nombre ω, il peut être négatif ou positif suivant les cas. Si le premier exposant fractionnaire du développement de y suivant les puissances ascendantes de x est inférieur à 8, soit $\frac{\lambda}{n}$ cet exposant : on a $\omega = \frac{\lambda}{n} - 8$, et ω est négatif. Si le premier exposant fractionnaire est supérieur à 8, ω peut être nul ou positif, mais toujours au plus égal à cet exposant diminué de 8. En résumé, *soit* $(7 + \omega)$ *l'ordre de contact de la cubique osculatrice avec une branche de la courbe* U *en un point où l'ordre du contact de cette branche avec sa tangente est égal à* 2, *toutes les branches analogues figurent dans* S *par l'élément* $\Sigma\omega$.

17. J'examine maintenant le troisième cas, savoir $\frac{r'}{n} = \frac{1}{2}$. Les

nombres qui composent la ligne (B′) sont ici les suivants :

$$(B''')\qquad 0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad \frac{3}{2},\quad \frac{5}{2},\quad \frac{7}{2},\quad 3,\quad 4,\quad \frac{9}{2}.$$

Le nombre 3 se trouve répété deux fois. Il correspond, à la dernière place, au terme y^2 de la ligne (B). On remplacera donc le terme y^2 par une combinaison C′

$$C' = ax^3 + bx^2y + cy^2 + dxy^2 + ey^3,$$

dont les coefficients seront choisis de manière que le degré de la partie principale de C′ diffère des nombres $3, \frac{7}{2}, 4, \frac{9}{2}$. Soit $\frac{\nu}{2r'}$ le degré de la partie principale de C′. Alors, d'après la proposition du n° 3, on trouvera aisément que l'ordre de F relativement au système circulaire considéré est $(\nu - 46r')$. Pour calculer le nombre ν, on peut directement former C′ ou bien encore raisonner comme il suit :

L'équation $C' = 0$ est celle d'une cubique, ayant un rebroussement au point considéré, et dont les branches ont, en ce point, le contact de l'ordre le plus élevé possible avec les branches du système circulaire envisagé. Les deux branches de C′ sont représentées à la fois par le développement ambigu suivant, que l'on peut déduire de $C' = 0$:

$$(20)\qquad y = \alpha x^{\frac{3}{2}} + \beta x^2 + \gamma x^{\frac{5}{2}} + \delta x^3 + \varepsilon x^{\frac{7}{2}} + \ldots.$$

Les coefficients de ce développement dépendent de quatre arbitraires, à savoir les rapports des coefficients de C′. D'autre part, le développement de y suivant les puissances ascendantes de x, pour la courbe U, commence par un terme d'ordre $\frac{3}{2}$. S'il est de la forme

$$(21)\qquad y = \alpha_1 x^{\frac{3}{2}} + \beta_1 x^2 + \gamma_1 x^{\frac{5}{2}} + \delta_1 x^3 + \varepsilon_1 x^{\frac{7}{2}} + \ldots,$$

on pourra prendre

$$\alpha = \alpha_1,\quad \beta = \beta_1,\quad \gamma = \gamma_1,\quad \delta = \delta_1;$$

alors ε et les coefficients suivants de (20) seront déterminés. D'après des principes connus, si ε diffère de ε_1, on verra aisément que la cubique C′ a alors $10r'$ points d'intersection avec U confondus à l'origine. Par suite le nombre ν est égal à $5r'$. C'est aussi ce qu'on trouverait en considérant directement C'. On voit d'ailleurs que, dans des cas particuliers, le nombre ν peut dépasser 5. Il peut aussi être inférieur à 5. C'est ce qui arrive si, dans le développement (21), il existe un terme dans lequel l'exposant de $x^{\frac{1}{2}}$ soit fractionnaire et inférieur à 7. Alors $\frac{\nu}{2r'}$ est égal au premier de ces exposants fractionnaires.

Considérant tous les systèmes circulaires de branches de la courbe U ayant de même avec leurs tangentes des contacts d'ordre $\frac{1}{2}$, je pose

$$J = \Sigma(\nu - 46r').$$

Le nombre J est l'élément par lequel l'ensemble de ces systèmes circulaires figure dans la somme S.

18. J'ai maintenant à examiner ce qui est relatif aux systèmes circulaires où les nombres r et n sont égaux, c'est-à-dire à ceux dont les branches ont avec leurs tangentes à l'origine des contacts du premier ordre. On doit s'attendre à trouver ici une complication plus grande que précédemment, puisqu'il s'agit maintenant de branches de courbe dont les singularités portent sur des éléments d'ordre plus élevé.

Dans le cas actuel ($r = n$), les nombres de la ligne (B') sont les suivants :

$$(\mathrm{B^{IV}}) \qquad 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 2,\ 3,\ 4,\ 4,\ 5,\ 6,$$

correspondant à

$$(\mathrm{B}) \qquad 1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ y,\ xy,\ x^2y,\ y^2,\ xy^2,\ y^3.$$

Les nombres 2, 3, 4 sont répétés. Je remplacerai par suite :

1° Le terme x^2y par la combinaison

$$D = ax^2y + by^2 + cxy^2 + dy^3;$$

2° Le terme xy par la combinaison

$$(22) \qquad E = a'x^3 + b'xy + c'x^2y + d'y^2 + e'xy^2 + f'y^3;$$

3° Le terme y par la combinaison

$$(23)\ G = a''x^2 + b''x^3 + c''y + d''xy + e''x^2y + f''y^2 + g''xy^2 + h''y^3.$$

On remarquera que D se décompose en deux facteurs yK, savoir

$$(24)\qquad K = ax^2 + by + cxy + dy^2.$$

L'équation $K = 0$ représente une conique touchant la courbe U à l'origine. L'équation $E = 0$ représente une cubique ayant un point double à l'origine, et dont une des branches touche U en ce point. Enfin l'équation $G = 0$ représente une cubique ordinaire touchant la courbe U au même point.

Les degrés des parties principales des termes de (B), qui restent inaltérés, sont les nombres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Le facteur y de D étant du second ordre, et D devant être d'un ordre différent des nombres 4, 5, 6, il en résulte que l'ordre de K doit différer des nombres 2, 3, 4; par suite $K = 0$, ou, abréviativement, K est la conique osculatrice des branches du système circulaire considéré, ou bien l'une quelconque des coniques osculatrices s'il en existe une infinité. La considération de la conique K permet de classer les résultats cherchés suivant trois cas, savoir :

Premier cas. — L'ordre du contact de chaque branche du système circulaire avec la conique osculatrice est fractionnaire et quelconque, ou bien encore entier et supérieur au nombre 5.

Deuxième cas. — L'ordre de ce même contact est égal à 5.

Troisième cas. — L'ordre de ce même contact est égal à 4.

Tous les cas sont embrassés par là; car l'ordre de ce contact, s'il est entier, ne peut être inférieur à 4. Je vais examiner successivement ces trois cas.

19. *Premier cas.* — Soit $\left(\frac{\lambda}{n} - 1\right)$ l'ordre du contact de K avec une branche du système circulaire considéré. D'après les hypothèses qui caractérisent le premier cas, $\frac{\lambda}{n}$ est fractionnaire; ou, s'il est entier, il est supérieur à 6.

L'ordre de K est $\frac{\lambda}{n}$; celui de D est $2 + \frac{\lambda}{n}$.

Prenons pour E la combinaison xK; son ordre sera $1 + \frac{\lambda}{n}$. Prenons enfin pour G la combinaison K elle-même; son ordre est $\frac{\lambda}{n}$. Les trois nombres $\frac{\lambda}{n}$, $1 + \frac{\lambda}{n}$, $2 + \frac{\lambda}{n}$ sont différents entre eux et différents des autres nombres de la ligne (B^{iv}). En effet, ils sont fractionnaires; ou, s'ils sont entiers, le plus petit d'entre eux est supérieur à 6; donc, dans le cas actuel, les parties principales des termes de la ligne (B) ont les degrés suivants, après les combinaisons:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \frac{\lambda}{n},\ 1+\frac{\lambda}{n},\ 2+\frac{\lambda}{n}.$$

Il en résulte que l'ordre de F relativement au système circulaire considéré est égal à $(3\lambda - 21n)$. Pour avoir une expression plus simple, je désigne par $(6+a)$ l'ordre du contact d'une quelconque des branches du système circulaire avec K. Alors $(3\lambda - 21n)$ est égal à $3na$; et l'on peut dire simplement que l'élément du nombre S, relatif à toutes les branches analogues, est $3\Sigma a$.

20. *Deuxième cas.* — L'ordre du contact de K avec chaque branche du système circulaire étant égal à 5, la partie principale de K est du degré 6 en x; donc celle de D est du degré 8. En prenant pour E la combinaison xK, on aura, à la partie principale, le degré 7. Il reste à examiner le degré de la partie principale de G, pour qui l'on ne peut prendre la combinaison K. Si, dans le développement de y suivant les puissances ascendantes de x, il existe des exposants fractionnaires, c'est-à-dire si n n'est pas égal à l'unité, le premier exposant fractionnaire est supérieur à 6, sans quoi K ne pourrait être de l'ordre 6. Si ce premier exposant fractionnaire est inférieur à 9, il est manifeste que le degré de la partie principale de G lui sera égal. Soit alors $\frac{\mu}{n}$ ce degré; on trouve pour l'ordre de F relativement à ce système circulaire le nombre $(\mu - 9n)$.

Si le premier exposant fractionnaire est supérieur à 9, l'ordre $\frac{\mu}{n}$ de G peut être égal à 9 ou surpasser ce nombre, sans pouvoir surpasser le premier exposant fractionnaire. Dans ce cas, comme aussi dans celui où n est égal à l'unité, l'expression $(\mu - 9n)$ fournit l'ordre de F. Je simplifie cette expression en désignant par $(8+b)$ l'ordre du contact de chaque branche avec la cubique osculatrice. Il en résulte que l'ensemble de toutes les branches analogues fournit au nombre S l'élément Σb. Il ne faut pas perdre de vue que b, s'il est fractionnaire, peut être négatif, mais non inférieur à -1; il est nul ou positif s'il est entier, comme on le voit d'après les conditions imposées à $\frac{\mu}{n}$.

Par exemple, pour un point sextactique ordinaire, le nombre b est généralement égal à zéro; mais il peut arriver qu'en un point sextactique le contact d'une courbe avec une cubique puisse s'élever au-dessus du huitième ordre. Alors le nombre b est l'excès de l'ordre de ce contact sur le nombre 8.

21. *Troisième cas*. — L'ordre du contact de K avec chaque branche du système circulaire étant égal à 4, la partie principale de K est, en x, du degré 5, et celle de D du degré 7. On ne peut plus prendre pour E la combinaison xK, dont l'ordre serait égal à 6. Je considère donc la combinaison E en elle-même. On peut manifestement y faire disparaître les termes de degrés entiers jusqu'au septième degré inclusivement; donc le degré de la partie principale de E est au moins égal à 8, s'il est entier. S'il est fractionnaire, il est égal à l'unité augmentée du premier exposant fractionnaire figurant dans le développement de y. Comme la partie principale de K est du cinquième degré, ce premier exposant fractionnaire surpasse nécessairement le nombre 5. L'équation $E = 0$ représente, ainsi que je l'ai déjà observé, une cubique ayant à l'origine un point double, et une branche tangente à la courbe U. L'ordre du contact de la branche de cubique avec la branche de courbe U est inférieur de deux unités au degré en x de la partie principale de la quantité E. Il sera nécessaire de subdiviser le cas actuel en plusieurs autres suivant l'ordre du contact de la branche de courbe avec la cubique E, osculatrice au point considéré. Désignons par i l'ordre de ce contact.

1° *i fractionnaire et inférieur à 7*. — Dans le développement de y suivant les puissances ascendantes de x, le premier exposant fractionnaire est alors $(i+1)$. Le terme affecté de cet exposant ne peut disparaître dans G, et, comme $(i+1)$ est inférieur à 8, ce nombre est précisément le degré en x de la partie principale de G. Il en résulte pour l'ordre de F la valeur $2n(i-7)$, qui est négative. Je pose, pour ce cas, $i = 7 - g$. L'ensemble des systèmes circulaires analogues figure donc dans la somme S par l'élément $-2\Sigma g$.

2° *i entier et inférieur à 7.* — J'ai fait observer que l'ordre de E, s'il est entier, est au moins égal à 8. D'ailleurs, cet ordre est $(i + 2)$; donc, si i est entier et inférieur à 7, il ne peut être que 6. Dans le développement de y suivant les puissances ascendantes de x, le premier exposant fractionnaire est nécessairement supérieur à 7. S'il est en même temps inférieur à 9, l'ordre de G lui est nécessairement égal. Dans le cas opposé, l'ordre de G est égal ou supérieur au nombre 9. On en tire aisément la conclusion suivante : je désigne par $(8 + d)$ l'ordre du contact de la branche de courbe considérée avec sa cubique osculatrice G. L'ensemble des branches analogues fournit au nombre S l'élément Σd. On ne doit pas perdre de vue que d peut être négatif; il est alors fractionnaire et supérieur à -2.

3° *i égal à 7.* — Dans ce cas, l'ordre de E est égal à 9. Par suite, le premier exposant fractionnaire, dans le développement de y, est supérieur à 8. Il en résulte, pour G, l'ordre 8, en général; de plus, il est impossible que, dans G, le terme du huitième ordre disparaisse de lui-même; car alors les deux cubiques E, G auraient plus de neuf points d'intersection réunis à l'origine, ce qui ne se peut. Donc, dans ce cas, les degrés des parties principales de K, E, G sont 7, 9, 8. Il en résulte pour F l'ordre zéro; donc les branches considérées n'interviennent pas dans la somme S.

4° *i supérieur à 7.* — Pour la même raison, l'ordre de la partie principale de G est égal à 8. Si je pose $i = 7 + e$, j'ai, pour l'élément fourni à la somme S par les branches analogues, l'élément Σe. On voit que le cas précédent est compris dans ce dernier, où l'on doit faire alors $e = 0$.

22. Les résultats des numéros précédents, depuis le n° 15, donnent en résumé la formule

$$(25)\quad H + J + \Sigma\omega + 3\Sigma a + \Sigma b + \Sigma d + \Sigma e - 2\Sigma g = 45c - 60m.$$

Dans cette formule, chaque point simple en lequel l'ordre du contact de la courbe U avec la cubique osculatrice est égal à 9 figure pour une unité dans Σd. Dans le cas exceptionnel où ce point est en même temps sextactique, il ne figure pas dans Σd, mais, pour une unité également, dans Σb.

Je modifierai quelque peu la formule (25) comme il suit. Désignant provisoirement par T la somme

$$T = \Sigma\omega + 3\Sigma a + \Sigma b + \Sigma d + \Sigma e - 2\Sigma g,$$

je l'écris

$$\text{(26)} \qquad H + J + T = 45c - 60m.$$

On a (n^{os} 15 et 17)

$$\text{(27)} \qquad \left\{ \begin{aligned} H &= \Sigma(10r - 25n), \\ J &= \Sigma(\nu - 46r'). \end{aligned} \right.$$

Je reprends la formule (10). Dans $\Sigma(r - n)$, je dois mettre à part ce qui est relatif aux systèmes circulaires qui figurent dans J, et aussi ce qui est relatif à ceux qui figurent dans $\Sigma\omega$.

Pour ceux qui figurent dans J, on a (n° 17) $n' = 2r'$; donc la partie correspondante dans $\Sigma(r - n)$ est $-\Sigma r'$.

Pour ceux qui figurent dans $\Sigma\omega$, on a (n° 15) $r'' = 2n''$. La partie correspondante dans $\Sigma(r - n)$ est donc $\Sigma n''$. La formule (10) s'écrira donc

$$\Sigma(r - n) - \Sigma r' + \Sigma n'' = 3c - 3m.$$

Multipliant les deux membres de cette dernière par (10) et retranchant de (26), j'obtiens, en vertu de (27),

$$T - 15\Sigma n + \Sigma(\nu - 36r') = 15(c - 2m) + 10\Sigma n'',$$

ou

$$T + \Sigma(\nu - 36r') = 15(c - 2m + \Sigma n + \Sigma n'') - 5\Sigma n''.$$

La somme $\Sigma n + \Sigma n'' + 2\Sigma r'$ est ce que j'ai appelé plus haut (n° 12) le nombre N. C'est le nombre total des branches de la courbe qui ont avec leurs tangentes des contacts dont les ordres diffèrent de l'unité. J'écris donc la dernière formule comme il suit, en introduisant le nombre N,

$$T + \Sigma(\nu - 6r') = 15(c - 2m + N) - 5\Sigma n''.$$

Enfin, pour dernière transformation, je vais introduire, au lieu du nombre ν, les ordres des contacts des branches correspondantes avec les cubiques osculatrices, douées, dans ce cas, d'un rebroussement. Dans le cas d'un rebroussement ordinaire, l'ordre de ce contact est en général $\frac{5}{2}$, comme on l'a vu (n° 17). Je le désigne d'une manière générale par $\frac{5}{2} + \theta$. On a alors

$$\frac{\nu}{r'} = 10 + 2\theta;$$

et l'expression $\Sigma(\nu - 6r')$ devient $\Sigma 2r'\theta + \Sigma 4r'$. J'écris le même nombre plus simplement $\Sigma\theta + 2\Sigma n'$. Posant enfin

$$\Sigma n' = \mathrm{N}', \quad \Sigma n'' = \mathrm{N}'',$$

j'ai la formule suivante

$$\mathrm{T} + \Sigma\theta = 15(c - 2m + \mathrm{N}) - 2\mathrm{N}' - 5\mathrm{N}'',$$

que j'énonce comme il suit :

Théorème V. — *Soient m, c le degré et la classe d'une courbe* U, *et* N *le nombre total des branches de cette courbe ayant avec leurs tangentes des contacts d'ordre différent de l'unité; distinguons, en outre, sur la courbe* U, *les particularités suivantes, savoir :*

1° *Les branches ayant avec leurs tangentes des contacts d'ordre $\frac{1}{2}$ (elles figurent déjà dans* N). *Soit* N′ *leur nombre; soit aussi, pour l'une d'elles, $\left(\frac{5}{2} + \theta\right)$ l'ordre le plus élevé du contact que l'on puisse établir entre cette branche et une branche de cubique* (à rebroussement).

2° *Les branches ayant avec leurs tangentes des contacts d'ordre* 2 *(elles figurent également dans* N). *Soit* N″ *leur nombre; soit aussi, pour l'une d'elles, $(7 + \omega)$ l'ordre le plus élevé du contact que l'on puisse établir entre cette branche et une cubique* (à inflexion).

3° *Les branches ayant avec leurs tangentes des contacts du premier ordre, et avec leurs coniques osculatrices des contacts dont les ordres soient ou fractionnaires et d'ailleurs quelconques, ou entiers et supérieurs à* 5. *Soit, pour l'une d'elles, $(6 + a)$ l'ordre de ce contact.*

4° *Les branches ayant avec leurs coniques osculatrices des contacts du cinquième ordre. Soit, pour l'une d'elles, $(8 + b)$ l'ordre de son contact avec la cubique osculatrice.*

5° *Les branches ayant avec leurs coniques osculatrices des contacts du quatrième ordre, une quelconque d'entre elles ayant, en outre, au même point, un contact du sixième ordre avec une branche d'une cubique dont ce point est un point double. Soit, pour l'une d'elles,* $(8 + d)$ *l'ordre de son contact avec la cubique osculatrice.*

6° *Les branches ayant avec leurs coniques osculatrices des contacts du quatrième ordre, une quelconque d'entre elles ayant, en outre, au même point, un contact d'ordre fractionnaire et inférieur à 7 avec une branche d'une cubique dont ce point est un point double. Soit* $(7 - g)$ *l'ordre de ce contact.*

7° *Les branches ayant avec leurs coniques osculatrices des contacts du quatrième ordre, une quelconque d'entre elles ayant, en outre, au même point, un contact d'ordre égal ou supérieur à 7 avec une branche d'une cubique dont ce point est un point double. Soit* $(7 + e)$ *l'ordre de ce contact.*

On a, entre tous ces nombres, la relation

$$(27) \qquad \begin{cases} \Sigma\theta + \Sigma\omega + 3\Sigma a + \Sigma b + \Sigma d + \Sigma e - 2\Sigma g \\ \quad = 15(c - 2m + N) - 2N' - 5N''. \end{cases}$$

23. La relation (27) et le théorème V sont assurément bien compliqués; mais ils ne me semblent guère susceptibles d'être simplifiés sans restreindre la généralité. On remarquera que c'est uniquement parmi les particularités 4 et 5 que se trouvent les points en lesquels le contact entre la courbe et une cubique ordinaire s'élève au-dessus du huitième ordre. L'existence de la particularité 4 exige une condition, tandis qu'au contraire la particularité 5 existe, en général, sur toute courbe donnée.

Je me contenterai d'appliquer la formule (27) aux exemples du n° **13**. Pour une courbe qui n'a aucune singularité au point de vue des coordonnées ponctuelles, tous les termes du premier membre de (27) sont nuls, sauf le terme Σd, qui est le nombre des points en lesquels le contact de la courbe avec une cubique est du neuvième ordre. Dans le second membre, N' est nul. Les nombres N et N'' coïncident. C'est le nombre des points d'inflexion. On a ainsi $\Sigma d = 15m(3m - 7)$.

Pour une courbe qui n'a que des singularités ordinaires, et qui, en outre, en ses points d'inflexion et de rebroussement, n'a pas de contact exceptionnel avec une cubique, on a

$$\Sigma d = 15(c - 2m + i + 2r) - 4r - 5i,$$

i étant le nombre des inflexions et r celui des rebroussements. Ces deux nombres sont liés d'ailleurs par la relation

$$i - r = 3(c - m).$$

En dernier lieu, soit la courbe dont l'équation homogène est

$$x^p y^q = A z^{p+q},$$

p et q étant des entiers positifs, premiers entre eux. On doit ici supposer, en outre, $p + q$ différent de 3. Les nombres N' et N'' sont nuls. Le second membre et, par suite, Σd se réduisent à zéro.