BULLETIN DE LA S. M. F.

G. FONTENÉ

Sur les dégénérescences des 63 systèmes de coniques quadruplement tangentes à une quartique

Bulletin de la S. M. F., tome 27 (1899), p. 229-236
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1899__27__229_0>

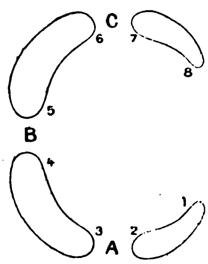
MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR LES DÉGÉNÉRESCENCES DES 63 SYSTÈMES DE CONIQUES QUADRUPLEMENT TANGENTES A UNE QUARTIQUE;

Par M. G. Fontené.

1. Plücker a montré par un exemple qu'une quartique générale peut avoir ses 28 bitangentes réelles. La quartique de Plücker est formée de quatre ménisques (*fig.* 1); en désignant les différentes

Fig. 1.



régions de la courbe par les symboles 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, on est conduit à représenter les 28 bitangentes par les 28 combinaisons deux à deux des huit symboles; on arrive donc, par le seul aspect de la figure, à la notation de Hesse. On sait que cette notation, appliquée de telle manière que 12, 34, 56, 78 représentent des bitangentes dont les huit points de contact soient à une conique, ce qui est le cas de la figure, permet de préciser les 63 systèmes de coniques quadruplement tangentes à la quartique, bien qu'elle masque la symétrie du système : on a d'abord 35 systèmes dont la notation a pour type

$$1234,5678,$$

cette notation indiquant que les six coniques évanouissantes du système sont formées par les six couples de bitangentes

$$(12,34),\quad (13,24),\quad (14,23),\quad (56,78),\quad (57,68),\quad (58,67);$$

on a ensuite 28 systèmes dont la notation a pour type

$$12,345678,$$

cette notation indiquant que les six coniques évanouissantes du système sont formées par les six couples de bitangentes

$$(13,23),\quad (14,24),\quad (15,25),\quad (16,26),\quad (17,27),\quad (18,28),$$

nous représenterons par la notation 12345678 un système illusoire, donné par le calcul, et formé des droites doubles du plan, ce qui porte le nombre des systèmes à 64 ou 2^6.

2. La quartique peut devenir nodale dans une ou plusieurs des régions A, B, C; après être devenue nodale en A, ou en A et C, elle peut devenir cuspidale en A, avec disparition de la boucle née du ménisque 12, ou cuspidale en A et C, avec disparition des boucles nées des ménisques 12 et 78 (le cas d'une quartique tricuspidale échappe à ces considérations, et les huit indices ne fonctionnent plus). Voici alors ce qui arrive concernant les systèmes de coniques quadritangentes, ou tritangentes et passant par un point double, etc. Si la quartique est nodale en A, deux systèmes dont la notation ne diffère que par l'échange des indices 2 et 3 sont identiques, et la bitangente 23 subsiste; pour B, ou C, on a les indices 4 et 5, ou 6 et 7. Si la quartique est cuspidale en A, de la manière indiquée plus haut, l'échange de deux quelconques des indices 1, 2, 3 reproduit le même système de coniques, et la notation 23, ou 31, ou 12 représente une tangente issue du point de rebroussement; même observation pour C, avec les indices 6, 7, 8. Ces remarques suggèrent le théorème suivant, où δ désigne le nombre des points nodaux de la quartique, et x le nombre des points cuspidaux :

Les systèmes de coniques qui passent par c' point nodaux donnés d'une quartique et qui, de plus ont avec la quartique c contacts véritables et passent par c'' points cuspidaux donnés, sous la condition $c' + (c + c'') = 4$, sont en nombre

$$n = 2^{6-\delta-2x-c'} \begin{cases} -(1+\delta) & \text{pour} \quad c'=0,\ c=4,\ c''=0, \\ -1 & \text{pour} \quad c'=0,\ c=3,\ c''=1; \end{cases}$$

chacun de ces systèmes compte pour $3^{c''} \times 2^{c'}$ systèmes.

Des théorèmes généraux, donnés par M. Humbert dans le *Journal de Liouville* (1886), confirment ce résultat (sauf la question du degré de multiplicité) pour le cas $c'' = 0$, c'est-à-dire pour le cas où la conique doit passer par c' points nodaux donnés, et avoir $4 - c'$ contacts avec la quartique, celle-ci pouvant avoir des points cuspidaux par lesquels ne passent pas les coniques considérées; car, en désignant par p le genre de la courbe (qui est, relativement à la quartique de Plücker et aux quartiques qui en dérivent de la manière indiquée, le nombre des régions A, B, C sans point double), la formule ci-dessus peut s'écrire, dans le cas général,

$$n = 2^{2p} \times 2^{\delta - c'} \left\{ \begin{array}{l} - \ldots, \\ - \ldots, \end{array} \right.$$

et M. Humbert, appliquant des formules générales établies par lui pour le problème des courbes de contact, démontre que, pour le cas $c'' = 0$ qu'il étudie, les systèmes de coniques considérées forment 2^{2p} familles dont chacune comprend $2^{\delta - c'}$ systèmes, des systèmes en nombre $1 + \delta$ étant toutefois illusoires. L'un de ces systèmes illusoires est le système des droites doubles du plan déjà mentionné; les δ autres systèmes ont été précisés, en supposant toutefois la quartique non cuspidale, dans les *Annales de la Faculté de Toulouse* (1889), par M. Andoyer, qui paraît d'ailleurs n'avoir pas connu les recherches de M. Humbert; ils sont formés de droites doubles passant par un point double.

3. Il appartient à M. Humbert de compléter ses recherches. Mon but est uniquement de signaler un résultat que j'ai tout lieu de croire exact, et d'indiquer les considérations qui m'y ont conduit, avant que je connusse les formules de M. Humbert. J'indiquerai d'abord une vérification. Si l'on suppose c' donné et si l'on fait varier c et c'' sous la condition $c + c'' = 4 - c'$, en rapprochant d'un contact véritable le passage de la conique par un point cuspidal, passage que nous appellerons *contact singulier* (*Bulletin de la Société mathématique,* 1898 : *Décomposition d'une correspondance tangentielle*), comme on peut avoir $c'' = 0$, ou bien $c'' = 1$ de $\varkappa$ manières, ou bien $c'' = 2$ de $\frac{\varkappa(\varkappa - 1)}{1.2}$ manières, etc., jusqu'à $c'' = \varkappa$, le nombre des systèmes obtenus, en comptant les systèmes illusoires dans l'hypothèse $c' = 0$, et en tenant compte du degré de multiplicité $2^{c'} \times 3^{c''}$, est

$$N = 2^{6 - \delta - 2\varkappa} \left[1 + \varkappa.3 + \frac{\varkappa(\varkappa - 1)}{1.2} 3^2 + \ldots + 3^\varkappa \right] = 2^{6 - \delta - 2\varkappa}(1 + 3)^\varkappa,$$

ou

$$N = 2^{6-\delta}.$$

Si maintenant c' varie, on doit avoir, et l'on a

$$2^6 = 2^{6-\delta}\left[1 + \delta + \frac{\delta(\delta-1)}{1.2} + \ldots + 1\right] = 2^{6-\delta}(1+1)^{\delta}.$$

4. Soit d'abord une quartique acuspidale. Conformément à la formule

$$N = 2^{6-\delta-c'}.2^{c'} = 2^{6-\delta} = 8.2^{3-\delta},$$

on peut distribuer les 64 systèmes en 8 groupes de 8 systèmes, en se réglant sur la séparation par la virgule, dans la notation ci-dessus, des indices 2 et 3 d'une part, 4 et 5 d'autre part, 6 et 7 enfin. Nous désignerons par g le groupe de 8 systèmes pour lequel la virgule ne sépare ni les indices 2 et 3, ni les indices 4 et 5, ni les indices 7 et 8, ce groupe comprenant le système illusoire 12345678. Les sept autres groupes de 8 systèmes seront désignés par a, b, c, bc, ac, ab, abc, le groupe ab, par exemple, étant celui pour lequel la virgule sépare les indices 2 et 3 comme l'indique la lettre a, les indices 4 et 5 comme l'indique la lettre b, mais non les indices 6 et 7 comme l'indique l'absence de la lettre c. On a le Tableau suivant, dont les signes } et { se rapportent aux quartiques cuspidales, et seront expliqués plus loin :

g.	*a.*	*b.*	*c.*
12345678	1245,3678	1234,5678	1236,4578
45,123678	1345,2678	1235,4678	1237,4568
23,145678	12,345678	14,235678	68,123457
1678,2345	13,245678	15,234678	78,123456
67,123458	2458,1367	48,123567	2368,1457
1238,4567	3458,1267	58,123467	2378,1456
1458,2367	28,134567	2348,1567	16,234578
18,234567	38,124567	2358,1467	17,234568

bc.	*ac.*	*ab.*	*abc.*
46,123578	26,134578	24,135678	1246,3578
56,123478	36,124578	34,125678	1346,2578
47,123568	27,134568	25,134678	1256,3478
57,123468	37,124568	35,124678	1356,2478
2346,1578	2456,1378	2467,1358	1247,3568
2356,1478	3456,1278	3467,1258	1347,2568
2347,1568	2457,1368	2567,1348	1257,3468
2357,1468	3457,1268	3567,1248	1357,2468

Si A est un point nodal, les coniques qui passent en A sont celles des groupes dont la notation renferme la lettre a, les indices 2 et 3 étant alors séparés par la virgule : en effet, dans le système 1234,5678 par exemple, deux seulement des coniques évanouissantes passent en A, et dans le système 14,235678, il en est de même; quant au système 23,145678, dont les six coniques évanouissantes sont des droites doubles issues de A, c'est un système illusoire formé de droites doubles passant en A; au contraire, dans l'un ou l'autre des systèmes (1245,3678), (12,345678), les six coniques évanouissantes passent en A, d'où il suit que toutes les coniques du système passent en A, puisque trois coniques d'un système étant $U=0$, $V=0$, $W=0$, et l'équation de la quartique étant

$$a\sqrt{U}+b\sqrt{V}+c\sqrt{W}=0,$$

l'équation générale des coniques du système est

$$\lambda U+\mu V+\nu W=0,$$

sous la condition

$$\frac{a^2}{\lambda}+\frac{b^2}{\mu}+\frac{c^2}{\nu}=0.$$

Dès lors, si la quartique a δ points nodaux, les c' points nodaux donnés par lesquels doivent passer les coniques demandées font connaître celles des lettres a, b, c qui entrent nécessairement dans la notation des groupes à considérer; d'autre part, les $3-\delta$ lettres qui correspondent aux régions non nodales sont les seules qui puissent accompagner celles que l'on vient d'indiquer; il suit de là que les systèmes de coniques passant par c' points nodaux donnés appartiennent à des groupes dont le nombre est $2^{3-\delta}$, puisque tel est le nombre des combinaisons auxquels donnent lieu $3-\delta$ objets, et alors le nombre des systèmes est $N=2^{6-\delta}$; le groupe g se présente pour $c'=0$, la combinaison des $3-\delta$ lettres étant alors celle qui n'en renferme aucune. Mais, dans un même groupe, chaque système se rencontre $2^{c'}$ fois; le nombre des systèmes distincts est donc $n=2^{6-\delta-c'}$. D'ailleurs, dans le groupe g, le système 23,145678, par exemple, est illusoire lorsque A est nodal : il est alors formé de droites doubles passant en A.

5. On peut d'abord, dans une certaine mesure, rattacher le cas

d'une quartique ayant δ points nodaux et $\varkappa$ points de rebroussement au cas d'une quartique ayant seulement δ points nodaux, en assimilant le passage d'une conique par un point de rebroussement à un contact véritable. Une quartique anodale peut être cuspidale en A, ou en A et C, le cas d'une quartique tricuspidale étant réservé; une quartique uninodale, en B, peut être cuspidale en A, ou en A et C; une quartique binodale, en B et C, peut être cuspidale en A. En tenant compte des systèmes illusoires qui pourront s'ajouter à ceux déjà signalés, en tenant compte aussi du degré de multiplicité de chaque système, on peut dire : les systèmes de coniques qui passent par c' points nodaux donnés, et qui, de plus, ont avec la quartique $4 - c'$ contacts *ordinaires ou singuliers,* sont encore en nombre $N = 2^{6-\delta}$.

Mais le nombre N est ici décomposable, d'après la formule déjà écrite

$$N = 2^{6-\delta-2\varkappa}\left[1 + \varkappa . 3 + \frac{\varkappa(\varkappa-1)}{1.2}3^2 + \ldots + 3^\varkappa\right],$$

et l'on comprend que la dislocation des groupes de 8 systèmes, lorsque la conique, assujettie à passer par c' points donnés, doit en outre passer par c'' points cuspidaux donnés et avoir avec la quartique c contacts véritables, sous la condition $c'' + c = 4 - c'$, doit rendre assez minutieuse la constatation de la valeur de n donnée au n° 2. Si A est un point cuspidal, les coniques qui passent en A sont celles des systèmes pour lesquels les indices 1, 2, 3 ne sont pas d'un même côté de la virgule : dans le Tableau ci-dessus, on a indiqué ces systèmes par le signe $\}$ placé à gauche de la notation, et naturellement les systèmes des groupes a, ab, ac, abc sont parmi ceux-là; pour C, on a les indices 6, 7, 8 et le signe $\{$; on peut même, par exemple, désigner par

$$b, \quad \}b, \quad b\{, \quad \}b\{$$

les quatre sous-groupes qui forment le groupe b. On vérifie alors assez aisément le nombre

$$2^{6-\delta-2\varkappa-c'} \times 2^{c'}3^{c''} \quad \text{ou} \quad 2^{6-\delta-2\varkappa} \times 3^{c''},$$

en le regardant comme un élément du nombre N, ce qui limite les recherches; le degré de multiplicité $2^{c'}3^{c''}$ étant à peu près intuitif, le nombre n est bien celui qu'on a indiqué. Il y aurait peut-être avantage, pour vérifier le nombre ci-dessus, à remplacer $3^{c''}$ par le développement de $(1+2)^{c''}$: le facteur $2^{\sigma-\delta-2\varkappa}$ est en effet au moins égal à 2, et les sous-groupes mentionnés renferment 2, 4 ou 8 systèmes de coniques. Le terme soustractif -1, pour le nombre de coniques triplement tangentes à la quartique et passant par un point cuspidal donné, correspond à un système illusoire formé de droites doubles passant en ce poiut.

Pour une quartique tricuspidale, la formule indique un système de coniques passant en B et C et doublement tangentes à la quartique, etc., et un dernier système de coniques passant en A, B, C et tangentes à la quartique : cela est exact.

6. Nous ajouterons ceci : les systèmes *distincts* de coniques assujetties à passer par c' points nodaux donnés d'une quartique de genre p, et à avoir avec la courbe $4-c'$ contacts *ordinaires ou singuliers,* sont en nombre

$$\nu = 2^{2p}.2^{\delta-c'}\left[1+\varkappa+\frac{\varkappa(\varkappa-1)}{1.2}+\ldots+1\right]$$
$$[-(1+\delta-\varkappa) \quad \text{pour} \quad c'=0],$$

ou

$$\nu = 2^{2p}.2^{\delta+\varkappa-c'} \qquad [-(1+\delta+\varkappa) \quad \text{pour} \quad c'=0],$$

et ce nombre ne dépend que du genre de la quartique; l'analogie de cette formule avec celle qui donne n est frappante,

Pour $c'+0$, c'est-à-dire pour quatre contacts ordinaires ou singuliers, on a, en décomposant,

$$\nu_0 = 2^{2p}.2^{\delta}\left[1+\varkappa+\frac{\varkappa(\varkappa-1)}{1.2}+\ldots+1\right]-(1+\delta+\varkappa),$$

ou, sans décomposer,

$$\nu_0 = 2^{2p}.2^{\delta+\varkappa}-(1+\delta+\varkappa).$$

Nous insisterons un peu sur ce cas, en décomposant pour chaque valeur de p d'après la nature nodale ou cuspidale des points doubles :

1° Pour $p=2$, on a $\nu_0=30$; avec un point nodal A, les coniques quadritangentes donnent lieu à 15 familles de deux systèmes; avec un point cuspidal A, les coniques quadritangentes donnent lieu à 15 systèmes, les coniques tritangentes et passant en A donnent lieu à 15 systèmes; il arrive ceci : quand le point nodal A devient cuspidal, chacune des 15 familles de deux systèmes α et α' de coniques quadritangentes comprend un système α de coniques quadritangentes et un système α' de coniques tritangentes et passant en A; on avait d'ailleurs, avec A nodal, 16 systèmes doubles (c'est-à-dire comptés chacun deux fois) de coniques tritangentes et passant en A; 15 de ces systèmes doubles persistent quand A devient cuspidal, les 15 systèmes α' leur sont identiques, et l'on a ainsi 15 systèmes triples de coniques tritangentes et passant en A.

2° Pour $p = 1$, on a $\nu_0 = 13$; avec deux points nodaux A et C, on a un système particulier de coniques quadritangentes, et trois familles de quatre systèmes de coniques quadritangentes; avec un point cuspidal A et un point nodal C, on a un système particulier de coniques tritangentes et passant en A, trois familles de deux systèmes de coniques quadruplement tangentes, trois familles de deux systèmes de coniques tritangentes et passant en A; avec deux points cuspidaux A et C, on a un système particulier de coniques bitangentes passant en A et C, trois systèmes de coniques quadritangentes, trois systèmes de coniques tritangentes et passant en A, trois systèmes de coniques tritangentes et passant en C, trois systèmes de coniques bitangentes passant en A et C. Le système particulier, dont les coniques passent en A si A est cuspidal, etc., est le système 1845, 2367 du groupe g, comprenant la droite double AC : les quatre points de contact d'une conique de ce système sont à une conique passant en A et C, et ce système a des propriétés spéciales relativement à la correspondance tangentielle (*Bulletin, loco citato*).

3° Avec $p = 0$, on a $\nu_0 = 4$; trois des systèmes de coniques sont analogues au système particulier du cas précédent, le quatrième jouant un rôle à part (*ibid.*) et se composant de coniques qui passent par les points cuspidaux de la quartique lorsqu'elle en a.