BULLETIN DE LA S. M. F.

L. AUTONNE

Sur certaines équations des quatrième et cinquième degrés

Bulletin de la S. M. F., tome 28 (1900), p. 90-107
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1900__28__90_1>

SUR CERTAINES ÉQUATIONS DES QUATRIÈME ET CINQUIÈME DEGRÉS;

Par M. Léon Autonne.

INTRODUCTION.

Soit h_n une équation algébrique de degré n, $n > 3$,

$$f(x) = x^n + \frac{n}{1!} a_1 x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

où les a sont des fonctions quelconques d'une variable t. Envisageons (au point de vue des théories de Galois et de M. Jordan) comme *rationnelles par définition :*

1° Toutes les constantes;

2° Les coefficients a de h_n.

Nommons alors G le groupe (au sens de Galois) de h_n; on supposera G transitif et h_n irréductible.

Prenons maintenant une équation U de Riccati entre u et t

$$\frac{du}{dt} = \mathfrak{P}_0(t) + u\,\mathfrak{P}_1(t) + u^2\,\mathfrak{P}_2(t),$$

qui admette, par hypothèse, pour intégrales les n racines

$$x_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1)$$

de h_n. Le rapport anharmonique de quatre x_i sera constant; h_n prendra le nom d'équation *anharmonique*.

Dans plusieurs Notes insérées aux *Comptes rendus* (7 mai 1883; 13 février 1899; 5 et 12 février 1900) et dans un Mémoire intitulé *Sur les équations algébriques dont toutes les racines sont intégrales d'une même équation de Riccati* (*Journal de Mathématiques*, 1900), j'ai construit les équations anharmoniques qui existent pour les divers degrés n.

Cette théorie générale a pour base les propriétés des groupes de substitutions de Galois et celles des groupes linéaires fractionnaires S d'ordre fini (groupes de MM. Jordan, Klein et Gordan), c'est-à-dire provenant de substitutions

$$\left| z \quad \frac{az+b}{cz+d} \right| \qquad ad - bc \neq 0.$$

La construction effective de h_n est fondée sur les deux théorèmes suivants :

I. — *Le groupe* G *de* h_n *est isomorphe sans hémiédrie à l'un des groupes* S.

II. — *Toute* h_n *est de la forme* $\mathrm{F}(x, \mathrm{T}) = 0$, *où le polynome à deux arguments* F *est à coefficients* NUMÉRIQUES *qui ne dépendent que de* S. Il n'entre dans h_n qu'une fonction unique $\mathrm{T}(t)$ de t, laquelle est *rationnelle*.

La propriété de définition pour les équations anharmoniques (constance du rapport anharmonique de quatre racines quelconques) n'intervient qu'*a posteriori* et assez tardivement.

Voici maintenant ce que je me propose de montrer dans le présent Travail :

Pour les degrés peu élevés, $n = 4$ ou 5, on peut parvenir aux théorèmes I et II et construire l'anharmonique par des procédés assez élémentaires et en prenant pour point de départ la propriété de définition.

Les résultats obtenus sont les suivants :

Quatrième degré.

Premier type de h_4 :

$$x^4 + 6\mathrm{T}x^2 + 4\mathrm{T}x - 3\mathrm{T}^2 = 0;$$

le rapport anharmonique K des quatre racines est équianharmonique; G est le groupe alterné entre quatre lettres, isomorphe au groupe S tétraédrique.

Second type de h_4 :

$$x^4 + 6Tx^2 + 4Tx + T(T+1) = 0;$$

K est harmonique. G est isomorphe au groupe S dérivé, pour $m = 4$, des deux substitutions (groupe S_m)

$$\theta_m = |\,z \quad \theta z\,|, \qquad \theta^m = 1; \qquad s = \left|\,z \quad \frac{1}{z}\,\right|.$$

Troisième type :

$$(x^2 + q)^2 - p(2x - 1)^2 = 0$$

avec

$$\frac{1}{p} = (1-T)^2 - (1+T)^2\left(\frac{K-1}{K+1}\right)^2,$$
$$\frac{1}{q} = \frac{(1-T)^2 - \ldots}{T}.$$

G est isomorphe à S_2.

Cinquième degré.

h_5 s'obtient en éliminant ζ entre les deux équations

$$x = \frac{\zeta - 2}{\zeta(\zeta - 3) + 1}, \qquad \zeta(\zeta^2 - 5\zeta + 5)^2 = T.$$

G est isomorphe à S_5. h_5 est une équation de Galois.

Pour l'application des théorèmes I et II et des résultats ci-dessus, il importe de spécifier ce qui suit :

Je ne considère pas comme distinctes les h_n, qui ne diffèrent que par l'intervention d'une substitution

$$\mathfrak{M} = \left|\,x \quad \frac{xA(t) + B(t)}{xC(t) + D(t)}\,\right|,$$

$AD - BC \neq 0$; A, B, C, D = rationnelles.

$\mathfrak{M}$ ne trouble pas l'anharmonisme et ne change pas le groupe G.

Ainsi je profiterai de $\mathfrak{M}$ pour supposer constamment nulle la somme des racines

$$x_0 + \ldots + x_{n-1} = a_1 = 0$$

et pour multiplier x par un facteur rationnel, choisi de façon à simplifier h_n.

Il va sans dire que les résultats de la présente Note sont d'accord avec la théorie générale des équations anharmoniques, exposée dans mon Mémoire inséré au *Journal de Mathématiques* pour 1900.

CHAPITRE I.

QUATRIÈME DEGRÉ.

1°. Le groupe général $\mathfrak{G}$ des vingt-quatre substitutions entre quatre lettres x_1, x_2, x_3, x_4 peut être envisagé comme provenant des substitutions α, β, δ, ε, savoir

$$\alpha = (12)(34), \qquad \beta = (13)(24), \qquad [\alpha\beta = \beta\alpha = (14)(23)],$$
$$\delta = (4)(123), \qquad \varepsilon = (1)(2)(34).$$

Si ε manque, $\mathfrak{G}$ se réduit au groupe alterné d'ordre douze; si δ manque, $\mathfrak{G}$ se réduit à un groupe d'ordre huit; si δ et ε manquent simultanément, $\mathfrak{G}$ se réduit au groupe g des quatre substitutions 1, α, β, $\alpha\beta$.

2°. Posons

$$\{ij\} = x_i - x_j, \qquad i, j = 1, 2, 3, 4;$$

considérons le rapport anharmonique

$$K = K_0 = \frac{\{31\}\{42\}}{\{32\}\{41\}}$$

des x_i et la façon dont K se transforme par les substitutions de $\mathfrak{G}$.

Soient

$$\tau_1 = \{23\}\{14\}, \quad \tau_2 = \{31\}\{24\}, \quad \tau_3 = \{12\}\{34\}, \quad \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0.$$

Voici la façon dont α, β, δ, ε transforment les τ :

α et β n'altèrent pas τ_1, τ_2 ni τ_3; ensuite

$$\delta = (\tau_1\,\tau_2\,\tau_3) \qquad \varepsilon = \begin{vmatrix} \tau_1 & -\tau_2 \\ \tau_2 & -\tau_1 \\ \tau_3 & -\tau_3 \end{vmatrix},$$

Nommons $\delta[K]$, ..., ce que devient K par l'effet de δ, ..., il viendra

$$\delta[K_0] = \delta\left[-\frac{\tau_2}{\tau_1}\right] = -\frac{\tau_3}{\tau_2} = \frac{\tau_1+\tau_2}{\tau_2} = \frac{K_0-1}{K_0} = K_1,$$

$$\delta[K_1] = -\frac{\tau_1}{\tau_3} = \frac{\tau_1}{\tau_1+\tau_2} = \frac{1}{1-K_0} = K_2, \qquad \delta[K_2] = K_0,$$

$$\varepsilon[K_0] = -\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{1}{K_0} = K_3,$$

$$\varepsilon[K_1] = -\frac{\tau_3}{\tau_1} = \frac{1}{K_2} = K_4,$$

$$\varepsilon[K_2] = -\frac{\tau_2}{\tau_3} = \frac{1}{K_1} = K_5,$$

3°. Les déplacements des six lettres $K_0, \ldots, K_5$ forment un groupe $\mathfrak{K}$ d'ordre six, isomorphe avec hémiédrie au groupe $\mathfrak{G}$ (1°).

A la substitution unité de $\mathfrak{K}$ correspond dans $\mathfrak{G}$ le groupe g; δ a pour correspondante

$$\mathfrak{D} = (K_0K_1K_2)(K_3K_5K_4)$$

et ε a aussi pour correspondante

$$\mathfrak{E} = (K_0K_3)(K_1K_5)(K_2K_4).$$

Se reportant à ma Note *Sur le rapport anharmonique*, insérée aux *Nouvelles Annales*, 1899, on verra que, lorsque les six quantités $K_0, \ldots, K_5$ ne sont pas toutes distinctes, les quatre x étant toutes inégales, il ne peut se présenter que deux éventualités.

Cas équianharmonique. — $K_0 = K_1 = K_2$; $K_3 = K_4 = K_5$ et $K_0^2 - K_0 + 1 = 0$, d'où

$$K_0 = K_1 = K_2 = -\rho, \qquad K_3 = K_4 = K_5 = -\rho^2$$

(ρ = racine primitive cubique de l'unité).

Cas harmonique. — Ce cas se décompose en trois :

$$K_0 = K_3 = -1, \qquad K_1 = K_4 = 2, \qquad K_2 = K_5 = \frac{1}{2};$$

$$K_0 = K_5 = 2, \qquad K_1 = K_3 = \frac{1}{2}, \qquad K_2 = K_4 = -1;$$

$$K_0 = K_5 = \frac{1}{2}, \qquad K_1 = K_4 = -1, \qquad K_3 = K_2 = 2.$$

4°. Soit

$$a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4 = 0$$

l'équation du quatrième degré dont les x sont racines. Introduisons les deux invariants

$$I = 2(a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2),$$
$$J = 6(a_0 a_2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 - a_2^3 - a_3^2 a_0 - a_1^2 a_4)$$

et l'invariant absolu

$$\Omega = I^3 J^{-2}$$

lié au rapport anharmonique K par la relation

$$\Omega = 24 \frac{(K^2 - K + 1)^3}{[(K+1)(K-2)(2K-1)]^2}$$

(*voir* les *Leçons sur la Géométrie de Clebsch*, traduction A. Benoist, Tome I, pages 284, 285, 297).

Dans le cas équianharmonique

$$\Omega = I = 0. \qquad K^2 - K + 1 = 0;$$

dans le cas harmonique

$$\Omega = \infty, \qquad J = 0, \qquad (K+1)(K-2)(2K-1) = 0.$$

Il est évident d'ailleurs que les deux cas s'excluent mutuellement.

5°. Soient maintenant une anharmonique h_4, $f(x) = 0$, et G son groupe entre les quatre racines x_i ($i = 1, 2, 3, 4$). G sera contenu dans le groupe $\mathfrak{G}$ du 1° ou coïncidera avec $\mathfrak{G}$.

On pourra écrire, sous le bénéfice des explications données dans l'Introduction,

$$f(x) = x^4 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4.$$

Le polynome $f(x)$ aura les deux invariants (4°)

$$I = 2(a_4 + 3a_2^2), \qquad J = 6(a_2 a_4 - a_3^2 - a_2^3),$$

puisque $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$. Le rapport anharmonique K lié à l'invariant absolu $\Omega = I^3 J^{-2}$ par la relation

$$\Omega = 24 \frac{(K^2 - K + 1)^3}{[(K+1)(K-2)(2K-1)]^2} \qquad (4°)$$

est constant, c'est-à-dire rationnel. K ne doit pas changer par l'intervention des substitutions de G.

6°. *Si* G *contient la substitution ternaire* $\delta = (4)(123)$ *du* 1°, on a

$$\Omega = I = 0.$$

Il faut, en effet, alors que (3°)

$$K_0 = K_1 = \ldots, \qquad K_0^2 - K_0 + 1 = 0 \qquad \text{et} \qquad \Omega = 0.$$

Si G *contient la substitution binaire* $\varepsilon = (1)(2)(34)$ *du* 1°, on a

$$\Omega = \infty, \qquad J = 0.$$

En effet, alors (3°)

$$K_0 = K_3, \qquad K_0 + 1 = 0.$$

Comme les cas équianharmonique et harmonique s'excluent mutuellement, on voit que G est contenu :

soit dans le groupe alterné entre quatre lettres, dérivé de α, β, δ, avec $I = 0$,
soit dans le groupe d'ordre huit, dérivé de α, β, ε, avec $J = 0$,
soit dans le groupe g d'ordre quatre, dérivé de α et β, $IJ \neq 0$.

Je dirai que l'anharmonique h_4 est équianharmonique si $I = 0$, harmonique si $J = 0$.

Je vais m'occuper de la construction des h_4 équianharmonique et harmonique.

7°. *Dans* h_4 *le coefficient* a_3 *ne peut être nul* et h_4 ne peut devenir bicarrée.

Les quatre racines seraient dans ce cas u, v, $-u$, $-v$. Exprimons qu'elles sont intégrales de l'équation U de Riccati; il viendra

$$u' = \mathfrak{B}_0 + \mathfrak{B}_1 u + \mathfrak{B}_2 u^2 \qquad -u' = \mathfrak{B}_0 - \mathfrak{B}_1 u + \mathfrak{B}_2 u^2,$$
$$v' = \mathfrak{B}_0 + \mathfrak{B}_1 v + \mathfrak{B}_2 v^2 \qquad -v' = \mathfrak{B}_0 - \mathfrak{B}_1 v + \mathfrak{B}_2 v^2,$$

puis

$$0 = \mathfrak{B}_0 + \mathfrak{B}_2 u^2 = \mathfrak{B}_0 + \mathfrak{B}_2 v^2.$$

Comme on ne peut avoir $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B}_2 = 0$, sans quoi l'on n'aurait plus une équation de Riccati, il vient $u^2 - v^2 = 0$ et h_4 aurait des racines égales.

8°. *Si $a_2 = 0$, h_4 ne peut être ni harmonique, ni équianharmonique.* En effet alors

$$a_2 = 0, \qquad I = 2a_4, \qquad J = -6a_3^2.$$

Pour $I = 0$, $a_4 = 0$, et il y aurait une racine nulle; pour $J = 0$, $a_3 = 0$, ce qui est absurde (7°). C. Q. F. D.

Je supposerai donc, pour la construction des h_4 équianharmonique et harmonique, $a_2 a_3 \neq 0$.

9°. Multiplions, ce qui est licite (Introduction) x par le facteur rationnel r^{-1}; h_4 devient

$$x^4 + 6a_2 r^2 x^2 + 4a_3 r^3 x + r^4 a_4 = 0.$$

Posons

$$T = a_2 r^2 = a_3 r^3,$$

d'où, puisque

$$a_2 a_3 \neq 0, \qquad r = a_2 a_3^{-1}, \qquad T = a_2^3 a_3^{-2}$$

et

$$f(x) = x^4 + 6Tx^2 + 4Tx + \mathfrak{C} = 0, \qquad \mathfrak{C} = a_4 a_2^4 a_3^{-4}.$$

Alors

$$I = 2(\mathfrak{C} + 3T^2), \qquad J = 6(T\mathfrak{C} - T^3 - T^2).$$

Si

$$I = 0, \qquad \mathfrak{C} = -3T^2,$$
$$f(x) = x^4 + 6Tx^2 + 4Tx - 3T^2.$$

Si

$$J = 0, \qquad \mathfrak{C} = T^2 + T,$$
$$f(x) = x^4 + 6Tx^2 + 4Tx + T(T+1).$$

Dans l'un et l'autre cas $f(x)$ est un polynome en x et T *à coefficients numériques.* C'est un résultat annoncé dans l'Introduction.

10°. Passons maintenant aux h_4, où $IJ \neq 0$ et dont le groupe G coïncide avec le groupe g des quatre substitutions $1, \alpha, \beta, \alpha\beta$ (6°).

On aura d'abord

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,$$
$$x_1 + x_2 - (x_3 + x_4) \neq 0,$$

sans quoi

$$0 = x_1 + x_2 = x_3 + x_4$$

et h_4 serait bicarrée, ce qui est absurde (7°).

L'expression

$$(x_1+x_2-x_3-x_4)^2=2^4p,$$

invariable par α et β, est rationnelle; i. en est de même pour

$$\text{(o)}\qquad \begin{cases} x_1x_2+x_3x_4=2q \\ \dfrac{x_1x_2-x_3x_4}{x_1+x_2-x_3-x_4}=\dfrac{1}{2}r. \end{cases}$$

De là

$$\begin{cases} x_1+x_2=2\sqrt{p} \\ x_3+x_4=-2\sqrt{p} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1x_2=q+r\sqrt{p} \\ x_3x_4=q-r\sqrt{p} \end{cases}$$

et

$$\text{(o')}\qquad \begin{cases} x_1=\sqrt{p}+\sqrt{p-q-r\sqrt{p}}=g+h \\ x_2=\sqrt{p}-\sqrt{p-q-r\sqrt{p}}=g-h \\ x_3=-\sqrt{p}+\sqrt{p-q+r\sqrt{p}}=-g+\mathrm{K} \\ x_4=-\sqrt{p}-\sqrt{p-q+r\sqrt{p}}=-g-\mathrm{K} \end{cases}$$

$$g^2=p \qquad h^2=p-q-r\sqrt{p}$$
$$\mathrm{K}^2=p-q+r\sqrt{p}.$$

11°. *On peut faire* $r=1$. D'abord $r\neq 0$, sinon, par les formules (o') du **10°**, $h=\mathrm{K}$, $x_1=-x_4$, $x_2=-x_3$ et h_4 deviendrait bicarrée (7°).

Multiplions, ce qui est licite, x par r. On pourra diviser par r les deux membres de l'égalité (o) du **10°**, ce qui revient à faire $r=1$.

12°. Formons le rapport anharmonique

$$\mathrm{K}=\frac{(x_3-x_1)(x_4-x_2)}{(x_3-x_2)(x_4-x_1)}.$$

Par les formules (o') du **10°**, il viendra, tout calcul fait,

$$\mathrm{K}=\frac{p+q+\Delta}{p+q-\Delta},$$

$\Delta^2=(p-q)^2-p$, puisque $r=1$, et enfin

$$\text{(1)}\qquad (p-q)^2-p=(p+q)^2\left[\frac{\mathrm{K}-1}{\mathrm{K}+1}\right]^2.$$

Comme (10°) $p \neq 0$, je poserai $q = p\mathrm{T}$ et (1) devient

$$(2)\quad \begin{cases} p = \dfrac{1}{(1-\mathrm{T})^2 - \left(\dfrac{\mathrm{K}-1}{\mathrm{K}+1}\right)^2 (1+\mathrm{T})^2} \\[2ex] q = \dfrac{\mathrm{T}}{(1-\mathrm{T})^2 - \left(\dfrac{\mathrm{K}-1}{\mathrm{K}+1}\right)^2 (1+\mathrm{T})^2}. \end{cases}$$

13°. Construisons maintenant h_4 avec les formules du 10°. On a, puisque $\mathrm{R} = 0$,

$$x_1 - g = h, \qquad g^2 = p,$$
$$h^2 = p - q - g, \qquad \mathrm{K}^2 = p - q + g,$$

d'où successivement

$$x_1^2 + p - 2x_1 g = h^2 = p - q - g,$$
$$x_1^2 + q = g(2x_1 - 1),$$
$$(x_1^2 + q)^2 = p(2x_1 - 1)^2.$$

Toute autre racine donnerait le même résultat, et il vient pour h_4

$$f(x) = (x^2 + q)^2 - p(2x - 1)^2.$$

Mais, par les formules (2) du 12°, p et q sont rationnels en T et $f(x)$ est encore un polynome en x et T à coefficients numériques.

14°. On sait que tous les groupes S linéaires, fractionnaires, d'ordre fini, appartiennent à cinq types différents :

I. *Circulaire* (*Kreistheilungsgruppe* de M. Klein), dérivé de l'unique substitution

$$\Theta_m = |\, z \quad \mathrm{R}z \,|, \qquad \mathrm{R}^m = 1.$$

II. *Pyramidal,* dérivé de Θ_m et de

$$|\, z \quad z^{-1} \,|,$$

(*Doppelpyramidengruppe* de M. Klein).

III. *Tétraédrique,* isomorphe sans hémiédrie au groupe alterné entre quatre lettres.

IV. *Octaédrique,* isomorphe sans hémiédrie au groupe général $\mathfrak{G}$ (1°) entre quatre lettres.

V. *Icosaédrique*, isomorphe sans hémiédrie au groupe alterné entre cinq lettres.

Or, dans le cas actuel, le groupe G de h_4 possède, en vertu de la discussion précédente, les propriétés suivantes :

Si h_4 est équianharmonique, G est le groupe alterné entre quatre lettres.

Si h_4 est harmonique, G provient de $\mathfrak{G}$ par la suppression de δ (1°); G est isomorphe au groupe pyramidal pour $m = 4$.

Si h_4 n'est ni harmonique ni équianharmonique, G dérive des substitutions α et β, $\alpha\beta = \beta\alpha$, $\alpha^2 = 1$, $\beta^2 = 1$ et est isomorphe au groupe pyramidal pour $m = 2$.

On retrouve ainsi des résultats annoncés dans l'Introduction.

CHAPITRE II.

CINQUIÈME DEGRÉ.

15°. Soit maintenant une h_5, dont $x_0, x_1, \ldots, x_4$ seront les cinq racines. Nommons G, le groupe de h_5 et G_0 le groupe des substitutions de G qui laissent x_0 immobile. Ces dernières doivent laisser fixe le rapport anharmonique

$$K^{-1} = \frac{(x_3 - x_1)(x_4 - x_2)}{(x_3 - x_2)(x_4 - x_1)}.$$

Je suppose que l'on ait démontré (ce qui se fera un peu plus loin) que K n'est ni harmonique ni équianharmonique. Alors G_0 ne pourra contenir (Chapitre I) ni $\delta = (1\,2\,3)(4)$ ni $\varepsilon = (1)(2)(34)$ et se réduira à g ou à un groupe contenu dans g. Ainsi G ne contiendra aucune substitution laissant immobile plus d'une racine; toutes les racines s'exprimeront rationnellement en fonction de deux quelconques d'entre elles, et, comme le degré est premier, h_5 sera une équation de Galois.

G étant transitif a son ordre divisible par cinq et contient la substitution circulaire

$$\sigma = (0\,1\,2\,3\,4) = |\,i, i+1\,| \quad (\text{mod. } 5),$$

entre les cinq racines x_i, $(i = 0, 1, \ldots, 4)$. G s'obtient en combinant avec σ la substitution

$$\tau = | i, li | \quad (\text{mod. } 5).$$

Comme τ est contenue dans g, on a

$$\tau^2 = 1, \qquad l^2 \equiv 1 \quad (\text{mod. } 5),$$
$$l \equiv 4 \quad (\text{mod. } 5),$$
$$\tau = | i, 4i | = (0)(14)(23) = \alpha\beta,$$
$$\tau^{-1}\sigma\tau = \sigma^{-1}.$$

G contient les dix substitutions

$$\sigma^k \quad \text{et} \quad \tau\sigma^k, \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

G est isomorphe, pour $m = 5$, au groupe pyramidal S du **14°**.

16°. Reste à montrer que K n'est ni harmonique ni équianharmonique.

Posons

$$\mu_0 = \{14\}, \qquad \mu_1 = \{20\}, \qquad \mu_2 = \{31\}, \qquad \mu_3 = \{42\}, \qquad \mu_4 = \{03\},$$
$$\{ij\} = x_i - x_j.$$

La substitution σ, qui ne saurait manquer dans le groupe G, permute les μ circulairement :

$$\sigma = (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4).$$

On a

$$x_0 + \ldots + x_4 = 0,$$

et aussi

$$\mu_0 + \ldots + \mu_4 = 0.$$

Enfin par un calcul facile

$$(0) \quad \begin{cases} 5x_0 = 2(\mu_4 - \mu_1) + \mu_2 - \mu_3, \\ 5x_1 = 2(\mu_0 - \mu_2) + \mu_3 - \mu_4, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Posons ensuite

$$a = \mu_2\mu_3, \qquad b = \mu_3\mu_4, \qquad c = \mu_4\mu_0, \qquad d = \mu_0\mu_1,$$
$$e = \mu_1\mu_2, \qquad \mu = \mu_0 \ldots \mu_4,$$

d'où

$$\mu^2 = abcde,$$

et

$$\mu\mu_1 = bde, \qquad \mu\mu_2 = cea, \qquad \mu\mu_3 = dab, \qquad \mu\mu_4 = ebc, \qquad \mu\mu_0 = acd.$$

Remplaçant dans les formules (o) les μ par leurs valeurs, il viendra

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} 5\mu x_0 = 2be(c-d) + a(ec-bd), \\ 5\mu x_1 = 2ca(d-e) + b(da-ce), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \right.$$

par permutation circulaire des cinq lettres a, b, c, d et e.

Remarquons que, si

$$a = b = c = d = e, \qquad \mu x_0 = \mu x_1 = \ldots = \mu x_4 = 0;$$

or

$$\mu^2 = abcde \neq 0;$$

il viendrait

$$x_0 = \ldots = x_4 = 0,$$

ce qui est absurde. Aucune des cinq lettres $a, \ldots, e$ n'est zéro, car alors une des cinq lettres $\mu_0, \ldots, \mu_4$, serait nulle et h_5 aurait des racines égales.

17°. On a

$$K^{-1} = \frac{|31||42|}{|32||41|} = \frac{\mu_2\mu_3}{\mu_0(\mu_1+\mu_4)} = \frac{a}{d+c}$$

$$-Ka + c + d = 0.$$

La substitution σ de G permute circulairement $a, \ldots, e$ tout en laissant K invariable. Il vient ainsi le système des cinq équations linéaires homogènes

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{rrrrrl} -Ka & & +c & +d & & =0, \\ & -Kb & & +d & +e & =0, \\ a & & -Kc & & +e & =0, \\ a & +b & & -Kd & & =0, \\ & b & +c & & -Ke & =0. \end{array} \right.$$

Aucune des $a, \ldots, e$ n'est zéro (16°); donc

$$\Delta = \begin{vmatrix} -K & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -K & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -K & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -K & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -K \end{vmatrix} = (K-2)(K^2+K-1)^2 = 0.$$

Si $K = 2$, $a = b = \ldots = e$, ce qui est absurde (16° *in fine*). Ainsi

$$K^2 + K - 1 = 0.$$

Nommons θ une racine primitive cinquième de l'unité et soit $\rho = \theta + \theta^4$, $\rho^2 = 2 + \theta^2 + \theta^3$ et, en vertu de $\theta^4 + \ldots + \theta + 1 = 0$, $\rho^2 + \rho - 1 = 0$. Les deux valeurs de K sont donc

$$K = \theta + \theta^4 \qquad \text{et} \qquad K = \theta^2 + \theta^3.$$

On n'est ni dans le cas équianharmonique ni dans le cas harmonique. C. Q. F. D.

18°. Si on annule $K^2 + K - 1$, en faisant par exemple $K = \theta + \theta^4$, tous les premiers mineurs du déterminant Δ (17°) sont nuls; a, b, c, d, e s'expriment en vertu des équations (2) du 17°, par des fonctions linéaires, homogènes, à coefficients numériques, de deux indéterminées u et v. Les substitutions σ et τ du groupe G (15°) se traduisent sur u et v par les deux substitutions linéaires homogènes S et $\mathfrak{T}$. On peut toujours supposer S mise sous forme canonique; comme $\sigma^5 = 1$, $S^5 = 1$ et

$$S = \begin{vmatrix} u & \theta^\alpha u \\ v & \theta^\beta v \end{vmatrix}.$$

Comme $\tau^2 = 1$, $\tau\sigma\tau = \sigma^{-1}$, on a aussi $\mathfrak{T}^2 = 1$, $\mathfrak{T}S\mathfrak{T} = S^{-1}$ c'est-à-dire, par un calcul facile,

$$\mathfrak{T} = \begin{vmatrix} u & v \\ v & u \end{vmatrix}$$

et

$$\alpha + \beta \equiv 0 \pmod 5.$$

$\mathfrak{T}$ doit permuter a, b, ..., e de la façon suivante

$$\tau = (a)(be)(cd)$$

et S ainsi

$$\sigma = (abcde).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} a &= u + v, & c &= \theta^{2\alpha} u + \theta^{2\beta} v, \\ b &= \theta^\alpha u + \theta^\beta v, & d &= \theta^{3\alpha} u + \theta^{3\beta} v, \\ e &= \theta^{4\alpha} u + \theta^{4\beta} v, \end{aligned}$$

Portons dans la première des équations (2) du 17°, il viendra

$$Ka = c + d,$$

$$(\theta + \theta^4)(u + v) = (\theta^{2\alpha} + \theta^{3\alpha})u + (\theta^{2\beta} + \theta^{3\beta})v,$$

d'où

$$\alpha \equiv 2, \quad \beta \equiv 3 \pmod 5$$

ou bien

$$\alpha \equiv 3, \quad \beta \equiv 2 \pmod 5.$$

Je prendrai $\alpha \equiv 2$. On aura ainsi

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} a &= u + v, \\ b &= \theta^2 u + \theta^3 v, \\ c &= \theta^4 u + \theta v, \\ d &= \theta u + \theta^4 v, \\ e &= \theta^3 u + \theta^2 v. \end{aligned} \right.$$

L'équation du cinquième degré qui admet a, b, c, d, e pour racines est

$$\Lambda(\lambda) = \lambda^5 - 5uv\lambda^3 + 5u^2v^2\lambda - (u^5 + v^5) = 0.$$

19°. Ainsi les deux substitutions $\sigma = (01234)$ et $\tau = (0)(14)(23)$ de G se traduisent sur les μ par les deux substitutions $(\mu_0\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4)$ et

$$\begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 \\ -\mu_0 & -\mu_4 & -\mu_3 & -\mu_2 & -\mu_1 \end{vmatrix};$$

sur les $a, \ldots, e$ par les deux substitutions $(abcde)$ et $(a)(be)(cd)$; sur u et v par les deux substitutions

$$\mathcal{S} = \begin{vmatrix} u & \theta^2 u \\ v & \theta^3 v \end{vmatrix}, \qquad \mathfrak{T} = \begin{vmatrix} u & v \\ v & u \end{vmatrix}.$$

Enfin $\mu = \mu_0\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4$, $\mu^2 = abcde$, reste invariable par σ et change de signe par τ.

Les deux expressions $u^5 + v^5 = p$ et $uv = q$ sont invariables par $\mathcal{S}$ et $\mathfrak{T}$, c'est-à-dire par toutes les substitutions de G. p et q sont donc *rationnelles*.

Les deux quantités d'un des cinq couples

$$\begin{array}{ll} a, & x_0, \\ b, & x_1, \\ c, & x_2, \\ d, & x_3, \\ e, & x_4, \end{array}$$

sont invariables par les mêmes substitutions de G. Donc

$$x_0 = \psi(a),$$

ψ désignant une fraction rationnelle à coefficients rationnels. Effectuons la substitution σ sur l'expression

$$x_0 - \psi(a),$$

qui est nulle, c'est-à-dire à valeur rationnelle, on aura

$$\begin{gathered} x_1 = \psi(b), \\ \dots\dots\dots, \\ x_4 = \psi(e). \end{gathered}$$

Construisons ψ.

20°. Portons les valeurs de $a, \dots, e$ données par les formules (1) du 18°, dans les formules (1) du 16°. Il viendra, tout calcul fait,

$$\begin{aligned} 5\mu x_0 &= \mathrm{R}(u-v)(u^2+v^2), \\ \mathrm{R} &= 2(\theta^2-\theta^3)+\theta-\theta^4. \end{aligned}$$

L'expression $\dfrac{u^5-v^5}{\mu} = r$ est invariable par toutes les substitutions de G, c'est-à-dire rationnelle.

Le quotient $(u^5-v^5)(u-v)^{-1}$ est égal à

$$u^4+u^3v+u^2v^2+uv^3+v^4 = u^4+v^4+uv(u^2+v^2)+u^2v^2.$$

Or

$$uv = q, \qquad u+v = a;$$

donc

$$\frac{u^5-v^5}{u-v} = a^2(a^2-3q)+q^2.$$

Alors

$$x_0 = \frac{R(u-v)(u^2+v^2)}{5\mu} = \frac{Rr(u-v)(u^2+v^2)}{5(u^5-v^5)}$$

$$= \frac{rR}{5} \cdot \frac{a^2-2q}{a^2(a^2-3q)+q^2} = \psi(a);$$

d'où

$$\psi(X) = \frac{rR}{5} \cdot \frac{X^2-2q}{X^2(X^2-3q)+q},$$

X étant une indéterminée.

21°. Posons $a^2 = q\zeta$, on aura

$$x_0 = \frac{Rr}{5q} \cdot \frac{\zeta-2}{\zeta(\zeta-3)+1}$$

Mais a est racine de l'équation (18° *in fine*)

$$A(a) = a(a^4 - 5qa^2 + 5q^2) - p = 0,$$

puisque

$$uv = q, \qquad u^5 + v^5 = p \qquad (19°).$$

Alors

$$q^2 a(\zeta^2 - 5\zeta + 5) = p$$

$$\zeta(\zeta^2 - 5\zeta + 5)^2 = \frac{p^2}{q^5} = T.$$

Si, au lieu de raisonner sur x_0 et a, on avait raisonné sur x_1 et b, x_2 et c, . . . on aurait eu les mêmes résultats.

22°. En résumé, l'équation h_5 s'obtient en éliminant ζ entre les deux équations

$$x = \frac{Rr}{5q} \cdot \frac{\zeta-2}{\zeta(\zeta-3)+1}, \qquad \zeta(\zeta^2 - 5\zeta + 5)^2 = T.$$

Il est licite de multiplier tous les x par le facteur rationnel

$$\frac{Rr}{5q};$$

cela revient à faire $\frac{Rr}{5q} = 1$.

On a à éliminer ζ entre

$$\zeta(\zeta^2 - 5\zeta + 5)^2 = T \qquad \text{et} \qquad x = \frac{\zeta-2}{\zeta(\zeta-3)+1}.$$

Le résultant est bien un polynome du cinquième degré entre ζ

et T à coefficients numériques. La relation algébrique entre x et T est du degré zéro.

23°. L'équation du cinquième degré qui vient d'être construite est-elle effectivement une anharmonique? Autrement dit, tous les rapports anharmoniques formés avec quatre racines quelconques sont-ils constants?

Il faut répondre par l'affirmative. Donnons, en effet, le nom de $\mathfrak{R}_i$ au système des six rapports anharmoniques distincts, formés par les quatre racines autres que x_i. On a vu au Chapitre I que tous les termes de $\mathfrak{R}_i$ sont des fonctions rationnelles à coefficients numériques d'un quelconque d'entre eux.

Toute l'analyse du présent Chapitre II a eu pour but de montrer la constance du rapport anharmonique K du 15°. K est un terme de $\mathfrak{R}_0$. La substitution σ de G, qui permute circulairement les cinq systèmes $\mathfrak{R}_i (i = 0, 1, \ldots, 4)$ ne change pas la valeur numérique constante, c'est-à-dire rationnelle, de K. Chacun des cinq systèmes $\mathfrak{R}_i$ a un terme constant, c'est-à-dire tous ses termes constants. C. Q. F. D.

Nous avons ainsi établi les résultats annoncés dans l'Introduction.