C. STÖRMER

Sur une propriété arithmétique des logarithmes des nombres algébriques

Bulletin de la S. M. F., tome 28 (1900), p. 146-157
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1900__28__146_1>

SUR UNE PROPRIÉTÉ ARITHMÉTIQUE DES LOGARITHMES DES NOMBRES ALGÉBRIQUES;

Par M. Carl Störmer.

1. *Sur l'approximation des nombres incommensurables par des nombres rationnels.*

Soit α un nombre incommensurable réel et positif. Comme on le sait, on peut le mettre d'une seule manière sous la forme d'une fraction continue illimitée

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_n + \cdots}}},$$

où a_0 est un nombre entier positif ou $= 0$ et où $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ sont tous entiers et positifs. Désignons par $\frac{P_n}{Q_n}$ les réduites successives de cette fraction continue, de manière que

$$\begin{array}{lllll} P_1 = a_0, & P_2 = a_1 a_0 + 1, & \ldots, & P_{n+1} = a_n P_n + P_{n-1}, & \ldots, \\ Q_1 = 1, & Q_2 = a_1, & \ldots, & Q_{n+1} = a_n Q_n + Q_{n-1}, & \ldots. \end{array}$$

P_n et Q_n sont alors des nombres entiers positifs premiers entre eux.

Comme on le sait, la première démonstration d'existence des nombres transcendants, due à Liouville ([1]), est basée sur une propriété remarquable des nombres a_n dans le cas où α est un nombre algébrique.

En effet, si α est une racine d'une équation algébrique à coefficients entiers et de degré r, on a l'inégalité suivante

$$(1) \qquad a_n < M Q_n^{r-2},$$

où M est un nombre qui ne dépend pas de n.

Dans le présent Mémoire nous allons établir une inégalité pareille pour les nombres positifs de la forme

$$\alpha = \frac{\log A}{\log B},$$

où A et B sont des nombres algébriques; par conséquent aussi pour les *logarithmes vulgaires des nombres algébriques*. (*Cas* $B = 10$.)

Commençons par quelques généralités. Suivons un procédé indiqué par M. Borel dans son exposé des recherches de Liouville ([2]). Soit $f(x)$ une fonction analytique réelle de la variable réelle x, admettant le nombre α comme zéro simple, et régulière en ce

([1]) *Journal de Liouville*, t. XVI.

([2]) Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, p. 26.

point. Soit a, b un intervalle réel contenant α et assez petit pour que $f(x)$ soit régulière et n'aït pas d'autres zéros dans cet intervalle.

Soit $\frac{p}{q}$ une fraction irréductible, valeur approchée de α et contenue dans a, b.

Pour toute valeur x contenue dans l'intervalle a, b, on a

$$|f'(x)| < \mathrm{M},$$

où M est une constante ne dépendant que de l'intervalle a, b. En appliquant la formule de Taylor arrêtée à son premier terme, on a

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{p}{q} - \alpha\right) f'\left[\alpha + \theta\left(\frac{p}{q} - \alpha\right)\right]. \qquad 0 < \theta < 1.$$

Or, $\alpha + \theta\left(\frac{p}{q} - \alpha\right)$ étant contenue dans l'intervalle a, b, on aura

$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| < \left|\frac{p}{q} - \alpha\right| \mathrm{M},$$

ce qui donne

$$(2) \qquad \left|\frac{p}{q} - \alpha\right| > \frac{\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right|}{\mathrm{M}}.$$

Si, en particulier, $\frac{p}{q}$ est une des réduites $\frac{\mathrm{P}_n}{\mathrm{Q}_n}$ de α développé en fraction continue, on a l'inégalité suivante (¹) :

$$(3) \qquad \left|\frac{\mathrm{P}_n}{\mathrm{Q}_n} - \alpha\right| < \frac{1}{a_n \mathrm{Q}_n^2}$$

ce qui donne

$$(4) \qquad a_n < \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{Q}_n^2 \left|f\left(\frac{\mathrm{P}_n}{\mathrm{Q}_n}\right)\right|}.$$

Pour en déduire des inégalités comme (1) il faut trouver une limite inférieure simple de $\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right|$ exprimée comme fonction de q par exemple. C'est ce qui est très facile dans le cas où $f(x)$ est un polynome de x à coefficients entiers et de degré r. En effet,

---

(¹) Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, p. 30.

ce polynome étant supposé n'avoir pas de racine rationnelle, on a

$$(5)\qquad \left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| > \frac{1}{q^r},$$

ce qui donne immédiatement l'inégalité de Liouville (1).

2. *Inégalités fondamentales pour les logarithmes.*

Soient A et B deux nombres positifs qu'on peut supposer pour plus de simplicité >1. Posons

$$(6)\qquad \frac{\log A}{\log B} = \alpha$$

et supposons que α soit incommensurable. Pour cela il faut et il suffit qu'il n'existe pas de nombres entiers positifs m et n tels que $A^m = B^n$.

Nous allons appliquer à ce nombre α le procédé que nous avons indiqué. A et B étant > 1, α sera positif. Conservons les mêmes notations qu'auparavant. Alors α est racine positive de l'équation

$$B^x - A = 0$$

et la fonction f aura la valeur

$$f(x) = B^x - A,$$

d'où

$$f'(x) = B^x \log B.$$

Nous allons trouver une limite inférieure pour $\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right|$. α étant incommensurable, cette quantité est positive. Posons

$$(7)\qquad \begin{cases} \left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \left|B^{\frac{p}{q}} - A\right| = A\varepsilon, \\ |B^p - A^q| = A^q\varepsilon'. \end{cases}$$

Nous allons distinguer deux cas : $B^p > A^q$ et $B^p < A^q$.

Dans le *premier cas* on aura

$$1 + \varepsilon = (1 + \varepsilon')^{\frac{1}{q}}.$$

En prenant les logarithmes et en appliquant la formule approchée

$$\log(1+x) = \frac{x}{1+\theta x}, \qquad 0 < \theta < 1,$$

on en déduit

$$\frac{\varepsilon}{1+\theta\varepsilon} = \frac{1}{q}\,\frac{\varepsilon'}{1+\theta'\varepsilon'},$$

θ et θ' étant compris entre zéro et 1. Cela donne

$$\varepsilon > \frac{1}{q}\,\frac{\varepsilon'}{1+\varepsilon'}. \tag{8}$$

Dans le *second cas* on aura sûrement ε et ε' moindres que 1 et

$$1-\varepsilon = (1-\varepsilon')^{\frac{1}{q}},$$

d'où l'on tire, comme auparavant,

$$\frac{\varepsilon}{1-\theta\varepsilon} = \frac{1}{q}\,\frac{\varepsilon'}{1-\theta'\varepsilon'},$$

d'où

$$\varepsilon > \frac{\varepsilon'}{q}(1-\varepsilon)$$

et comme $\varepsilon < 1$

$$\varepsilon\left(1+\frac{\varepsilon'}{q}\right) > \frac{\varepsilon'}{q},$$

ce qui donne

$$\varepsilon > \frac{1}{q}\,\frac{\varepsilon'}{1+\varepsilon}. \tag{9}$$

Des inégalités (8) et (9) on tire

$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| > \frac{A}{q}\,\frac{\varepsilon'}{1+\varepsilon'} \tag{10}$$

où ε' est donné par la formule (7). En substituant cette valeur dans la formule (2), il viendra

$$\left|\frac{p}{q}-\alpha\right| > \frac{A}{qM}\,\frac{\varepsilon'}{1+\varepsilon'}. \tag{11}$$

Cela posé, considérons les quotients incomplets $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ de α développé en fraction continue illimitée. En combinant les inégalités (4) et (10) on obtient

(12) $$a_n < \frac{M}{A}\,\frac{1+\varepsilon_n}{Q_n\varepsilon_n}$$

où

(13) $$\varepsilon_n = \frac{|B^{P_n} - A^{Q_n}|}{A^{Q_n}}.$$

Or, comme a_n est un nombre entier, il faut que ε_n pour n croissant soit de l'ordre de Q_n^{-1}. Par conséquent on peut trouver un nombre positif K indépendant de n et ne dépendant que de A et B, tel que

$$\frac{M}{A}(1+\varepsilon_n) < K,$$

ce qui donne

(14) $$a_n < K\,\frac{A^{Q_n}}{Q_n\,|B^{P_n} - A^{Q_n}|}.$$

3. *Propriétés des logarithmes des nombres algébriques.*

Jusqu'ici nous n'avons pas fait d'autres hypothèses sur la nature des nombres A et B, que de les supposer plus grands que 1 et tels que $\alpha = \frac{\log A}{\log B}$ soit incommensurable. Admettons de plus qu'ils soient des nombres algébriques. Soient, respectivement,

(15) $$M_0 A^\mu + M_1 A^{\mu-1} + \ldots + M_{\mu-1} A + M_\mu = 0 \qquad (M_0 > 0)$$

et

(16) $$N_0 B^\nu + N_1 B^{\nu-1} + \ldots + N_{\nu-1} B + N_\nu = 0 \qquad (N_0 > 0)$$

les équations irréductibles aux coefficients entiers, auxquelles satisfont A et B. Désignons par

$$A_1 = A, \quad A_2, \quad A_3, \quad \ldots, \quad A_\mu$$

les racines de l'équation (15) et par

$$B_1 = B, \quad B_2, \quad B_3, \quad \ldots, \quad B_\nu$$

les racines de (16). Posons

(17) $$M_0^q N_0^p (A^q - B^p) = z.$$

Comme $\alpha = \frac{\log A}{\log B}$ est supposé incommensurable, z sera différent de zéro. Nous allons éliminer A et B entre les équations (15), (16) et (17). Posons

$$M_0^q N_0^p (A_i^q - B_j^p) = N_0^p (M_0 A_i)^q - M_0^q (N_0 B_j)^p = z_{i,j}.$$

Alors z sera racine de l'équation algébrique

$$\prod_{i,j} (z - z_{i,j}) = 0, \tag{18}$$

le produit étant étendu aux valeurs

$$i = 1, 2, 3, \ldots, \mu,$$
$$j = 1, 2, 3, \ldots, \nu.$$

En effectuant la multiplication au premier membre de (18), cette équation peut s'écrire

$$z^{\mu\nu} + C_1 z^{\mu\nu-1} + \ldots + C_\rho z^{\mu\nu-\rho} + \ldots + C_{\mu\nu} = 0. \tag{18'}$$

Les coefficients C_ρ seront des *nombres entiers ou nuls*. En effet C_ρ est une fonction symétrique des quantités $M_0 A_i$, dont les coefficients sont des fonctions symétriques aux coefficients entiers des $N_0 B_j$. Comme les $M_0 A_i$ et les $N_0 B_j$ sont respectivement racines des équations

$$x^\mu + M_1 x^{\mu-1} + M_0 M_2 x^{\mu-2} + \ldots + M_0^{\mu-1} M_\mu = 0$$

et

$$x^\nu + N_1 x^{\nu-1} + N_0 N_2 x^{\mu-2} + \ldots + N_0^{\nu\ 1} N_\nu = 0,$$

il s'ensuit, par la théorie des fonctions symétriques ([1]), que C_ρ est un polynome aux coefficients entiers des coefficients de ces deux équations et, par conséquent, égal à un nombre entier ou nul.

Cela posé, nous allons trouver une *limite supérieure des nombres* $|C_\rho|$. On a évidemment, en désignant par K un nombre plus grand que tous les $|A_i|$ et $|B_j|$,

$$|z_{i,j}| < M_0^q N_0^p (K^p + K^q).$$

([1]) *Voir*, par exemple, SERRET : *Cours d'Algèbre supérieure*, t. I, p. 317.

Or, $\frac{p}{q}$ étant une valeur approchée de α, on peut supposer qu'il existe un nombre positif $r > 1$ et tel qu'on a pour tous les p et q

$$rq > p.$$

Cela donne

$$|z_{i,j}| < 2[M_0 N_0^r K^r]^q.$$

On en tire que

$$|C_\rho| < \lambda(M_0 N_0^r K^r)^{\rho q} < \lambda(M_0 N_0^r K^r)^{\mu\nu q}$$

où λ ne dépend que de μ et de ν et non de p et de q. En posant

$$(M_0 N_0^r K^r)^{\mu\nu} = N,$$

on aura ainsi l'inégalité cherchée

$$(19) \qquad |C_\rho| < \lambda N^q,$$

λ et N étant des nombres fixes, dépendant de la nature de A et de B et non de p et de q.

Cela posé, il est facile de trouver une limite inférieure de $|z|$. Si l'équation (18) a des racines nulles, soient

$$C_{\mu\nu} = 0, \qquad C_{\mu\nu-1} = 0, \qquad \ldots, \qquad C_{\mu\nu-\lambda+1} = 0$$

et

$$C_{\mu\nu-\lambda} \gtrless 0.$$

Comme les coefficients C sont des nombres entiers ou nuls, on aura

$$(20) \qquad |C_{\mu\nu-\lambda}| \overline{\gtrless} 1.$$

Alors, le nombre z, défini par l'équation (17) et, d'après notre hypothèse, différent de zéro, est racine de l'équation

$$(21) \qquad z^{\mu\nu-\lambda} + C_1 z^{\mu\nu-\lambda-1} + \ldots + C_{\mu\nu-\lambda} = 0, \qquad (\lambda \overline{\gtrless} 0).$$

Or, comme on le sait ([1]), on a l'inégalité suivante

$$|z| > \frac{|C_{\mu\nu-\lambda}|}{|C| + |C_{\mu\nu-\lambda}|}$$

où $|C|$ est le plus grand des nombres $|C_1|, |C_2|, \ldots, |C_{\mu\nu-\lambda-1}|$.

([1]) *Voir*, par exemple, SERRET : *Cours d'Algèbre supérieure*, t. I, p. 88.

En tenant compte des relations (19) et (20), cela donne

$$|z| > \frac{1}{2\lambda N^q},$$

ce qui donne, en substituant la valeur de z et en remarquant que $rq > p$,

$$|A^q - B^p| > \frac{1}{2\lambda(M_0 N_0^r N)^q}$$

ou bien

$$|A^q - B^p| > \frac{\lambda_1}{N_1^q} \tag{22}$$

où λ_1 et N_1 sont des nombres fixes dépendant seulement de la nature de A et de B et non de p et de q.

Cela posé nous allons considérer le développement de α en fraction continue. En combinant les inégalités (14) et (22), on obtiendra le théorème suivant :

Théorème. — *Soient* A *et* B *deux nombres algébriques positifs et* > 1 *et supposons que*

$$\alpha = \frac{\log A}{\log B}$$

soit incommensurable. Développons α *en fraction continue illimitée*

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_n + \cdots}}}$$

et désignons par $\frac{P_n}{Q_n}$ *la* $n^{\text{ième}}$ *réduite de cette fraction continue de manière que*

$$\begin{array}{lllll} P_1 = a_0, & P_2 = a_1 a_0 + 1, & \ldots, & P_{n+1} = a_n P_n + P_{n-1}, & \ldots, \\ Q_1 = 1, & Q_2 = a_1, & \ldots, & Q_{n+1} = a_n Q_n + Q_{n-1}, & \ldots. \end{array}$$

Alors on aura l'inégalité suivante

$$a_n < K \frac{M^{Q_n}}{Q_n} \tag{23}$$

où K *et* M *sont des nombres fixes dépendant de la nature de* A *et de* B *et indépendants de* n.

4. *Cas particuliers. Applications.*

Faisons d'abord cette remarque bien évidente que, si $B = 10$, α se réduira au *logarithme vulgaire* du nombre algébrique A.

Considérons un autre cas très simple, celui où A et B sont des nombres entiers. Rappelons la formule (14)

$$a_n < K \frac{A^{Q_n}}{Q_n \mid B^{P_n} - A^{Q_n} \mid}$$

où K est un nombre fixe plus grand que $\frac{M}{A}(1 + \varepsilon_n)$. M est une limite supérieure de $|B^x \log B|$ dans un intervalle comprenant α et tous les $\frac{P_n}{Q_n}$ et ε_n est définie par

$$\varepsilon_n = \frac{\mid B^{P_n} - A^{Q_n} \mid}{A^{Q_n}}.$$

Nous allons chercher des limites supérieures de M et de ε_n, ce qui donne une valeur de K. Considérons d'abord M. Comme

$$\left| \frac{P_n}{Q_n} - \alpha \right| < \frac{1}{a_n Q_n^2} < 1$$

toutes les $\frac{P_n}{Q_n}$ seront comprises dans l'intervalle $\alpha - 1$, $\alpha + 1$ et, par conséquent, on peut poser

$$M = B^{\alpha+1} \log B,$$

et, comme $B^\alpha = A$,

$$M = AB \log B. \tag{24}$$

Considérons la quantité ε_n. En multipliant l'inégalité (3) par $Q_n \log B$, et en se rappelant la valeur de α, on obtient

$$\mid P_n \log B - Q_n \log A \mid < \frac{\log B}{a_n Q_n} < \log B$$

ou bien

$$\left| \log \frac{B^{P_n}}{A^{Q_n}} \right| < \log B.$$

Si $B^{P_n} > A^{Q_n}$ on en déduit

$$1 + \varepsilon_n < B. \tag{25}$$

Si, au contraire, $B^{P_n} < A^{Q_n}$, on aura $\varepsilon_n < 1$ et

$$\frac{1}{1-\varepsilon_n} < B$$

et l'on retombe sur l'inégalité ci-dessus en remarquant que $B > 1$.

On voit ainsi, par les inégalités (24) et (25), qu'on peut prendre pour K le nombre $B^2 \log B$, de sorte que la relation (14) prend la forme

$$(14') \qquad a_n < \frac{A^{Q_n} B^2 \log B}{Q_n \,|\, B^{P_n} - A^{Q_n} \,|}.$$

En remarquant que $|\, B^{P_n} - A^{Q_n} \,| \gtreqless 1$, on en déduit le théorème suivant, corollaire de notre théorème général :

Soient A *et* B *deux nombres entiers* > 1 *et tels que* $\alpha = \dfrac{\log A}{\log B}$ *est incommensurable. En développant* α *en fraction continue et en conservant les mêmes notations qu'auparavant, on aura*

$$(26) \qquad a_n < \frac{A^{Q_n}}{Q_n} B^2 \log B.$$

Du théorème général on peut tirer des conséquences intéressantes pour la théorie des nombres transcendants. En effet, si l'on forme une fraction continue illimitée, où $a_n \geqq F(n)$, $F(n)$ étant $> K \dfrac{M^{Q_n}}{Q_n}$ pour n assez grand, et cela quels que soient les nombres K et M, l'inégalité (23) ne peut pas subsister pour n assez grand, et comme il en sera de même pour l'inégalité de Liouville (1), *la valeur de la fraction continue sera un nombre transcendant qui ne sera pas égal à un nombre de la forme* $\dfrac{\log A}{\log B}$, A *et* B *étant des nombres algébriques positifs et* > 1.

Il suffit, pour cela, de poser, par exemple,

$$a_n = n^{Q_n}.$$

Alors le nombre

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_n + \cdots}}}$$

sera un nombre transcendant qui ne sera pas égal à un nombre de la forme $\frac{\log A}{\log B}$, A et B étant algébriques, positifs et > 1, et, par conséquent, *qui ne sera pas égal à un logarithme vulgaire d'un nombre algébrique positif.*

Remarquons que l'existence de pareils nombres transcendants découle *a priori* des recherches de Cantor. En effet, il a démontré que l'ensemble des nombres transcendants a la puissance du continu, tandis que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable (¹); comme il en est de même de l'ensemble des nombres $\frac{\log A}{\log B}$, A et B étant algébriques, il s'ensuit qu'il y a encore une infinité non dénombrable de nombres transcendants de la propriété demandée.

De même que nous avons traité, dans ce Mémoire, des nombres de la forme $\frac{\log A}{\log B}$, on pourrait appliquer le même procédé aux nombres

$$\frac{\operatorname{arc\,tang} A}{\operatorname{arc\,tang} B}, \quad \frac{\arcsin A}{\arcsin B}, \quad \frac{\displaystyle\int_0^A \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}}{\displaystyle\int_0^B \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}}, \quad \ldots$$

et à une infinité d'autres.

(¹) *Voir* BOREL : *Leçons*, etc., p. 24, et *Journal de Crelle*, t. 77.