Bulletin de la S. M. F.

Cahen

Ombre portée par un tore sur lui-même

Bulletin de la S. M. F., tome 4 (1875-1876), p. 87-88

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1875-1876__4__87_1>

Ombre portée par un tore sur lui-même; par M. Cahen, élève de l'École Polytechnique.

(Séance du 23 février 1876.)

Soit un tore donné par son axe vertical oz et son cercle méridien c. Proposons-nous de trouver l'ombre portée par ce tore sur lui-même, sans avoir recours à une courbe graphique.

Soit m un point de l'ombre propre. Cherchons l'ombre portée par ce point, c'est-à-dire l'intersection du rayon lumineux mk qui passe en ce point avec la surface. Pour cela, imaginons qu'il tourne autour de l'axe oz. Il engendre dans ce mouvement un hyperboloïde de révolution circonscrit au tore et le coupant suivant deux parallèles sur lesquels se trouvent les points cherchés. Pour les déterminer, je coupe les deux surfaces par leur plan méridien principal. J'obtiens comme sections : dans le tore, le cercle c, et, dans l'hyperboloïde, une hyperbole tangente à ce cercle au point m_1 situé sur le parallèle du point m. Nous obtiendrons une asymptote et par suite le centre de cette hyperbole en amenant la droite mk, par une rotation autour de oz, à être parallèle au plan vertical de projection. Pour plus de simplicité, nous supposerons les rayons parallèles entre eux et au plan vertical de projection : mk est alors une asymptote et k le centre de l'hyperbole. Cherchons les deux autres points d'intersection a_1 et b_1 de cette courbe et du cercle. Remarquons pour cela que la droite $a_1 b_1$ est parallèle à la direction symétrique de la tangente $m_1 t$ par rapport à l'axe oz. Elle sera donc déterminée si l'on en a un point, le point milieu par exemple. Or celui-ci est à l'intersection de cd et de kd, ces deux droites étant en direction symétriques de cm_1 et de km_1 par rapport à oz. La droite $a_1 b_1$ étant menée, je prendrai ses points d'intersection a_1 et b_1 avec le cercle, je mènerai les parallèles de ces points, et je prendrai leur intersection avec mk, ce qui me donnera les points cherchés a et b.

La même construction est applicable dans le cas où la courbe méridienne du tore est une conique quelconque ayant un de ses axes parallèle à oz.

Revenons au cas du cercle, et remarquons que la construction que nous avons donnée peut être simplifiée. Menons, en effet, l'autre asymptote kt de l'hyperbole. Prolongeons la tangente en m_1 et la sécante $a_1 b_1$ jusqu'à leurs points de rencontre p et t, q et r avec les asymptotes. Le quadrilatère $pqtr$ est inscriptible dans un cercle ayant pour centre le point c. La construction reviendra donc à décrire un cercle du point c comme centre avec ot pour rayon et à joindre les deux points d'intersection q et r de ce cercle avec le système des asymptotes. Cette construction me donne la droite $a_1 b_1$. On achèvera comme précédemment la détermination des points a et b.