

# BULLETIN DE LA S. M. F.

H. POINCARÉ

**Sur les surfaces de translation et les  
fonctions abéliennes**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 29 (1901), p. 61-86

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1901\\_\\_29\\_\\_61\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1901__29__61_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1901, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## MÉMOIRES.

---

SUR LES SURFACES DE TRANSLATION ET LES FONCTIONS ABÉLIENNES;

Par M. H. POINCARÉ.

M. Lie, dans une série de Notes (*Archiv for Matematik og Naturvidenskab*, vol. 7; *Comptes rendus*; 1892; *Berichte der K. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften*; 1896), a montré qu'une surface (ou une variété de l'espace à plus de trois dimensions) ne peut être doublement de translation que si elle est engendrée d'une certaine manière par un système de fonctions abéliennes ou par leurs dégénérescences.

La démonstration de Lie repose sur la considération de certaines équations aux dérivées partielles.

Dans un Mémoire publié au *Journal de Liouville* (1895), j'ai été conduit moi-même à aborder le même problème par une voie toute différente.

Depuis, en réfléchissant à cette question, j'ai trouvé un troisième chemin qui peut conduire au but; le théorème fondamental se trouve démontré d'une façon pour ainsi dire intuitive et sans qu'on ait à faire intervenir des équations aux dérivées partielles de Lie.

Malheureusement, la démonstration de ce théorème n'est pas tout et elle devrait être suivie d'une longue discussion à cause du très grand nombre de cas particuliers que l'on est forcé de distinguer. Je ne les ai pas tous traités; je me suis borné à parler de ceux sur lesquels j'avais à dire quelque chose de nouveau. Pour les autres, qui sont d'ailleurs très particuliers, je n'aurais pu que renvoyer aux travaux de Lie.

### I. — THÉORÈME FONDAMENTAL.

Supposons qu'une surface soit doublement de translation. Comme elle est de translation, ses équations pourront se mettre

sous la forme

$$(1) \quad \begin{cases} x = f_1(t_1) + f_2(t_2), \\ y = \varphi_1(t_1) + \varphi_2(t_2), \\ z = \psi_1(t_1) + \psi_2(t_2), \end{cases}$$

où  $t_1$  et  $t_2$  sont deux variables indépendantes; et comme elle est doublement de translation, cela pourra se faire de deux manières, de sorte qu'on aura, outre les équations (1), les équations

$$(1 \text{ bis}) \quad \begin{cases} x = f_3(t_3) + f_4(t_4), \\ y = \varphi_3(t_3) + \varphi_4(t_4), \\ z = \psi_3(t_3) + \psi_4(t_4), \end{cases}$$

$t_3$  et  $t_4$  étant deux autres variables.

Posons

$$\begin{aligned} f_1(t_1) = u_1, & \quad f_2(t_2) = u_2, & \quad f_3(t_3) = -u_3, & \quad f_4(t_4) = -u_4, \\ \varphi_1(t_1) = v_1, & \quad \varphi_2(t_2) = v_2, & \quad \varphi_3(t_3) = -v_3, & \quad \varphi_4(t_4) = -v_4, \\ \psi_1(t_1) = w_1, & \quad \psi_2(t_2) = w_2, & \quad \psi_3(t_3) = -w_3, & \quad \psi_4(t_4) = -w_4. \end{aligned}$$

En rapprochant les équations (1) et (1 bis), nous aurons

$$(2) \quad \begin{cases} u_1 + u_3 + u_3 + u_4 = 0, \\ v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0, \\ w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 0. \end{cases}$$

Ces relations doivent avoir lieu quelles que soient les variables  $t_1$  et  $t_2$ , les deux autres variables  $t_3$  et  $t_4$  étant précisément définies en fonctions de  $t_1$  et de  $t_2$  par ces relations (2).

Considérons les trois dérivées  $f'_i(t_i)$ ,  $\varphi'_i(t_i)$ ,  $\psi'_i(t_i)$  des trois fonctions  $f_i$ ,  $\varphi_i$  et  $\psi_i$  et regardons-les comme les coordonnées homogènes d'un point  $M_i$  dans un plan.

Définissons de même le point  $M_i$  dont les coordonnées homogènes seront

$$f'_i(t_i), \quad \varphi'_i(t_i), \quad \psi'_i(t_i) \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Nous aurons ainsi quatre points  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ ,  $M_4$ . Chacun de ces points décrira une courbe plane. J'appellerai  $C_i$  la courbe décrite par le point  $M_i$ .

Nous pouvons dire également que les coordonnées homogènes de  $M_i$  sont

$$du_i = f'_i(t_i) dt_i, \quad dv_i = \varphi'_i(t_i) dt_i, \quad dw_i = \psi'_i(t_i) dt_i \quad (i = 1, 2),$$

ou

$$du_i = -f'_i(t_i) dt_i, \quad dv_i = -\varphi'_i(t_i) dt_i, \quad dw_i = -\psi'_i(t_i) dt_i \quad (i = 3, 4).$$

Faisons d'abord varier  $t_1$  en laissant  $t_2$  constant, de telle sorte que

$$dt_2 = du_2 = dv_2 = dw_2 = 0;$$

la différentiation des équations (2) nous donnera

$$(3) \quad \begin{cases} du_1 + du_3 + du_4 = 0, \\ dv_1 + dv_3 + dv_4 = 0, \\ dw_1 + dw_3 + dw_4 = 0. \end{cases}$$

Faisons ensuite varier  $t_2$  en laissant  $t_1$  constant, de telle sorte que

$$dt_1 = du_1 = dv_1 = dw_1 = 0;$$

la différentiation des équations (2) nous donnera

$$(3 \text{ bis}) \quad \begin{cases} du_2 + du_3 + du_4 = 0, \\ dv_2 + dv_3 + dv_4 = 0, \\ dw_2 + dw_3 + dw_4 = 0. \end{cases}$$

Les équations (3) signifient que les trois points  $M_1, M_3, M_4$  sont en ligne droite et les équations (3 bis) que les trois points  $M_2, M_3, M_4$  sont en ligne droite. Les quatre points  $M_1, M_2, M_3, M_4$  sont donc en ligne droite.

La droite  $M_1 M_2 M_3 M_4$  est une ligne droite quelconque du plan; en effet, les variables  $t_1$  et  $t_2$  étant indépendantes, le point  $M_1$  est un point quelconque de  $C_1$  et le point  $M_2$  un point quelconque de  $C_2$ . En joignant un point quelconque de  $C_1$  et un point quelconque de  $C_2$ , on obtient évidemment une droite quelconque du plan.

Supposons que nous fassions varier cette droite d'une manière continue; les quatre points  $M_1, M_2, M_3, M_4$  varieront également d'une manière continue. Supposons maintenant qu'au bout d'un certain temps cette droite mobile soit revenue à sa position initiale; on peut se demander si les quatre points  $M_i$  reviendront également à leur position initiale.

Ce que je me propose de démontrer, c'est que, quand la droite mobile revient à sa position initiale, l'ensemble des quatre points

n'a pas changé; ces points ont pu seulement s'échanger entre eux.

J'en déduirai que l'ensemble des courbes  $C_1, C_2, C_3, C_4$  forme une courbe plane algébrique du quatrième ordre. Dans certains cas particuliers, cette courbe peut se décomposer, de telle façon que plusieurs des courbes  $C_i$  peuvent être distinctes. Mais, en général, la courbe du quatrième degré est indécomposable, de sorte que les quatre courbes sont le prolongement analytique l'une de l'autre.

Pour établir ces différents points, j'envisage d'abord une tangente  $T$  à la courbe  $C_1$ . Je suppose qu'il s'agisse d'une tangente ordinaire et non d'une tangente d'inflexion. Je suppose que la droite  $M_1M_2M_3M_4$  que j'appelle  $D$  soit d'abord très voisine de  $T$ , qu'on la fasse varier d'une manière continue de façon qu'elle reste toujours très peu différente de  $T$  et qu'elle revienne finalement à sa position initiale *après avoir tourné autour de  $T$* .

Dans ces conditions, le point  $M_1$  est d'abord très voisin du point de contact de  $T$  et de  $C_1$ , il reste ensuite très voisin de ce point de contact; mais, quand la droite  $D$  revient à sa position initiale, le point  $M_1$  ne revient pas à sa position initiale; il s'est échangé avec un autre point d'intersection  $M'_1$  de la droite  $D$  et de la courbe  $C_1$ .

Soient de même  $M'_2, M'_3, M'_4$  ce que deviennent les points d'intersection de  $D$  avec  $C_2, C_3$  et  $C_4$  quand la droite  $D$ , après avoir tourné autour de  $T$ , revient à sa position initiale. Ces points  $M'_2, M'_3, M'_4$  peuvent différer des positions initiales  $M_2, M_3, M_4$  de ces points d'intersection ou se confondre avec elles.

Soient  $u'_i, v'_i, w'_i$  les valeurs de  $\pm f_i(t_i), \pm \varphi_i(t_i), \pm \psi_i(t_i)$  correspondant au point  $M'_i$  (on prend le signe  $+$  pour  $i = 1, 2$ , et le signe  $-$  pour  $i = 3, 4$ ); on a alors les relations

$$(2 \text{ bis}) \quad \begin{cases} u'_1 + u'_2 + u'_3 + u'_4 = 0, \\ v'_1 + v'_2 + v'_3 + v'_4 = 0, \\ w'_1 + w'_2 + w'_3 + w'_4 = 0. \end{cases}$$

Le point  $M'_1$  différant du point  $M_1$ , on ne saurait avoir

$$u'_1 = u_1, \quad v'_1 = v_1, \quad w'_1 = w_1.$$

On aura donc, par exemple,

$$u'_1 \geq u_1.$$

Dans ces conditions, on ne saurait avoir à la fois

$$u_2 = u'_2, \quad u_3 = u'_3, \quad u_4 = u'_4,$$

sans quoi il y aurait incompatibilité entre la première relation (2) et la première relation (2 bis). Il faut donc que l'un au moins des points  $M'_2, M'_3, M'_4$  diffère du point correspondant  $M_2, M_3$  ou  $M_4$ .

Il faut donc que, par exemple, le point  $M_2$  se soit échangé avec un autre point d'intersection  $M'_2$  de la courbe  $C_2$  et de la droite  $D$  quand cette droite  $D$  a tourné autour de  $T$ .

Il est clair qu'il n'en serait pas ainsi si la droite  $T$  coupait la courbe  $C_2$  en un point ordinaire (très voisin de  $M_2$ ) et sans le toucher.

D'où cette conclusion : la droite  $T$  doit être tangente à l'une des courbes  $C_2, C_3, C_4$  ou passer par l'un des points singuliers de ces courbes.

Ce raisonnement s'applique à toutes les tangentes de la courbe  $C_1$ ; or, il est clair que toutes ces tangentes ne peuvent pas passer par un des points singuliers de  $C_2, C_3$  ou  $C_4$  ou toucher en deux points différents, outre la courbe  $C_1$ , une autre des courbes  $C_2, C_3$  et  $C_4$ .

Si une tangente  $T$  de  $C_1$  passe par un point singulier de  $C_2, C_3$  ou  $C_4$ , il est clair que la tangente infiniment voisine ne passera pas par ce point. Si une droite  $T$  touche  $C_1$  et  $C_2$  en deux points  $P_1$  et  $P_2$  différents, il est clair que la tangente de  $C_1$  dont le point de contact est infiniment voisin de  $P_1$  ne touchera pas  $C_2$ .

Il faut donc que le point de contact d'une tangente quelconque  $T$  de  $C_1$  se confonde avec le point de contact de cette même tangente avec une autre de trois courbes  $C_2, C_3$  et  $C_4$ ; il faut donc que deux au moins des quatre courbes,  $C_1$  et  $C_2$  par exemple, se confondent ou plutôt soient le prolongement analytique l'une de l'autre.

Que se passera-t-il alors si la droite  $D$  tourne autour de la tangente  $T$  qui touche les deux courbes  $C_1$  et  $C_2$  (qui se prolongent analytiquement l'une l'autre) en un certain point  $P$ ? Dans la posi-

tion initiale, les deux points  $M_1$  et  $M_2$  seront très voisins l'un de l'autre et très voisins du point  $P$ . Quand la droite  $D$  aura décrit un tour complet, les deux points d'intersection  $M_1$  et  $M_2$  se seront échangés, les points  $M_3$  et  $M_4$  étant d'ailleurs revenus à leurs positions initiales.

L'ensemble des quatre points  $M_1, M_2, M_3, M_4$  n'aura pas varié.

Ce raisonnement, toutefois, demande à être complété. Car l'échange entre plusieurs points d'intersection de la droite  $D$  et de la courbe  $C_1$  pourrait se faire aussi quand la droite  $D$ , au lieu de tourner autour d'une tangente ordinaire de la courbe  $C_1$ , tournerait autour d'une tangente singulière, par exemple d'une tangente d'inflexion, ou autour d'une droite passant par un point singulier de  $C_1$ .

Pour ne pas avoir à répéter notre raisonnement pour chacun de ces cas, j'emploierai l'artifice suivant. J'envisage une position particulière  $D_0$  de la droite  $D$  et les positions correspondantes  $M_1^0, M_2^0, M_3^0, M_4^0$  des quatre points  $M_1, M_2, M_3, M_4$ .

Supposons que la droite  $D_0$  vienne couper la courbe  $C_1$  en un point  $M'_1$  autre que le point  $M_1^0$ . Soient  $P_1$  et  $Q_1$  deux points de la courbe  $C_1$  très voisins de  $M_1^0$ ; nous pouvons toujours supposer que la tangente en  $Q_1$  est une tangente ordinaire. Soit  $T$  cette tangente en  $Q_1$ ; les points  $P_1$  et  $M_1^0$  appartenant tous deux à la courbe  $C_1$  et étant très voisins de  $Q_1$ , la droite  $M_1^0 P_1$  différera très peu de  $T$ .

Considérons maintenant une suite continue de points  $M'_i$  tous situés sur la courbe  $C_1$  et allant de  $M'_1$  jusqu'en  $P_1$ ; soit  $S$  cette suite. Faisons maintenant varier la droite  $D$  de la manière suivante : nous joindrons successivement le point  $M_1^0$  à tous les points  $M'_i$  de la suite  $S$  depuis le point  $M'_1$  jusqu'au point  $P_1$ , de telle façon que la droite  $D$  se confonde à l'origine avec  $M_1^0 M'_i$  et à la fin avec  $M_1^0 P_1$ .

La droite  $D$  étant ainsi devenue très voisine de  $T$ , je pourrai la faire tourner autour de  $T$ , sans qu'elle cesse jamais d'être très voisine de cette tangente. Après un tour complet, elle se confondra de nouveau avec  $M_1^0 P_1$ .

Je joindrai ensuite le point  $M_1^0$  à tous les points  $M'_i$  de la suite  $S$  depuis le point  $P_1$  jusqu'au point  $M'_1$  de telle façon que la droite  $D$ ,

repassant par les mêmes positions dans l'ordre inverse, se confonde à l'origine avec  $M_1^0 P_1$ , pour revenir finalement à sa position primitive  $M_1^0 M_1'$ .

La droite D a ainsi décrit un véritable lacet, qui se divise en trois parties; comment, dans ces trois parties, se sont comportés les points d'intersection? Dans la première partie, la droite D a occupé successivement les positions  $M_0^1 M_1'$ ,  $M_1^0 M_1'$ ,  $M_1^0 P_1$ ; l'un des points d'intersection  $M_1^0$  est resté fixe; un autre est parti de  $M_1'$  pour aboutir en  $P_1$  en parcourant d'une façon continue toute la suite S.

Dans la deuxième partie, la droite D tourne autour de T et, comme T est une tangente ordinaire et que  $M_1^0$  et  $P_1$  sont très voisins du point de contact, les deux points d'intersection  $M_1^0$  et  $P_1$  s'échangent.

Dans la troisième partie, la droite D repasse, dans l'ordre inverse, par les mêmes positions que dans la première partie; le point qui coïncidait avec  $M_1^0$  pendant toute la première partie coïncidera avec  $P_1$  à la fin de la deuxième partie et, pendant la troisième partie, variera d'une façon continue de  $P_1$  à  $M_1'$  en parcourant toute la suite S. Le point qui coïncidait avec  $M_1'$  au début de la première partie et avec  $P_1$  à la fin de la première partie se trouvera en  $M_1^0$  à la fin de la deuxième partie et restera fixe en  $M_1^0$  pendant toute la troisième partie.

Finalement, les deux points  $M_1^0$  et  $M_1'$  se seront échangés.

Voyons ce que deviennent les quatre points  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ ,  $M_4$  quand on fait varier ainsi la droite D. Le point  $M_1$  est celui des points d'intersection de D et de  $C_1$  qui se confondait primitivement avec  $M_1^0$ . Il se confondra donc avec  $M_1^0$  pendant toute la première partie du lacet, s'échangera avec  $P_1$  pendant la deuxième partie et variera de  $P_1$  à  $M_1'$  pendant la troisième partie.

D'après ce que nous venons de voir, quand D tournera autour de T,  $M_1$  doit s'échanger avec l'un des trois points  $M_2$ ,  $M_3$ ,  $M_4$ ; si, par exemple, il s'échange avec  $M_2$ , les points  $M_3$  et  $M_4$  reviennent à leur position primitive, et la courbe  $C_2$  est le prolongement analytique de la courbe  $C_1$ .

Dans la deuxième partie du lacet, les deux points d'intersection  $M_1^0$  et  $P_1$  s'échangent; or,  $M_1$  coïncide avec  $M_1^0$  au début de la deuxième partie et avec  $P_1$  à la fin. Comme il doit s'échanger

avec  $M_2$ , c'est que  $M_2$  coïncide avec  $P_1$  au début de la deuxième partie et avec  $M_1^0$  à la fin.

Comment maintenant se comporte  $M_2$  dans la première et la deuxième parties du lacet ?  $M_2$  est l'intersection de  $D$  avec la courbe  $C_2$  qui est identique à la courbe  $C_1$  ; il est clair que si nous faisons parcourir à  $D$  en sens inverse la première partie du lacet, de façon à ramener le droite  $D$  dans sa position initiale  $D_0$ , le point  $M_2$ , qui coïncide avec  $P_1$  quand la droite  $D$  (à la fin de la première partie du lacet) est en  $M_1^0 P_1$ , parcourra en sens inverse la suite  $S$ , de sorte qu'il se trouvera en  $M_1'$  quand la droite  $D$  sera en  $D_0$ .

Ainsi, le point  $M_2^0$  (c'est-à-dire la position que prend  $M_2$  quand  $D$  est en  $D_0$ ) n'est autre chose que  $M_1'$ .

Si donc la droite  $D_0$  coupe la courbe  $C_1$  en un autre point que  $M_1^0$ , cet autre point ne peut être que l'un des points

$$M_2^0, M_3^0, M_4^0.$$

Ainsi, la droite  $D_0$  (qui est une droite quelconque) ne peut avoir avec l'ensemble des courbes  $C_1, C_2, C_3, C_4$  d'autres points d'intersection que les quatre points  $M_1^0, M_2^0, M_3^0, M_4^0$ .

Donc l'ensemble de ces quatre courbes forme une courbe algébrique du quatrième degré. c. q. f. d.

De là, il est aisé de déduire le théorème de Lie que les seules surfaces qui soient doublement de translation sont les surfaces

$$\Theta(x, y, z) = 0$$

(où  $\Theta$  est la fonction  $\Theta$  ordinaire à trois variables) et leurs dégénérescences.

## II. — EXTENSION DES RÉSULTATS PRÉCÉDENTS.

Le raisonnement s'étend presque sans changement au cas d'un plus grand nombre de variables.

Soient  $x_1, x_2, \dots, x_p$  les coordonnées d'un point dans l'espace à  $p$  dimensions et supposons que l'on ait dans cet espace une variété  $V$  à  $p - 1$  dimensions qui soit doublement de translation.

Les équations de la variété  $V$  pourront se mettre sous la forme

$$(1) \quad x_q = f_{q,1}(t_1) + f_{q,2}(t_2) + \dots + f_{q,p-1}(t_{p-1}) \quad (q = 1, 2, \dots, p)$$

$t_1, t_2, \dots, t_{p-1}$  étant  $p - 1$  variables indépendantes.

La variété V étant deux fois de translation, ses équations pourront se mettre de deux manières sous la forme (1), de sorte que nous aurons, outre les relations (1), les relations

$$(1 \text{ bis}) \quad x_q = f_{q,p}(t_p) + f_{q,p+1}(t_{p+1}) + \dots + f_{q,2p-2}(t_{2p-2}) \quad (q = 1, 2, \dots, p),$$

où  $t_p, t_{p+1}, t_{p+2}, \dots, t_{2p-2}$  représentent  $p - 1$  nouvelles variables.

Si nous posons

$$f_{q,i}(t_i) = u_{q,i} \quad \left( \begin{array}{l} q = 1, 2, \dots, p \\ i = 1, 2, \dots, p-1 \end{array} \right),$$

$$f_{q,i}(t_i) = -u_{q,i} \quad (q = 1, 2, \dots, p; i = p, p+1, \dots, 2p-2),$$

des relations (1) et (1 bis) nous déduirons les suivantes :

$$(2) \quad u_{q,1} + u_{q,2} + \dots + u_{q,2p-3} + u_{q,2p-2} = 0 \quad (q = 1, 2, \dots, p),$$

où les  $p - 1$  variables  $t_1, t_2, \dots, t_{p-1}$  doivent être regardées comme indépendantes, tandis que les  $p - 1$  variables  $t_p, t_{p+1}, \dots, t_{2p-2}$  sont des fonctions des  $p - 1$  premières.

Considérons maintenant

$$f'_{1,i}(t_i), f'_{2,i}(t_i), \dots, f'_{p,i}(t_i)$$

ou, si l'on préfère,

$$du_{1,i}, du_{2,i}, \dots, du_{p,i},$$

comme les coordonnées homogènes d'un point  $M_i$  dans l'espace à  $p - 1$  dimensions, et appelons  $C_i$  la courbe gauche de l'espace à  $p - 1$  dimensions qui est décrite par le point  $M_i$ .

Supposons que l'on fasse varier  $t_1$ , les variables  $t_2, t_3, \dots, t_{p-1}$  demeurant constantes de telle sorte que l'on ait

$$dt_i = du_{q,i} = 0 \quad (i = 2, 3, \dots, p-1; q = 1, 2, \dots, p).$$

La différentiation des relations (2) nous donnera alors

$$(3) \quad du_{q,1} + du_{q,p} + du_{q,p+1} + du_{q,p+2} + \dots + du_{q,2p-2} = 0,$$

et l'on trouverait de même

$$(3 \text{ bis}) \quad \left\{ \begin{array}{l} du_{q,k} + du_{q,p} + du_{q,p+1} + \dots + du_{q,2p-2} = 0 \\ (q = 1, 2, \dots, p; k = 1, 2, \dots, p-1). \end{array} \right.$$

Ces relations signifient que les  $2p - 2$  points

$$M_1, M_2, \dots, M_{2p-2}$$

sont dans une même variété plane  $P$  à  $p - 2$  dimensions. Je dirai, pour abrégé, dans un même plan  $P$ .

Voyons maintenant comment pourraient s'échanger entre eux les différents points d'intersection de la courbe  $C_1$  et du plan  $P$ .

Soient  $T$  un plan tangent à  $C_1$  et  $M_1^0$  le point de contact; je supposerai que ce plan tangent soit un plan tangent ordinaire rencontrant la courbe en deux points confondus; je supposerai, de plus, que ce plan ne touche ni la courbe  $C_1$ , ni aucune des autres courbes  $C_i$  en un autre point que  $M_1^0$ ; ce n'est donc ni un plan tangent commun à deux courbes  $C_i$ , ni un plan touchant double à  $C_1$ . Je supposerai que ce n'est pas non plus un plan tangent à la fois en  $M_1^0$  à deux branches de courbe  $C_1$  et  $C_i$  tangentes l'une à l'autre. Il est clair, en effet, que les plans tangents à  $C_1$  satisfont *en général* à toutes ces conditions.

Supposons ensuite que le plan  $P$ , d'abord très peu différent de  $T$ , fasse un tour complet autour de  $T$ . Le plan  $P$ , dans sa position primitive, coupe  $C_1$  en deux points  $M_1$  et  $M_1'$  très voisins de  $M_1^0$ . Quand  $P$  a tourné autour de  $T$ , ces deux points  $M_1$  et  $M_1'$  s'échangent; les autres points d'intersection de  $P$  avec les courbes  $C_i$  reviennent à leurs positions primitives.

Quand  $P$  tourne autour de  $T$ , le point  $M_1$  change; par conséquent, pour que les relations (2) subsistent, il faut que l'un au moins des autres points  $M_i$ , le point  $M_2$ , change également.

Or cela ne peut arriver que d'une seule manière, puisque, d'après nos hypothèses, le plan  $T$  n'est pas tangent à la fois à deux branches de courbe différentes; cela ne peut arriver que si les deux courbes  $C_1$  et  $C_2$  sont le prolongement analytique l'une de l'autre.

Dans ce cas,  $M_1'$  n'est autre chose que  $M_2$ , de sorte que les deux points  $M_1$  et  $M_2$  s'échangent simplement.

Reprenons maintenant le raisonnement dans toute sa généralité.

Soit  $P_0$  une position particulière du plan  $P$  et  $M_i^0$  la position correspondante du point  $M_i$ .

Je suppose que  $P_0$  coupe  $C_1$  en un point  $M_1'$  différent de  $M_1^0$ .

Soient  $Q_1$  et  $R_1$  deux points de  $C_1$  très voisins de  $M_1^0$ ; nous pouvons toujours supposer que le plan tangent  $T$  en  $Q_1$  est un *plan tangent ordinaire*. J'entends par là : 1° que ce plan tangent rencontre la courbe en deux points confondus seulement; 2° qu'il n'est pas tangent à la fois à deux branches de courbe  $C_i$  différentes (soit en touchant la courbe  $C_1$  en deux points différents, ou en touchant la courbe  $C_1$  et une courbe  $C_i$  en deux points différents; soit en touchant en  $Q_1$  deux branches de courbe  $C_1$  et  $C_i$  tangentes l'une à l'autre, mais différentes l'une de l'autre).

Faisons maintenant décrire au plan  $P$  un lacet.

Dans la première partie du lacet, le plan  $P$  part de la position  $P_0$  et aboutit à une position finale où il passe par  $R_1$  et  $M_1^0$  et est très peu différent de  $T$ ; dans les positions intermédiaires, il ne cesse pas de passer par  $M_1^0$ . Par conséquent, l'un des points d'intersection de  $P$  et de  $C_1$  est resté fixe en  $M_1^0$ , l'autre a varié d'une manière continue de  $M_1^0$  à  $R_1$ ; le point  $M_1$  en particulier est resté fixe en  $M_1^0$ .

Dans la deuxième partie du lacet, le plan  $P$  décrit un tour complet autour de  $T$ . Les deux points d'intersection de  $P$  et de  $C_1$  qui sont en  $M_1^0$  et  $R_1$ , s'échangent entre eux. Le plan  $T$  étant un plan tangent ordinaire, deux des points  $M_i$ , à savoir  $M_1$  et, par exemple,  $M_2$  s'échangent; les autres points  $M_i$  reviennent à leurs positions primitives. Le point  $M_1$  qui était en  $M_1^0$  au commencement de cette deuxième partie vient donc en  $R_1$  à la fin et l'on voit qu'inversement le point  $M_2$  devait être en  $R_1$  au commencement de la deuxième partie et venir en  $M_1^0$  à la fin. Enfin les deux courbes  $C_1$  et  $C_2$  doivent être le prolongement analytique l'une de l'autre.

Dans la troisième partie du lacet, le plan  $P$  repasse dans l'ordre inverse, par les positions qu'il a occupées dans la première. Les points d'intersection de  $P$  avec  $C_1$  (ou avec son prolongement analytique  $C_2$ ) qui, au début de la troisième partie, se trouvaient en  $R_1$  et en  $M_1^0$ , doivent venir à la fin de cette troisième partie en  $M_1^0$  et  $M_1$ . Les points  $M_3, M_4, \dots, M_{2p-2}$  qui avaient, à la fin de la deuxième partie, repris les mêmes positions qu'au début de la deuxième partie, repasseront dans la troisième partie, dans l'ordre inverse par les mêmes positions que dans la première partie; de sorte qu'ils seront à la fin de la troisième partie dans les

mêmes positions qu'au début de la première partie, c'est-à-dire en  $M_3^0, M_4^0, \dots, M_{2p-2}^0$ . Le point  $M_1$  qui, au début de la troisième partie, était en  $R_1$ , viendra à la fin de la troisième partie en  $M'_1$ ; le point  $M_2$  qui était en  $M_1^0$  sera encore en  $M_1^0$  à la fin de la troisième partie.

Enfin, le point  $M_2$  qui était en  $R_1$  à la fin de la première partie avait dû, pendant cette première partie, coïncider constamment avec un des points d'intersection de  $C_1$  et de  $P$ , puisque  $C_1$  et  $C_2$  ne diffèrent pas au point de vue analytique. Avec lequel de ces points d'intersection? Il est clair que c'est avec celui qui est en  $R_1$  à la fin de la première partie. Nous devons donc conclure qu'au début de la première partie il était en  $M'_1$ .

Donc  $M'_1$  n'est autre chose que  $M_2^0$ .

Ainsi, il ne peut pas y avoir d'autre point d'intersection de  $P_0$  et de  $C_1$  que les points  $M_i^0$ .

Donc l'ensemble des courbes  $C_i$  forme une courbe algébrique d'ordre  $2p - 2$ .

### III. — DISCUSSION.

Considérons donc cette courbe d'ordre  $2p - 2$  que j'appellerai la *courbe C* et qui est formée de l'ensemble des courbes  $C_i$ . Je dis maintenant que les quantités que nous avons appelées  $u_{q,i}$  sont des intégrales abéliennes de première espèce relatives à cette courbe algébrique.

Nous avons représenté par

$$du_{1,i}, du_{2,i}, \dots, du_{p,i}$$

les coordonnées homogènes du point  $M_i$ ; nous pouvons représenter de même par

$$du_1, du_2, \dots, du_p$$

où

$$du_q = f'_{q,i}(t) dt$$

les coordonnées homogènes du point général  $M$  de la courbe  $C$  [comme *en général*  $C$  est indécomposable, de sorte que les différentes courbes  $C_i$  sont le prolongement analytique les unes des autres, je puis écrire simplement  $f_q(t)$  au lieu de  $f_{q,i}(t)$ , de sorte que  $du_q = f'_q(t) dt$ ].

Je poserai d'ailleurs

$$\frac{du_1}{\xi_1} = \frac{du_2}{\xi_2} = \dots = \frac{du_{p-1}}{\xi_{p-1}} = \frac{du_p}{\xi_p}.$$

PREMIÈRE PROPOSITION. — *Supposons d'abord que la courbe C ne présente aucun point singulier, tel que point double, point de rebroussement, etc.*

Alors dans le voisinage d'un point quelconque de C les rapports des coordonnées  $\xi$  à l'une d'entre elles, à  $\xi_p$  par exemple, seront des fonctions holomorphes de l'un de ces rapports, de  $\frac{\xi_1}{\xi_p}$  par exemple.

Soit M un point de C dont les coordonnées sont  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$ ; si, par exemple, dans le voisinage de ce point, tous les  $\frac{\xi_i}{\xi_p}$  sont fonctions holomorphes de  $\frac{\xi_1}{\xi_p}$ , je dirai que toutes les fonctions holomorphes  $\frac{\xi_1}{\xi_p}$  sont des fonctions holomorphes du point analytique  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p)$  ou simplement du point M. Si, dans le voisinage de M, ce n'étaient pas tous les  $\frac{\xi_i}{\xi_p}$  qui fussent fonctions holomorphes de  $\frac{\xi_1}{\xi_p}$ , mais tous les  $\frac{\xi_i}{\xi_{p-1}}$ , par exemple, qui fussent fonctions holomorphes de  $\frac{\xi_2}{\xi_{p-1}}$ , ce seraient alors les fonctions holomorphes de  $\frac{\xi_2}{\xi_{p-1}}$  que j'appellerais *fonctions holomorphes du point M*, etc.; dans tous les cas, cette expression, fonction holomorphe du point M, se trouvera parfaitement définie.

Si, dans le voisinage d'un point de C, la fonction  $u_2$  n'est pas une fonction holomorphe du point M, je dirai que ce point est un point singulier de la fonction  $u_q$ .

Je dis maintenant que la fonction  $u_q$  n'aura pas de point singulier. Considérons, en effet, le plan P qui coupe C aux  $2p - 2$  points

$$M_1, M_2, \dots, M_{2p-2},$$

de sorte qu'on aura

$$(1) \quad u_{q,1} + u_{q,2} + \dots + u_{q,2p-2} = 0.$$

Si les points  $M_2, M_3, \dots, M_{2p-2}$  ne sont pas singuliers, les

fonctions

$$u_{q,2}, \dots, u_{q,2p-2}$$

seront holomorphes; en vertu de (1), la fonction  $u_{q,1}$  le sera également, de sorte que le point  $M_1$  ne sera pas non plus singulier.

Si le plan P passe par un point singulier de la fonction  $u_q$  sur C, il devra donc passer par un second point singulier. Mais le plan P est quelconque; quelles que soient les positions attribuées aux points singuliers, on pourrait donc faire passer le plan P par un de ces points et par un seul. Or, cela est impossible, nous venons de le voir; donc il ne peut y avoir de point singulier.

En particulier, la fonction  $u_q$  ne pourra devenir infinie (à moins que le point M ne décrive une infinité de cycles sur la surface de Riemann S relative à la courbe C), mais nous ne pouvons encore affirmer que  $u_q$  soit une fonction uniforme du point M; nous voyons déjà que  $u_q$  revient à sa valeur primitive quand le point M décrit un contour fermé *infinitement petit* sur la surface de Riemann S; mais il pourrait n'en pas être de même quand le point M décrit un *cycle* fermé sur S.

Le raisonnement ne s'appliquerait pas si la courbe C présentait un point singulier, un point double, par exemple; car alors tout plan P passant par ce point double couperait C en *deux* points confondus qui pourraient être tous deux singuliers pour la fonction  $u$ . Tout plan P passant par un de ces points singuliers passerait alors par l'autre. En revanche, le raisonnement s'applique sans changement si la courbe algébrique C se décompose sans avoir de point multiple.

DEUXIÈME PROPOSITION. — Soient maintenant

$$v_1, v_2, \dots, v_h$$

les intégrales abéliennes de première espèce de la courbe C et soit  $v_{q,i}$  la valeur de  $v_q$  au point  $M_i$ . Nous aurons

$$(2) \quad v_{q,1} + v_{q,2} + \dots + v_{q,2p-2} = 0,$$

relations analogues aux relations (1).

Considérons maintenant

$$\begin{aligned} &\text{les } du_{q,i} \quad (q = 1, 2, \dots, p) \\ &\text{et les } dv_{q,i} \quad (q = 1, 2, \dots, h) \end{aligned}$$

comme les coordonnées homogènes d'un point  $N_i$  dans l'espace à  $p + h - 1$  dimensions. Nous trouverons comme plus haut par différentiation

$$(2 \text{ bis}) \quad \left\{ \begin{array}{l} dv_{q,i} + \sum_{k=p}^{2p-2} dv_{q,k} = 0 \quad (q = 1, 2, \dots, h), \\ du_{q,i} + \sum_{k=p}^{2p-2} du_{m,k} = 0 \quad (m = 1, 2, \dots, p) \\ (i = 1, 2, \dots, p-1); \end{array} \right.$$

ces relations nous montrent que les  $2p - 2$  points  $N_i$  sont dans une même variété plane  $P'$  à  $p - 2$  dimensions.

Soient  $C'_i$  la courbe décrite par le point  $N_i$  et  $C'$  l'ensemble des courbes  $C'_i$ .

Soit  $P'_0$  une position particulière du plan  $P'$  et soit  $N_i^0$  la position correspondante du point  $N_i$ . Soit  $T_i$  la tangente à la courbe  $C'$  au point  $N_i^0$ .

Pour définir  $P'_0$ , il suffira de nous donner  $p - 1$  des points  $N_i^0$ , par exemple les points  $N_1^0, N_2^0, \dots, N_{p-1}^0$ . Nous pourrions toujours supposer que ces  $p - 1$  points n'appartiennent pas à une même variété plane à  $p - 3$  dimensions. Si, en effet, les points  $N_1, N_2, \dots, N_{p-1}$  appartaient *en général* à un plan de  $p - 3$  dimensions, il en serait de même des points  $M_1, M_2, \dots, M_{p-1}$  et alors la courbe  $C$  devrait être contenue dans un plan à  $p - 2$  dimensions, de sorte que la variété  $V$  se réduirait à un plan à  $p - 2$  dimensions.

Soit maintenant  $N_i^1$  un point de  $C'$  infiniment voisin de  $N_i^0$ ; par les  $p - 1$  points

$$N_1^1, N_2^1, N_3^1, \dots, N_{p-1}^1,$$

je puis faire passer une variété plane  $P'_1$  à  $p - 2$  dimensions, infiniment peu différente de  $P'_0$ .

$P'_1$  coupera  $C'$  en  $p - 1$  autres points

$$N_p^1, N_{p+1}^1, \dots, N_{2p-2}^1,$$

infiniment voisins des points

$$N_p^0, N_{p+1}^0, \dots, N_{2p-2}^0.$$

Les deux variétés  $P'_0$  et  $P'_1$  ayant  $p - 2$  points communs

$$N_2^0, N_3^0, \dots, N_{p-1}^0$$

(non situés sur une même variété plane à  $p - 4$  dimensions, puisque avec  $N_1^0$  ils ne sont pas dans un plan à  $p - 3$  dimensions) détermineront une variété plane  $Q_0$  à  $p - 1$  dimensions.

$Q_0$  contiendra évidemment la droite

$$N_q^0 N_q^1 \quad (q = 1, p, p + 1, \dots, 2p - 2),$$

c'est-à-dire la tangente  $T_q$ . (C'est ainsi que le plan tangent à un cône contient les tangentes à toutes les courbes tracées sur le cône et coupant la génératrice de contact.)

Ainsi, la variété plane qui contient  $P'_0$  et la tangente  $T_1$  contient aussi les tangentes

$$T_p, T_{p+1}, \dots, T_{2p-2}.$$

Comme rien ne distingue les différents points d'intersection de  $C'$  et de  $P'_0$ , je pourrais démontrer de même que cette variété contient aussi les tangentes

$$T_2, T_3, \dots, T_{p-1}.$$

En résumé, à toute variété plane  $P'$  à  $p - 2$  dimensions coupant  $C'$  en  $2p - 2$  points  $N_i$  correspondra une variété plane  $Q$  à  $p - 1$  dimensions qui contiendra les  $2p - 2$  tangentes  $T_i$ .

Soit maintenant  $P'_2$  une position de  $P'$  infiniment voisine de  $P'_0$ ; soient  $Q_0$  et  $Q_2$  les variétés  $Q$  correspondant à  $P'_0$  et à  $P'_2$ . Je me propose de démontrer que  $Q_0$  et  $Q_2$  sont identiques. Je désignerai par  $N_i^0$  et  $N_i^2$  les intersections de  $C'$  avec  $P'_0$  et avec  $P'_2$  et par  $T_i^0$  et  $T_i^2$  les tangentes correspondantes à  $C'$ .

En effet, supposons d'abord que  $P'_2$  et  $P'_0$  ait un point commun, par exemple  $N_1^0$ . Alors  $Q_2$  et  $Q_0$  contiendront tous deux la tangente  $T_1^0$ .

De plus,  $Q_0$  contient la tangente  $T_q^0$  et  $Q_2$  contient la tangente infiniment voisine  $T_q^2$ . En négligeant des infiniment petits d'ordre supérieur, on peut dire que  $T_q^0$  et  $T_q^2$  se coupent en un point infiniment voisin de  $N_q^0$ .

Donc, les  $2p - 2$  points  $N_q^0$  sont infiniment voisins de l'intersection de  $Q_2$  et  $Q_0$ ; la limite de l'intersection de  $Q_2$  et  $Q_0$ ,

quand  $P'_2$  et  $P'_0$  tendent à se confondre, ne peut donc être que  $P'_0$ . Or cette intersection doit contenir la tangente  $T_1^0$ . Mais en général (c'est-à-dire si les points  $N_1^0, N_2^0, \dots, N_{p-1}^0$  qui définissent  $P'_0$  ont été choisis d'une façon quelconque sur  $C'$ ), la tangente  $T_1^0$  ne fait pas partie de  $P'_0$  (sans cela, en effet, la tangente à la courbe  $C$  au point  $M_1$  serait également, en général, dans le plan  $P$ ; or le plan  $P$  est un plan *quelconque* de  $p-2$  dimensions de l'espace plan à  $p-1$  dimensions où se trouve  $C$ . Il est donc impossible que la tangente à  $C$  s'y trouve toujours). La contradiction ne peut être levée que si l'on suppose que  $Q_0$  et  $Q_2$  se confondent.

Ainsi  $Q_2$  et  $Q_0$  se confondent si  $P'_0$  et  $P'_2$  ont comme point commun  $N_1^0 = N_1^2$ ; ils se confondraient également si  $P'_0$  et  $P'_2$  avaient comme point commun  $N_2^0 = N_2^2$ .

Supposons maintenant que  $P'_0$  et  $P'_2$  n'aient aucun point commun. Je pourrai construire une variété  $P'_3$  passant par  $N_1^0$  et par  $N_2^2$ . Alors  $P'_0$  et  $P'_3$  ayant pour point commun  $N_1^0$ ,  $Q_0$  et  $Q_3$  se confondent; d'autre part,  $P'_3$  et  $P'_2$  ayant pour point commun  $N_2^2$ ,  $Q_3$  et  $Q_2$  se confondent. Donc  $Q_0$  et  $Q_2$  se confondent encore.

Maintenant, si deux variétés  $Q$  correspondant à deux variétés  $P'$  très peu différentes se confondent, il est aisé de conclure que deux variétés  $Q$  correspondant à deux variétés  $P'$  quelconques se confondroit encore. Donc toutes les variétés  $Q$  se confondent.

Donc, la courbe  $C'$  est située dans un espace plan à  $p-1$  dimensions (le théorème correspondant dans l'espace ordinaire est le suivant : *Si toutes les droites qui joignent deux points quelconques d'une courbe gauche vont rencontrer cette même courbe en un troisième point, c'est que la courbe gauche se réduit à une courbe plane*). Remarquons que le raisonnement s'applique quand même les courbes  $C$  et  $C'$  présenteraient des points multiples ou seraient décomposables.

TROISIÈME PROPOSITION. — Donc entre les  $p+h$  fonctions  $u$  et  $v$  il y a  $h$  relations linéaires.

Donc  $p$  est au moins égal à  $h$ ; et, parmi les fonctions  $u$ , il y en a  $h$  qui sont des combinaisons linéaires des intégrales abéliennes de première espèce.

Nous pouvons, sans restreindre la généralité, supposer que

$$u_1, u_2, \dots, u_h$$

sont des intégrales abéliennes de première espèce.

Je dis qu'il en est de même de  $u_i (i > h)$ .

En effet,  $du_i$  est une différentielle abélienne, puisque  $du_1$  en est une et que

$$du_i = \frac{\xi_i}{\xi_1} du_1.$$

De plus,  $u_i$  ne devenant pas infini sera une intégrale abélienne de première espèce.

*Ainsi toutes les fonctions  $u$  sont des intégrales abéliennes de première espèce, de sorte que  $p = h$ .*

Il semblerait que le raisonnement est en défaut si la courbe  $C$  est unicursale, c'est-à-dire si  $h = 0$ ; on n'a pas, en effet, dans ce cas, le droit de dire que  $du_1$  est une différentielle abélienne, puisque nous n'avons plus de différentielle abélienne de première espèce.

Mais ce cas doit être exclu. Et, en effet, si la courbe  $C$  est unicursale, il n'y a plus de cycles sur la surface de Riemann  $S$ ; il en résulte que les fonctions  $u$  qui sont des fonctions holomorphes du point  $M$  sur toute cette surface de Riemann sont en même temps des fonctions uniformes. Elles doivent donc se réduire à des constantes.

*Supposons maintenant que la courbe  $C$  présente des points singuliers, par exemple des points doubles, des points de rebroussement, etc.*

Nous ne pourrons plus dire que la fonction  $u_q$  est une fonction holomorphe du point  $M$  sur toute la surface de Riemann  $S$ ; elle pourra présenter des singularités quand le point  $M$  vient en un point singulier de  $C$ . Voyons quelle peut être la nature de ces singularités.

Soit donc  $O$  un point singulier de  $C$ ; le plan  $P$  coupera  $C$  en  $2p - 2$  points et quand la distance de ce plan  $P$  à  $O$  tendra vers zéro de la manière la plus générale,  $m$  de ces  $2p - 2$  points tendront vers  $O$ ; de sorte que  $O$  sera un point multiple d'ordre  $m$ .

Je suppose d'abord que  $m$  est au plus égal à  $p - 1$ .

Nous devons introduire ici la notion des intégrales de première espèce dégénérées.

Lorsqu'une courbe algébrique acquiert un point double de plus, son genre s'abaisse d'une unité; elle perd donc une intégrale abélienne de première espèce. Que devient à la limite cette intégrale de première espèce qui disparaît ainsi? Elle devient une intégrale de troisième espèce que j'appellerai *intégrale de première espèce dégénérée*.

Dans le cas d'un point double ordinaire, il arrive que le point double correspond à deux points de la surface de Riemann. L'intégrale dégénérée correspondante est alors l'intégrale de troisième espèce qui admet ces deux points comme points singuliers logarithmiques avec deux résidus égaux et de signe contraire.

En vertu du théorème d'Abel, si l'on coupe une courbe de l'espace à  $p - 1$  dimensions par un plan à  $p - 2$  dimensions, la somme des valeurs d'une intégrale de première espèce relatives aux différents points d'intersection sera une constante, par exemple zéro. Par raison de continuité, cela sera encore vrai pour une intégrale dégénérée.

Soit donc  $v$  une intégrale de première espèce ou une intégrale dégénérée relative à  $C$ , et  $v_i$  sa valeur en  $M_i$ ; on aura

$$v_1 + v_2 + \dots + v_{2p-2} = 0.$$

Regardons

$$du_{1,i}, \quad du_{2,i}, \quad \dots, \quad du_{p,i}, \quad dv_i$$

comme les coordonnées homogènes d'un point  $N_i$  dans l'espace à  $p$  dimensions.

Soit  $C'$  l'ensemble des courbes décrites par les points  $N_i$ ; la deuxième proposition restant vraie, cette courbe  $C'$  sera dans un espace plan à  $p - 1$  dimensions, c'est-à-dire que l'on aura

$$dv = \alpha_1 du_1 + \alpha_2 du_2 + \dots + \alpha_p du_p,$$

les  $\alpha$  étant des coefficients constants. On tire de là

$$du_q = dv \frac{\xi_q}{\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \dots + \alpha_p \xi_p},$$

ce qui montre que  $du_q$  est une différentielle abélienne.

Le raisonnement s'applique sans difficulté au cas où la courbe  $C$  est indécomposable, et où elle possède au moins une intégrale de première espèce ou une intégrale dégénérée.

Or, elle aura toujours au moins une intégrale de première espèce, à moins qu'elle ne soit unicursale.

D'autre part, si elle a un ou plusieurs points multiples, elle aura au moins une intégrale dégénérée. En un de ces points multiples viendront passer une ou plusieurs branches de courbe distinctes. Par exemple, en un point double à tangentes séparées passeront deux branches sans point singulier; en un point de rebroussement une seule branche avec un point singulier; en un point triple pourront passer ou bien trois branches sans point singulier, ou bien une branche sans point singulier et une autre à point de rebroussement, ou bien une branche unique avec un point singulier d'ordre plus élevé, etc.

Si l'une des branches de courbe présente ainsi un point singulier, l'intégrale de deuxième espèce qui admet ce point singulier comme pôle sera une intégrale dégénérée. Si aucune des branches n'admet de point singulier, il y aura au moins deux branches, et le point multiple correspondra au moins à deux points de la surface de Riemann (à autant de points de cette surface qu'il y a de branches distinctes). Alors, l'intégrale de troisième espèce qui admet ces deux points comme points logarithmiques avec des résidus égaux et de signe contraire est une intégrale dégénérée.

Si la courbe  $C$  était indécomposable, le raisonnement ne serait donc en défaut que si elle était unicursale et dépourvue de points multiples.

Mais ce cas, comme nous l'avons remarqué plus haut, doit être exclu, car, en l'absence de point multiple et d'après la première proposition, les fonctions  $u$  sont holomorphes sur toute la surface de Riemann et, si la courbe est unicursale, elles sont uniformes et, par conséquent, se réduisent à des constantes.

Il en serait encore de même si la courbe  $C$  était décomposable et qu'une des composantes, que j'appellerai  $K$ , soit unicursale, sans point multiple et ne coupant aucune des autres composantes. En effet, les fonctions  $u$  ne peuvent avoir d'autres points singuliers que les points multiples des diverses composantes et leurs points d'intersection; comme la courbe  $K$  ne passe par aucun de

ces points, les fonctions  $u$  seront holomorphes sur toute la surface de Riemann  $\Sigma$  relative à  $K$ ; comme  $K$  est unicursale, cette surface  $\Sigma$  n'aura pas de cycle et, par conséquent, les fonctions  $u$  seront uniformes; elles se réduisent donc à des constantes sur toute la surface  $\Sigma$ .

Si alors nous reprenons les relations

$$u_{q,1} + u_{q,2} + \dots + u_{q,2p-2} = 0,$$

un certain nombre des quantités  $u_{q,i}$  (à savoir celles qui correspondent aux points  $M_i$  qui sont sur la composante  $K$ ) se réduisent à des constantes que l'on peut supposer nulles sans restreindre la généralité. Alors la variété  $V$  aurait moins de  $p - 1$  dimensions, de sorte que ce cas doit être encore exclu.

Supposons donc que  $C$  se décompose et qu'une des composantes  $K$  soit de genre supérieur à zéro, on ait un point multiple. Cette composante admettra une intégrale de première espèce ou une intégrale dégénérée. Appelons  $v$  cette intégrale. Sur les autres composantes nous supposons  $v = 0$ . Si la composante  $K$  rencontre une autre des composantes, il arrivera ainsi généralement que  $v$  n'aura pas la même valeur sur les deux branches de courbe qui passeront au point d'intersection, mais cela n'a aucun inconvénient.

Si les  $du_{q,i}$  et  $v_i$  sont encore les coordonnées homogènes du point  $N_i$ , on verra encore que la courbe  $C'$  est dans un espace plan à  $p - 1$  dimensions; d'où il résulte :

- 1° Que les composantes de  $C$  autres que  $K$  sont dans des plans à moins de  $p - 1$  dimensions;
- 2° Que sur les composantes  $K$ , on a

$$dv = \alpha_1 du_1 + \alpha_2 du_2 + \dots + \alpha_p du_p,$$

d'où l'on déduit, comme plus haut, que, sur cette composante  $K$ , les  $du$  sont des différentielles abéliennes.

Si donc toutes les composantes sont de genre supérieur à zéro ou ont un point multiple, il n'y a pas de difficulté.

Supposons donc qu'une composante  $K$  soit unicursale et sans point multiple. Elle devra avoir au moins un point commun avec une des autres composantes, le cas où elle ne coupe aucune de ces

composantes (tout en étant unicursale et sans point multiple) ayant été exclu plus haut.

Supposons d'abord que  $K$  coupe une autre composante  $K'$  en deux points  $Q$  et  $Q'$ .

Définissons une fonction  $v$  de la façon suivante : Sur  $K$ ,  $v$  sera l'intégrale de troisième espèce qui admet  $Q$  et  $Q'$  comme points logarithmiques avec les résidus  $+1$  et  $-1$ ; sur  $K'$ ,  $v$  sera l'intégrale de troisième espèce qui admet  $Q$  et  $Q'$  comme points logarithmiques avec les résidus  $-1$  et  $+1$ ; sur les autres composantes,  $v$  sera nulle.

Dans ces conditions, on aura encore

$$\sum v_i = 0,$$

en appelant  $v_i$  la valeur de  $v$  au point  $M_i$ .

Si donc  $du_{q,i}$  et  $dv_i$  sont les coordonnées homogènes de  $N_i$ , la courbe  $C'$  sera dans un espace plan à  $p - 1$  dimensions, d'où il résulte que, sur les composantes  $K$  et  $K'$ , on a encore

$$dv = \sum a_q du_q,$$

et que, sur ces deux composantes, les  $du$  sont des différentielles abéliennes.

Le résultat s'étend au cas où les deux composantes  $K$  et  $K'$  se touchent en un point  $Q$ , c'est-à-dire où les deux points  $Q$  et  $Q'$  se confondent; l'intégrale de troisième espèce  $v$  se réduit alors à une intégrale de deuxième espèce.

Considérons maintenant un autre cas : je suppose que, parmi les composantes de  $C$ , il y en ait  $m$  que j'appellerai

$$K_1, K_2, \dots, K_m,$$

et qui se coupent mutuellement de telle sorte que  $K_1$  coupe  $K_2$  en  $Q_1$ , que  $K_2$  coupe  $K_3$  en  $Q_2$ , ..., que  $K_{m-1}$  coupe  $K_m$  en  $Q_m$ , et enfin que  $K_m$  coupe  $K_1$  en  $Q_m$ .

Pour plus de symétrie dans les notations, je désignerai indifféremment  $K_1$  par  $K_1$  ou par  $K_{m+1}$  et de même  $Q_1$  par  $Q_1$  ou  $Q_{m+1}$ ,  $K_m$  par  $K_m$  ou  $K_0$ ,  $Q_m$  par  $Q_m$  ou  $Q_0$ .

Alors  $K_i$  coupe  $K_{i+1}$  en  $Q_i$  et  $K_{i-1}$  en  $Q_{i-1}$ .

Je dirai alors que ces composantes forment une chaîne fermée.

Je définirai alors la fonction  $\nu$  comme il suit : Sur  $K_i$ , ce sera l'intégrale de troisième espèce qui admet  $Q_i$  et  $Q_{i-1}$  comme points logarithmiques avec les résidus  $+1$  et  $-1$ ; sur les composantes étrangères à la chaîne,  $\nu$  sera nul.

On a alors  $\sum \nu_i = 0$  et, toujours par le même raisonnement, on verrait que sur les composantes de la chaîne les  $du$  sont des différentielles abéliennes.

Nous avons laissé de côté un certain nombre de cas d'exception qui pourraient sans doute être traités par des principes analogues.

J'examinerai encore un cas dont la généralité est très grande.

*La courbe C, décomposable ou non, n'admet aucun point multiple d'ordre supérieur à  $p - 1$ .*

Je commencerai par établir le point suivant :

Soient  $F = 0$ ,  $F_1 = 0$  les équations de deux variétés algébriques de même degré à  $p - 2$  dimensions et situées dans l'espace à  $p - 1$  dimensions. L'équation

$$F + \lambda F_1 = 0$$

sera l'équation générale du faisceau déterminé par ces deux variétés.

Une variété quelconque du faisceau coupera C en  $\mu$  points que j'appellerai

$$M_1, M_2, \dots, M_\mu.$$

Soient

$$u_{i,1}, u_{i,2}, \dots, u_{i,\mu}$$

les valeurs correspondantes de la fonction  $u_i$ . Soient

$$M'_1, M'_2, \dots, M'_\mu$$

les  $\mu$  points d'intersection de C avec une variété du faisceau infiniment voisine de la première. Ces  $\mu$  points seront évidemment infiniment voisins de  $M_1, M_2, \dots, M_\mu$ .

Soit  $du_{i,k}$  l'accroissement que subit  $u_{i,k}$  quand on passe de  $M_k$  à  $M'_k$ .

Je dis que l'on a

$$du_{i,1} + du_{i,2} + \dots + du_{i,\mu} = 0.$$

C'est le théorème d'Abel. Nous aurons ainsi montré que nos fonctions  $u_i$  satisfont au théorème d'Abel comme les intégrales abéliennes de première espèce.

En effet, les fonctions  $u_{i,k}$  et  $\frac{du_{i,k}}{d\lambda}$  sont des fonctions holomorphes de  $\lambda$  (ou de  $\frac{1}{\lambda}$  pour  $\lambda = \infty$ ) à part les exceptions suivantes :

1° Quand la variété  $F + \lambda F_1 = 0$  est tangente à  $C$  et que, par conséquent, plusieurs des points  $M_k$  s'échangent entre eux. (Soient, par exemple, pour fixer les idées, les trois points  $M_1, M_2, M_3$ ; mais alors la somme

$$\frac{du_{i,1}}{d\lambda} + \frac{du_{i,2}}{d\lambda} + \frac{du_{i,3}}{d\lambda}$$

est fonction holomorphe de  $\lambda$ .)

2° Quand la variété  $F + \lambda F_1 = 0$  va passer par un point multiple ou singulier de la courbe  $C$ .

Nous avons vu, en effet, que les fonctions  $u_i$  sont des fonctions holomorphes du point  $M$ , sauf quand ce point  $M$  vient en un des points multiples de  $C$ .

Si donc nous posons

$$du_{i,1} + du_{i,2} + \dots + du_{i,\mu} = \varphi(\lambda) d\lambda,$$

$\varphi(\lambda)$  est holomorphe (de même que  $\int \varphi(\lambda) d\lambda$ ), sauf pour les valeurs de  $\lambda$  telles que  $F + \lambda F_1 = 0$  aille passer par un point multiple.

Supposons donc que pour  $\lambda = \lambda_0$ ,  $q$  des points  $M_k$ , à savoir les points  $M_1, M_2, \dots, M_q$  aillent se confondre ensemble et avec un point multiple  $A$  d'ordre  $q$ ; les points  $M_{q+1}, \dots, M_\mu$  restant distincts entre eux du point  $A$  et de tous les autres points singuliers.

Posons

$$\begin{aligned} du_{i,1} + du_{i,2} + \dots + du_{i,q} &= \varphi_1(\lambda) d\lambda, \\ du_{i,q+1} + du_{i,q+2} + \dots + du_{i,\mu} &= \varphi_2(\lambda) d\lambda, \\ \varphi(\lambda) &= \varphi_1(\lambda) + \varphi_2(\lambda). \end{aligned}$$

Il est clair que  $\int \varphi_2(\lambda) d\lambda$  est encore holomorphe pour  $\lambda = \lambda_0$ , puisque les points  $M_{q+1}, \dots, M_\mu$  restent ordinaires et que, par

conséquent, les fonctions  $u_{i,q+1}, \dots, u_{i,\mu}$  restent holomorphes.

Puisque  $q$  a été supposé toujours plus petit que  $p$ , par les points  $M_1, M_2, \dots, M_q$ , je puis faire passer un plan que j'appelle  $P$ ; pour  $\lambda = \lambda_0$ , ce plan vient en  $P_0$ . Soient  $M'_1, M'_2, \dots, M'_{2p-2-q}$  les  $2p - 2 - q$  autres points d'intersection de  $P$  avec  $C$ . Nous supposerons que ces points restent ordinaires pour  $\lambda = \lambda_0$ . C'est-à-dire que  $P_0$  ne passe par aucun point multiple que  $A$ ; qu'il ne touche pas  $C$  en dehors de  $A$ ; qu'il ne touche aucune des branches de courbe qui passent par  $A$ . Soit  $u'_{i,k}$  la valeur de la fonction  $u_i$  au point  $M'_k$ . On aura

$$du_{i,1} + du_{i,2} + \dots + du_{i,q} + du'_{i,1} + \dots + du'_{i,2p-2-q} = 0,$$

ce qui est la définition des fonctions  $u_i$ ; si donc on pose

$$du'_{i,1} + du'_{i,2} + \dots + du'_{i,2p-2-q} = \varphi'(\lambda) d\lambda,$$

il viendra

$$\varphi'(\lambda) = -\varphi_1(\lambda).$$

Comme les points  $M'_k$  restent ordinaires pour  $\lambda = \lambda_0$ , les fonctions  $u'_{i,k}$  restent holomorphes et il en est de même de  $\int \varphi'(\lambda) d\lambda$ , de  $\int \varphi_1(\lambda) d\lambda$  et, par conséquent, de  $\int \varphi(\lambda) d\lambda$ . Donc la fonction  $\int \varphi(\lambda) d\lambda$ , holomorphe pour toutes les valeurs de  $\lambda$  (même pour  $\lambda = \infty$ ), se réduit à une constante. C. Q. F. D.

Il semble d'abord que nous nous sommes imposé de nombreuses conditions restrictives, au sujet de la variété  $F + \lambda_0 F_1 = 0$  et du plan  $P_0$  qui ne doivent pas passer par d'autres points singuliers que  $A$ , ni toucher  $C$  en dehors de  $A$ , ni toucher une des branches de courbe qui passent en  $A$ .

Mais comme ces circonstances ne se présentent pas quand les polynômes  $F$  et  $F_1$  seront les plus généraux de leur degré, il est possible d'étendre le théorème à tous les cas par passage à la limite.

Or nous savons que si une courbe, décomposable ou non, est coupée en  $\mu$  points par une variété  $F = 0$ , il y aura entre ces  $\mu$  points  $h$  relations si notre courbe admet  $h$  intégrales abéliennes de première espèce et dégénérées.

Si  $v_1, v_2, \dots, v_h$  sont ces intégrales et  $v_{i,h}$  la valeur de  $v_i$  au point  $M_h$ , ces  $h$  relations s'écriront

$$v_{i,1} + v_{i,2} + \dots + v_{i,\mu} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, h)$$

et il n'y en aura pas d'autres si le degré de  $F$  est suffisant.

Il résulte de là que les  $u_i$  ne peuvent être que des combinaisons linéaires des  $v_i$  et que  $p$  est au plus égal à  $h$ .

D'ailleurs, le même raisonnement que plus haut (deuxième et troisième propositions) montrerait que  $p$  est au moins égal à  $h$ .

On a donc  $p = h$ , ce qui suffit pour établir le théorème proposé.

---