BULLETIN DE LA S. M. F.

N. SALTYKOW

Sur les intégrales des équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction

Bulletin de la S. M. F., tome 29 (1901), p. 86-95

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1901__29__86_1>

SUR LES INTÉGRALES DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE D'UNE SEULE FONCTION;

Par M. N. Saltykow.

Il s'agit, dans le Mémoire qui va suivre, de démontrer un théorème que j'ai énoncé dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (¹) et d'en donner une extension aux systèmes en involution les plus généraux.

Nous allons étudier les équations en involution

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{c} F_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0, \\ k = 1, 2, \ldots, m, \end{array} \right.$$

en désignant par p_s la dérivée $\frac{\partial z}{\partial x_s}$ et en supposant

$$(2) \qquad \Delta = D\left(\frac{F_1, F_2, \ldots, F_m}{p_1, p_2, \ldots, p_m}\right) \gtrless 0.$$

Considérons le système correspondant d'équations linéaires aux dérivées partielles d'une seule fonction f

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{c} [F_k, f] = 0, \\ k = 1, 2, \ldots, m, \end{array} \right.$$

les crochets ayant la signification bien connue de M. Mayer.

(¹) *Comptes rendus*, 24 juillet 1899.

Supposons encore connues toutes les intégrales distinctes du système (3), en les représentant par les fonctions

$$(4) \qquad F_1, F_2 \ldots, F_m, f_1, f_2, \ldots, f_{2n-2m+1}.$$

Le problème que nous nous proposons de résoudre, c'est de *former, à l'aide des fonctions* (4), *des intégrales du système* (1), *dans le sens classique de cette notion, c'est-à-dire de trouver des valeurs*

$$z, p_1, p_2, \ldots, p_n,$$

en fonction des variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *vérifiant les identités*

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = p_1, \quad \frac{\partial z}{\partial x_2} = p_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial z}{\partial x_n} = p_n$$

et identifiant les équations (1).

Comme on le sait bien, ce problème fut déjà traité par MM. Mayer et Morera (1), pour les équations résolues par rapport aux dérivées partielles et ne contenant pas z explicitement, par des méthodes basées, soit sur la réduction des systèmes en involution à une équation unique, soit sur la théorie du problème de Pfaff. La question est aussi étudiée par cette dernière méthode dans le Traité récemment publié par M. Weber (2). Or dans les pages suivantes je poursuivrai toujours l'ordre d'idées développé dans mon Travail : *Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, inséré dans le *Journal de M. Jordan* (3).

Égalons les m premières fonctions (4) à zéro et toutes les autres respectivement à des constantes arbitraires $C_1, C_2, \ldots, C_{2n-2m+1}$. En vertu de l'hypothèse (2), les équations obtenues sont résolubles par rapport aux variables $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$,

(1) *Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts Universität*, Göttingen, p. 299; 1873.

Mathematische Annalen, Bd VI, p. 192; 1873.

Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, *Rendiconti*, 2e série, vol. XVI, p. 637, 691; 1883.

(2) *Vorlesungen über das Pfaff'sche Problem und die Theorie der partiellen Diffentialgleichungen erster Ordnung*, 1900.

(3) *Journal de Mathématiques*, 5e série, t. V, p. 435; 1899.

$z, p_1, p_2, \ldots, p_n$ et nous en tirons

$$(5)\quad \begin{cases} z = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_m, C_1, C_2, \ldots, C_{2n-2m+1}), \\ p_s = \psi_s(x_1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, C_{2n+2m+1}), \\ x_{m+i} = \theta_i(x_1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, C_{2n-2m+1}), \\ s = 1, 2, \ldots, n, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-m. \end{cases}$$

Formons ensuite le système aux différentielles totales admettant les équations (5) comme solution. Désignons par

$$\Delta_k, \quad \Delta_{k\nu}, \quad \Delta_k^i$$

ce que devient le déterminant fonctionnel

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial p_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial p_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial p_m} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial p_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial p_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_2}{\partial p_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial p_1} & \dfrac{\partial F_m}{\partial p_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial p_m} \end{vmatrix}$$

lorsqu'on y remplace les éléments de la $k^{\text{ième}}$ colonne par les dérivées correspondantes des fonctions $F_1, F_2, \ldots, F_m$ prises par rapport aux variables

$$z, \quad p_{m+\nu}, \quad x_i.$$

En résolvant les équations (3) par rapport aux dérivées

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad \ldots \quad \frac{\partial f}{\partial x_m},$$

on obtient un système jacobien. Les équations aux différentielles totales qui lui correspondent sont précisément celles que nous cherchons :

$$(6)\quad \begin{cases} dx_{m+\nu} = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{\Delta_{k\nu}}{\Delta}\, dx_k, \\ dp_i = -\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{\Delta_k^i + \Delta_k p_i}{\Delta}\, dx_k, \\ dz = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \left(p_k + \sum_{\nu=1}^{n-m} \frac{\Delta_{k\nu}}{\Delta} p_{m+\nu} \right) dx_k, \\ \nu = 1, 2, \ldots, n-m, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Comme les équations (5) identifient ce système (6), nous tirons de la dernière identité, en vertu des $n - m$ premières, une identité nouvelle

$$dz = \sum_{k=1}^{m} p_k dx_k + \sum_{\nu=1}^{n-m} p_{m+\nu} dx_{m+\nu}.$$

Il en résulte la conséquence importante que, si l'on parvient à obtenir des équations (5) les valeurs z, $p_{m+\nu}$ satisfaisant aux conditions

$$\frac{\partial z}{\partial x_{m+\nu}} = p_{m+\nu}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n - m, \tag{7}$$

on a de même les identités

$$\frac{\partial z}{\partial x_k} = p_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, m,$$

car les variables x_1, x_2, ..., x_m sont indépendantes.

Cela étant, pour résoudre le problème posé nous nous appuierons sur les résultats établis dans mon Mémoire cité. Nous y avons démontré que, pour satisfaire aux égalités (7), il faut et il suffit d'éliminer $n - m$ constantes arbitraires de la première équation (5), en vertu des $n - m$ dernières, de telle manière que les fonctions

$$U_c = \frac{\partial z}{\partial C} = - \sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i} \frac{\partial x_{m+i}}{\partial C}$$

correspondant aux constantes éliminées soient identiquement nulles. Si, de plus, les fonctions U_c correspondant à toutes les autres constantes C ne s'annulent point, alors la solution obtenue est une intégrale complète du système (1).

On est ainsi ramené à l'étude des fonctions U, C_c désignant une constante quelconque parmi C_1, C_2, ..., $C_{2n-2m+1}$. Il va sans dire que, dans certains cas, la forme spéciale des équations (5) nous indique elle-même et immédiatement la marche des éliminations à faire pour calculer une des intégrales en question. Or nous sommes en état d'établir, comme dans le cas particulier étudié dans mon Mémoire mentionné, d'une manière analogue, un théorème démontrant l'existence d'une série de constantes arbitraires dont l'élimination donne toujours le résultat requis.

Dans ce but nous allons calculer les valeurs des dérivées de la fonction U_c par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Il est aisé de mettre ces dérivées sous la forme suivante

$$\frac{\partial U_c}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial C}\left(\frac{\partial z}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\frac{\partial x_{m+i}}{\partial C}\right) + \sum_{i=1}^{n-m}\left(\frac{\partial p_{m+i}}{\partial C}\frac{\partial x_{m+i}}{\partial x_k} - \frac{\partial p_{m+i}}{\partial x_k}\frac{\partial x_{m+i}}{\partial C}\right).$$

Désignons par M_k^h le mineur du déterminant Δ correspondant, au signe près, à son élément $\frac{\partial F_h}{\partial p_k}$, de sorte que l'on a

$$\Delta = \sum_{h=1}^{m} M_k^h \frac{\partial F_h}{\partial p_k}, \qquad \Delta_k = \sum_{h=1}^{m} M_k^h \frac{\partial F_h}{\partial z},$$

$$\Delta_{k\nu} = \sum_{h=1}^{m} M_k^h \frac{\partial F_h}{\partial p_{m+\nu}}, \qquad \Delta_k^i = \sum_{h=1}^{m} M_k^h \frac{\partial F_h}{\partial x_i}.$$

Par conséquent en substituant les valeurs des dérivées

$$\frac{\partial z}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial x_{m+i}}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial p_{m+i}}{\partial x_k}$$

résultant des identités (6), nous avons

$$\frac{\partial U_C}{\partial x_k} = \frac{\partial p_k}{\partial C} + \frac{1}{\Delta}\sum_{h=1}^{m} M_k^h \sum_{i=1}^{n-m}\left(\frac{\partial F_h}{\partial p_{m+i}}\frac{\partial p_{m+i}}{\partial C} + \frac{\partial F_h}{\partial x_{m+i}}\frac{\partial x_{m+i}}{\partial C}\right) + \frac{\Delta_k}{\Delta}\sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\frac{\partial x_{m+i}}{\partial C}.$$

Mais comme les équations (1) sont identifiées par les valeurs (5), on a encore des identités

$$\sum_{i=1}^{n-m}\left(\frac{\partial F_h}{\partial x_{m+i}}\frac{\partial x_{m+i}}{\partial C} + \frac{\partial F_h}{\partial p_{m+i}}\frac{\partial p_{m+i}}{\partial C}\right) + \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial F_h}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial C} + \frac{\partial F_h}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial C} = 0,$$

pour tous les indices h de 1 à m et pour chacune des constantes C. Il s'ensuit donc

$$\frac{\partial U_c}{\partial x_k} = - U_c \frac{\Delta_k}{\Delta}.$$

Moyennant les conditions d'involution du système (1), on démontre aisément que l'expression

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\Delta_k}{\Delta}\, dx_k$$

devient une différentielle exacte, en vertu des équations (5). En nommant cette différentielle dV, on obtient par une quadrature la formule suivante

$$\text{(8)} \qquad U_c = U_c^0\, e^{-\int_{V_0}^{V} dV},$$

U_c^0, V_0 désignant les valeurs initiales des fonctions U_c, V.

La démonstration mentionnée étant un peu longue, on pourrait transformer le problème étudié dans un autre équivalent. En effet, par l'introduction, au lieu de z, d'une nouvelle fonction w définie par l'égalité

$$w(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = 0,$$

les équations transformées ne dépendent plus explicitement de la fonction w elle-même. Il est à remarquer de plus qu'en substituant dans les équations en involution (1) les valeurs

$$p_s = -\frac{q_s}{q},$$

q_s désignant $\frac{\partial w}{\partial x_s}$ et q la dérivée $\frac{\partial w}{\partial z}$, les équations obtenues restent encore en involution, car on a

$$(F'_k, F'_h) = -\frac{1}{q}\,[F_k, F_h]',$$

les expressions accentuées représentant les résultats de notre substitution effectuée sur les fonctions correspondantes privées d'accent. Nous n'étudierons que des fonctions w, dont la dérivée q admet une valeur finie, distincte de zéro. Dans ces cas, les conditions d'involution du système (1) entraînent comme conséquence immédiate l'involution du système transformé. La généralité de notre problème ne serait donc pas restreinte, si nous admettions dès à présent que les équations étudiées ne contiennent plus la fonction inconnue explicitement. Or, dans ce cas, les coefficients du système (6) ne contenant plus z, ses $2n - m$ premières équations forment un nouveau système aux différentielles totales, indépendamment de la dernière équation (6). Quant à celle-là, son intégrale s'obtient par une quadrature, dès que les $2n - m$ premières équations (6) sont intégrées, comme c'est aussi indiqué dans ma Note citée des *Comptes rendus*. Ce point de vue admis, les dérivées $\frac{\partial U_c}{\partial x_k}$ sont identiquement nulles, et il viendra la formule

$$U_c = U_c^0$$

que l'on pourrait aussi déduire de la formule (8), en y posant la différentielle dV égale à zéro.

Pour fixer les idées, nous bornerons nos considérations à un domaine où les fonctions $F_1, F_2, \ldots, F_m$ sont holomorphes relativement à toutes les variables x, z et p, envisagées comme indépendantes. Dans ces conditions, quelles que soient les équations (1), qu'elles renferment la fonction z explicitement ou non, les fonctions U_c s'annulent ou bien diffèrent de zéro en même temps que leurs valeurs initiales U_c^0. Notre problème revient donc à examiner ces dernières quantités.

Introduisons comme constantes arbitraires les valeurs initiales a_i, b_i, b des variables correspondantes

$$x_{m+i}, \quad p_{m+i}, \quad z - \sum_{\nu=1}^{n-m} x_{m+\nu} p_{m+\nu},$$

en présentant les équations (5) sous la forme nouvelle

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} z &= \varphi\,(x_1, x_2, \ldots, x_m, a_1, a_2, \ldots, a_{n-m}, b, b_1, b_2, \ldots, b_{n-m}), \\ p_s &= \varphi_s\,(x_1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, b_{n-m}), \\ x_{m+i} &= \omega_i(x_1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, b_{n-m}), \\ & s = 1, 2, \ldots, n, \qquad i = 1, 2, \ldots, n - m. \end{aligned} \right.$$

Évidemment les $n - m$ dernières équations sont résolubles par rapport à $a_1, a_2, \ldots, a_{n-m}$, et l'on a les identités suivantes :

$$U_{a_i}^0 = 0, \qquad U_{b_i}^0 = a_i, \qquad U_b^0 = 1.$$

Par conséquent le résultat de l'élimination des constantes a_i de la première équation (9), en vertu des $n-m$ dernières, est une intégrale complète du système (1).

Supposons que nous ayons les équations (9) dans l'hypothèse

$$b = z^0.$$

Si, dans ce cas, les $n-m$ dernières équations (9) étaient résolubles par rapport à $b_1, b_2, \ldots, b_{n-m}$, alors leur élimination de la première équation fournirait de même une des intégrales complètes en question.

Enfin, soit

$$b = z^0 - \sum_i a_i b_i,$$

la somme étant étendue aux indices i des valeurs b_i par rapport auxquelles les $n-m$ dernières équations (9) sont résolubles. On trouve encore une des intégrales requises dans ce cas, en éliminant de la première équation (9) les valeurs indiquées b_i et les a_μ, correspondant à $\mu \gtrless i$, définies par les $n-m$ dernières équations (9).

Nous retrouvons ainsi les intégrales complètes du système (1). Pour établir cette méthode nous avons considéré une certaine solution particulière (5) ou (9) du système (6). Nous pourrions particulariser encore davantage le caractère de cette intégrale, afin d'en tirer des solutions du système (1) satisfaisant aux conditions spéciales.

Prenons, par exemple, l'intégrale (5) sous la forme suivante :

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} z &= \varphi\,(x_1, x_2, \ldots, x_m, x^0_{m+1}, \ldots, x^0_n, z^0, p^0_{m+1}, \ldots, p^0_n),\\ p_s &= \varphi_s(x_1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, p^0_n),\\ x_{m+i} &= \omega_i(x_1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, p^0_n),\\ s &= 1, 2, \ldots, n, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-m, \end{aligned}\right.$$

et supposons de plus les constantes arbitraires liées par $n-m+1$ relations

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &z^0 = \Theta_0, \qquad p^0_{m+i} = \frac{\partial\Theta_0}{\partial x^0_{m+i}},\\ &i = 1, 2, \ldots, n-m, \end{aligned}\right.$$

en désignant par Θ_0 l'expression de la fonction $\Theta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pour les valeurs initiales $x^0_1, x^0_2, \ldots, x^0_n$ de ses variables. D'ailleurs il va sans dire que la fonction Θ doit jouir de la propriété de représenter par les formules (11) les valeurs z^0, p^0_{m+i} appartenant au domaine considéré. Les équations (10) et (11) nous donnent

$$(12)\quad \left\{\begin{array}{l} z = \varphi'(x_1, x_2, \ldots, x_m, x^0_{m+1}, x^0_{m+2}, \ldots, x^0_n), \\ p_s = \varphi'_s(x_1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, x^0_n), \\ x_{m+i} = \omega'_i(x_1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, x^0_n), \\ \quad s = 1, 2, \ldots, n, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-m, \end{array}\right.$$

par l'élimination des z^0, p^0_{m+i}. Évidemment les $n-m$ dernières équations sont résolubles par rapport à x^0_{m+1}, x^0_{m+2}, ..., x^0_n, car les fonctions ω_i deviennent identiques à x^0_{m+i} pour les valeurs initiales x^0_1, x^0_2, ..., x^0_m, les quantités x^0_{m+i}, z^0, p^0_{m+i} étant prises arbitrairement dans le domaine considéré. Par conséquent, le déterminant fonctionnel

$$D\left(\frac{\omega'_1, \omega'_2, \ldots, \omega'_{n-m}}{x^0_{m+1}, x^0_{m+2}, \ldots, x^0_n}\right)$$

devient égal à 1 pour les valeurs initiales x^0_1, x^0_2, ..., x^0_m. Enfin, toutes les fonctions

$$U_{x^0_{m+i}}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-m$$

sont identiques à zéro, en vertu des relations (11). Donc en éliminant x^0_{m+1}, x^0_{m+2}, ..., x^0_n de la première équation (12), en vertu des $n-m$ dernières, on obtient une solution des équations (1).

C'est une *intégrale de Cauchy*. En effet, désignant par

$$\theta(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n)$$

ce que devient la fonction Θ, quand on y substitue les valeurs initiales x^0_1, x^0_2, ..., x^0_m, il est alors évident que, pour ces dernières valeurs, l'intégrale obtenue z, ainsi que ses dérivées $\frac{\partial z}{\partial x_{m+1}}$, $\frac{\partial z}{\partial x_{m+2}}$, ..., $\frac{\partial z}{\partial x_n}$, deviennent relativement égales à

$$\theta(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n)$$

et à ses dérivées premières par rapport à x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n.

On pourrait insister sur les formules (10), en leur joignant des conditions complémentaires pour généraliser, sur le cas qui nous occupe, les considérations de Cauchy ([1]), en évitant cependant les objections auxquelles est sujette sa méthode, objections qui ont conduit à l'introduction des notions de S. Lie sur les intégrales des équations aux dérivées partielles. Or toutes les solutions que l'on pourrait en avoir s'obtiennent aussi en partant d'une intégrale complète. Cette assertion pourrait être évidemment admise, *a priori,* d'après ce qui vient d'être dit, mais il est aussi aisé de la démontrer rigoureusement, comme l'avait fait Jacobi ([2]) pour une équation unique.

([1]) *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique,* t. II, p. 238; 1841

([2]) *Gesammelte Werke,* Bd V, S. 397, n° 4.