BULLETIN DE LA S. M. F.

E. CARTAN

# Sur quelques quadratures dont l'élément différentiel contient des fonctions arbitraires

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 29 (1901), p. 118-130
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1901__29__118_1>

## SUR QUELQUES QUADRATURES DONT L'ÉLÉMENT DIFFÉRENTIEL CONTIENT DES FONCTIONS ARBITRAIRES;

Par M. E. Cartan.

Dans une Note récente, M. Beudon [1] a étudié certaines quadratures dont l'élément différentiel contient des fonctions arbitraires d'un argument. Il s'est occupé notamment de la quadrature

$$\text{(1)} \qquad J = \int [M(x, y, y')y'' - N(x, y, y')]\, dx,$$

où $y$ désigne une fonction arbitraire de $x$; le problème dont il s'agit est, en somme, d'exprimer, *sans aucun signe de quadrature*, $x$, $y$ et J en fonction d'un argument, ces expressions dépendant naturellement d'une fonction arbitraire et de ses dérivées. Ce problème rentre dans le suivant :

---

[1] *Sur les changements de variables* (*Bulletin de la Société mathématique,* t. XXVIII, p. 107-116).

Cette Note était rédigée avant la mort si douloureuse et si imprévue de ce jeune mathématicien, dont les lecteurs de ce *Bulletin* connaissent les si intéressants travaux sur les équations aux dérivées partielles, les caractéristiques, etc.

*Résoudre, de la manière la plus générale, l'équation*

$$\frac{dz}{dx} = A\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}\right) \frac{d^2y}{dx^2} + B\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}\right), \tag{2}$$

*où $y$ et $z$ sont des fonctions de $x$.*

Dans le cas particulier où la fonction A est nulle, on a l'équation de Monge.

Ce problème est équivalent au suivant :

*Intégrer le système d'équations de Pfaff*

$$\left\{\begin{array}{l} dy - y'\,dx = 0, \\ dz - A\,dy' - B\,dx = 0, \end{array}\right. \tag{3}$$

*c'est-à-dire exprimer de la manière la plus générale $x, y, y', z$ en fonction d'un argument, ces fonctions satisfaisant identiquement aux équations* (3).

Enfin, ce dernier problème est un cas particulier de l'intégration d'un système quelconque de deux équations de Pfaff à quatre variables $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$,

$$\left\{\begin{array}{l} \omega \equiv a_1\,dx_1 + a_2\,dx_2 + a_3\,dx_3 + a_4\,dx_4 = 0, \\ \varpi \equiv b_1\,dx_1 + b_2\,dx_2 + b_3\,dx_3 + b_4\,dx_4 = 0. \end{array}\right. \tag{4}$$

C'est aussi à ce problème général que se ramène l'exemple traité par M. Beudon et qui est, en somme, l'intégration du système

$$\left\{\begin{array}{l} dX = \dfrac{du}{1 + uu_1}, \\ dY = \dfrac{du_1}{1 + uu_1}. \end{array}\right. \tag{5}$$

Le problème général de l'intégration du système (4) a été résolu pour la première fois par M. Engel ([1]) qui, par des calculs un peu compliqués, a montré qu'en général on pouvait, par un changement de variables, ramener le système (4) à la forme

$$\left\{\begin{array}{l} dy_2 - y_3\,dy_1 = 0, \\ dy_3 - y_4\,dy_1 = 0; \end{array}\right. \tag{6}$$

---

([1]) ENGEL, *Zur Invariantentheorie der Systeme Pfaff'scher Gleichungen* (*Leipz. Ber.*, t. XLI, p. 157-176).

et, sous cette forme, la solution générale est évidente. Elle est fournie par les formules

$$(7)\qquad \begin{cases} y_2 = f(y_1), \\ y_3 = f'(y_1), \\ y_4 = f''(y_1), \end{cases}$$

exception faite pour la solution suivante, dépendant de trois paramètres arbitraires,

$$(8)\qquad y_1 = C_1, \qquad y_2 = C_2, \qquad y_3 = C_3.$$

Ces résultats ont été démontrés depuis au moyen de considérations géométriques par S. Lie (¹), et M. von Weber (²) les a déduits de résultats plus généraux dont le point de départ se trouve d'ailleurs dans le Mémoire de M. Engel.

Je me propose, dans cette Note, d'indiquer rapidement et sans faire appel à des considérations étrangères au sujet, une méthode qui permette de réduire le système (4) à sa forme canonique (6), sans préjudice des cas singuliers qui peuvent se présenter. Je montrerai ensuite comment cette méthode s'applique à l'équation de Monge et aux autres exemples traités par M. Beudon.

## I.

Je prendrai pour point de départ la considération des covariants bilinéaires des deux expressions de Pfaff $\omega$ et $\varpi$; je les désignerai par $\omega'$ et $\varpi'$ :

$$(9)\qquad \begin{cases} \omega' \equiv \sum a_{ik}(dx_i\,\delta x_k - dx_k\,\delta x_i) \\ \varpi' \equiv \sum b_{ik}(dx_i\,\delta x_k - dx_k\,\delta x_i) \end{cases} \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4),$$

en posant

$$(10)\qquad \begin{cases} a_{ik} = -a_{ki} = \dfrac{\partial a_i}{\partial x_k} - \dfrac{\partial a_k}{\partial x_i}, \\ b_{ik} = -b_{ki} = \dfrac{\partial b_i}{\partial x_k} - \dfrac{\partial b_k}{\partial x_i}. \end{cases}$$

---

(¹) S. Lie, *Ueber Berührungstransformationen und Differentialgleichungen* (*Leipz. Ber.*, p. 113-180; 1898).

(²) E. von Weber, *Zur Invariantentheorie der Systeme Pfaff'scher Gleichungen* (*Leipz. Ber.*, p. 207-229; 1898).

Les propriétés d'invariance de ces covariants étant bien connues, je ne m'arrêterai pas à les démontrer. Un calcul facile montre, de plus, qu'en désignant par $u$ et $v$ deux fonctions arbitraires des $x$, et *en tenant compte des équations* (4) *et des équations* (4′) *qui s'en déduisent par le changement du symbole d dans le symbole* $\delta$ *et qu'il est inutile d'écrire, le covariant bilinéaire de* $u\omega + v\varpi$ *n'est autre que* $u\omega' + v\varpi'$.

D'après cela, il est toujours possible de déterminer le rapport $\frac{v}{u}$ par la condition que $u\omega' + v\varpi'$ soit identiquement nul en tenant compte de (4) et (4′); car, si l'on imagine par exemple les équations (4) résolues par rapport à $dx_3$ et $dx_4$, les équations (4′) par rapport à $\delta x_3$ et $\delta x_4$, $\omega'$ se réduit, en remplaçant $dx_3$, $dx_4$, $\delta x_3$, $\delta x_4$ par leurs valeurs, à une expression de la forme

$$A(dx_1\,\delta x_2 - dx_2\,\delta x_1)$$

et $\varpi'$ à une expression de la forme

$$B(dx_1\,\delta x_2 - dx_2\,\delta x_1)$$

et il suffit alors de choisir $u$ et $v$ d'après la relation

$$uA + vB = 0, \tag{11}$$

pour que le covariant bilinéaire de $u\omega + v\varpi$ soit nul en tenant compte des équations (4) et (4′).

Si nous désignons alors par $\Omega$ l'expression de Pfaff ainsi déterminée, on peut remplacer le système (4) par un système équivalent dont l'une des équations aura précisément $\Omega$ pour premier membre, soit

$$\left\{\begin{aligned} \Omega &\equiv A_1\,dx_1 + A_2\,dx_2 + A_3\,dx_3 + A_4\,dx_4 = 0,\\ \Pi &\equiv B_1\,dx_1 + B_2\,dx_2 + B_3\,dx_3 + B_4\,dx_4 = 0,\end{aligned}\right. \tag{12}$$

et maintenant $\Omega'$ est nul, en tenant compte de (12) et de (12′) [équations déduites de (12) par le changement de $d$ en $\delta$].

Cette équation $\Omega = 0$ jouit évidemment d'une propriété invariante par rapport à tout changement de variables; nous l'appellerons l'*équation dérivée* du système donné. On voit que cette équation dérivée s'obtient sans intégration, par de simples différentiations et la résolution d'une équation du premier degré.

Or, on sait qu'*une* équation de Pfaff à quatre variables peut toujours, par l'intégration d'équations différentielles ordinaires, se ramener à l'une des deux formes suivantes :

$$dy_2 - y_3\, dy_1 = 0; \tag{13}$$

$$dy_1 = 0. \tag{14}$$

Je me contenterai d'indiquer une des méthodes qui permettent de faire la réduction. On considère les équations différentielles

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{A_{12}\, dx_2 + A_{13}\, dx_3 + A_{14}\, dx_4}{A_1} = \frac{A_{21}\, dx_1 + A_{23}\, dx_3 + A_{24}\, dx_4}{A_2} \\ &= \frac{A_{31}\, dx_1 + A_{32}\, dx_2 + A_{34}\, dx_4}{A_3} = \frac{A_{41}\, dx_1 + A_{42}\, dx_2 + A_{43}\, dx_3}{A_4} \\ &= \frac{A_1\, dx_1 + A_2\, dx_2 + \ldots}{0} \end{aligned}\right.$$

où les $A_{ik}$ désignent les coefficients du covariant bilinéaire $\Omega'$. Si ces équations se réduisent à la seule équation $\Omega = 0$, cette équation est complètement intégrable et, par suite, réductible à la forme (14). Dans le cas contraire, on déterminera une intégrale première $y_1$ du système (15); en faisant $y_1 = \text{const.} = C$, l'équation $\Omega = 0$ devient alors complètement intégrable, par suite réductible à la forme $dy_2 = 0$, d'où, en ne faisant plus $y_1$ constant, on a la forme (13).

Dans le premier cas, la réduction s'opère par une opération d'ordre 1; dans le second cas, par deux opérations successives d'ordres 3 et 1.

Prenons d'abord le cas de la forme réduite (13). On peut, en somme, supposer

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} &\Omega \equiv dy_2 - y_3\, dy_1, \\ &\Pi \equiv \overline{B_1}\, dy_1 + \overline{B_2}\, dy_2 + \overline{B_3}\, dy_3 + \overline{B_4}\, dy_4, \end{aligned}\right.$$

et, d'après ce que nous avons vu plus haut, $\Omega'$ est nul en tenant compte de (16) et (16′). Or, on a

$$\Omega' \equiv dy_1\, \delta y_3 - dy_3\, \delta y_1,$$

et cette expression ne peut évidemment s'annuler au moyen de (16) et (16′) que *si le coefficient* $\overline{B_4}$ *est identiquement nul.* On peut toujours, de plus, supposer qu'il en est de même de $\overline{B_2}$ en remplaçant dans l'équation $\Pi = 0$ la différentielle $dy_2$ par sa valeur $y_3\,dy_1$. Finalement, on voit que $\Pi$ ne contient que des termes en $dy_1$ et $dy_3$. Les coefficients sont d'ailleurs tous les deux différents de zéro, sinon $\Pi'$ serait nul, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc, enfin, le système peut se mettre sous la forme

$$(6)\qquad \begin{cases} dy_2 - y_3\,dy_1 = 0, \\ dy_3 - y_4\,dy_1 = 0, \end{cases}$$

et d'ailleurs $y_1$, $y_2$, $y_3$, $y_4$ sont quatre fonctions indépendantes de $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, sinon le système serait complètement intégrable.

En définitive, la réduction du système (4) à la forme (6) dépend uniquement de la réduction de l'équation dérivée à sa forme canonique (13).

Si l'équation dérivée est complètement intégrable, on voit immédiatement que le système donné est réductible à la forme

$$(17)\qquad \begin{cases} dy_1 = 0, \\ dy_3 - y_4\,dy_2 = 0, \end{cases}$$

et cela par trois opérations successives d'ordres 1, 3, 1.

Enfin, il y a un cas que nous avons implicitement laissé de côté, c'est celui où l'équation

$$(11)\qquad u\mathrm{A} + v\mathrm{B} = 0$$

est une identité, c'est-à-dire où $\omega'$ et $\varpi'$ sont nuls tous les deux en tenant compte de (4) et (4'). On vérifiera facilement que dans ce cas le système (4) est complètement intégrable et, par suite, réductible à la forme

$$(18)\qquad \begin{cases} dy_1 = 0, \\ dy_2 = 0, \end{cases}$$

par deux opérations d'ordres 2 et 1.

## II.

Appliquons la méthode précédente à l'équation de Monge

$$(19)\qquad \mathrm{F}\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\right) = 0.$$

Le problème est, en somme, la résolution du système

$$(20)\qquad \begin{cases} \omega \equiv dy - y'\,dx = 0, \\ \varpi \equiv dz - z'\,dz = 0, \end{cases}$$

les cinq variables $x$, $y$, $z$, $y'$, $z'$ étant liées par la relation

$$(19')\qquad F(x, y, z, y', z') = 0.$$

Cherchons l'équation dérivée. On a

$$\begin{aligned} \omega' &\equiv dx\,\delta y' - dy'\,\delta x, \\ \varpi' &\equiv dx\,\delta z' - dz'\,\delta x. \end{aligned}$$

Or, les différentielles sont liées par

$$(21)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial F}{\partial x} + y'\dfrac{dF}{\partial y} + z'\dfrac{\partial F}{\partial z}\right) dx + \dfrac{\partial F}{\partial y'}\,dy' + \dfrac{\partial F}{\partial z'}\,dz' = 0, \\ \left(\dfrac{\partial F}{\partial x} + y'\dfrac{\partial F}{\partial y} + z'\dfrac{\partial F}{\partial z}\right) \delta z + \dfrac{\partial F}{\partial y'}\,\delta y' + \dfrac{\partial F}{\partial z'}\,\delta z' = 0. \end{cases}$$

Il en résulte immédiatement que l'équation dérivée n'est autre que

$$(22)\qquad \frac{\partial F}{\partial y'}\,\omega + \frac{\partial F}{\partial z'}\,\varpi \equiv \frac{\partial F}{\partial y'}\,dy + \frac{\partial F}{\partial z'}\,dz - \left(y'\frac{\partial F}{\partial y'} + z'\frac{\partial F}{\partial z'}\right) dx = 0.$$

Tout revient alors à ramener cette équation (22) à sa forme canonique. Si nous posons

$$(23)\qquad \begin{cases} p = \dfrac{y'\dfrac{\partial F}{\partial y'} + z'\dfrac{\partial F}{\partial z'}}{\dfrac{\partial F}{\partial z'}}, \\[2ex] q = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial y'}}{\dfrac{\partial F}{\partial z'}}, \end{cases}$$

et que nous éliminions $y'$ et $z'$ entre les équations (19'), (23), nous serons ramenés à résoudre l'équation

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0,$$

$x$, $y$, $z$, $p$, $q$ étant liés par une certaine relation

$$(24)\qquad \Phi(x, y, z, p, q) = 0,$$

qui est précisément le résultat de l'élimination. On retombe, comme il est aisé de s'en convaincre, sur la méthode classique de M. Darboux. Mais, pratiquement, ce changement de variables $(x, y, z, y', z')$ en $(x, y, z, p, q)$ est inutile et il suffit d'appliquer la méthode générale. D'après la théorie générale, les solutions de l'équation de Monge dépendront d'une fonction arbitraire d'un argument, ce sont les courbes intégrales de l'équation (24); il y a exception pour une solution dépendant de trois constantes arbitraires, ce sont les courbes caractéristiques de (24).

Cherchons maintenant à résoudre l'équation

$$\frac{dz}{dx} = \mathrm{A}\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} + \mathrm{B}\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}\right); \tag{2}$$

cette équation, comme nous l'avons déjà indiqué, se ramène au système

$$\begin{cases} \omega \equiv dy - y'\,dx = 0, \\ \varpi \equiv dz - \mathrm{A}\,dy' - \mathrm{B}\,dx = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Cherchons l'équation dérivée du système. On a, en tenant compte de (3) et (3'),

$$\begin{cases} \omega' \equiv dx\,\delta y' - dy'\,\delta x, \\ \varpi' \equiv \left(-\dfrac{d\mathrm{A}}{dx} + \dfrac{d\mathrm{B}}{dy'}\right)(dx\,\delta y' - dy'\,\delta x); \end{cases} \tag{25}$$

en posant

$$\begin{cases} \dfrac{df}{dx} \equiv \dfrac{\partial f}{\partial x} + y' \dfrac{\partial f}{\partial y} + \mathrm{B}\dfrac{\partial f}{\partial z}, \\ \dfrac{df}{dy'} \equiv \dfrac{\partial f}{\partial y'} + \mathrm{A}\,\dfrac{\partial f}{\partial z}. \end{cases} \tag{26}$$

Il en résulte que l'équation dérivée est

$$\begin{cases} \Omega \equiv \varpi + \left(\dfrac{d\mathrm{A}}{dx} - \dfrac{d\mathrm{B}}{dy'}\right)\omega \\ \quad \equiv dz + \left(\dfrac{d\mathrm{A}}{dx} - \dfrac{d\mathrm{B}}{dy'}\right)dy - \mathrm{A}\,dy' - \left(\mathrm{B} + y'\dfrac{d\mathrm{A}}{dx} - y'\dfrac{d\mathrm{B}}{dy'}\right)dx = 0. \end{cases} \tag{27}$$

Telle est l'équation dont l'intégration résout le problème.

## III.

Appliquons ce qui précède au calcul de l'intégrale

$$z = \int y^m \frac{d^2 y}{dx^2} dx, \tag{28}$$

où $y$ désigne une fonction arbitraire de $x$. Ici, on a

$$A = y^m, \qquad B = 0,$$

et l'on est ramené à l'intégration du système

$$\left\{ \begin{aligned} dy - y' \ dx &= 0, \\ dz - y^m \, dy' &= 0. \end{aligned} \right. \tag{29}$$

En appliquant les formules de la fin du paragraphe précédent, l'équation dérivée est

$$\Omega \equiv dz - y^m \, dy' + m y^{m-1} y' \, dy - m y^{m-1} y'^2 \, dx = 0, \tag{30}$$

et tout revient à réduire cette équation à sa forme canonique. Le covariant bilinéaire de $\Omega$ est ici

$$\begin{aligned} \Omega' = &- 2 m y^{m-1} (dy \, \delta y' - dy' \, \delta y) - 2 m y^{m-1} y' (dy' \, \delta x - dx \, \delta y') \\ &+ m(m-1) y^{m-2} y'^2 (dx \, \delta y - dy \, \delta x). \end{aligned}$$

Par suite, le système auxiliaire (15) s'écrit

$$\frac{dx}{2y} = \frac{dy}{2yy'} = \frac{dy'}{-(m-1)y'^2} = \frac{dz}{-(m-1)y^m y'^2}. \tag{31}$$

On a immédiatement une intégrale première

$$y^{m-1} y'^2 = X; \tag{32}$$

si alors on regarde dans (30) $y$ et $y'$ comme liées par la relation (32) où X est une constante, l'équation (30) doit être complètement intégrable. On trouve, en effet, par un calcul facile, son intégrale générale qui est

$$z - m x y^{m-1} y'^2 + \frac{3m-1}{m+1} y^m y' = Y. \tag{33}$$

Finalement, l'équation (30) peut se mettre sous la forme

$$dY - Y' \, dX = 0,$$

et l'on trouve, par des différentiations,

$$\frac{2m}{m+1}\frac{y}{y'} - mx = Y'. \tag{34}$$

Cela étant, le système (29) peut se mettre sous la forme

$$\left\{\begin{aligned} dY - Y'\,dX &= 0,\\ dY' - Y''\,dX &= 0,\end{aligned}\right. \tag{35}$$

et de nouvelles différentiations donnent

$$-\frac{m}{(m+1)y^{m-2}y'^3} = Y''. \tag{36}$$

L'intégrale générale du système (29) est alors

$$\left\{\begin{aligned} &X = y^{m-1}y'^2 = \alpha,\\ &Y = z - mxy^{m-1}y'^2 + \frac{3m-1}{m+1}y^m y' = mf(\alpha),\\ &Y' = \frac{2m}{m+1}\frac{y}{y'} - mx = mf'(\alpha),\\ &Y'' = -\frac{m}{(m+1)y^{m-2}y'^3} = mf''(\alpha),\end{aligned}\right. \tag{37}$$

où $\alpha$ désigne un paramètre variable et $f(\alpha)$ une fonction arbitraire de ce paramètre. Ces équations résolues donnent pour $x$, $y$ et $z$ les expressions suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} x &= -2\alpha f''(\alpha) - f'(\alpha),\\ y^{m+1} &= (m+1)^2\alpha^3 f''^2(\alpha),\\ z &= (m-1)\alpha^2 f''(\alpha) - m\alpha f'(\alpha) + mf(\alpha).\end{aligned}\right. \tag{38}$$

Si dans ces formules on remplace $\alpha$, $f(\alpha)$, $f'(\alpha)$ par trois constantes arbitraires $a$, $b$, $c$ et $f''(\alpha)$ par un paramètre variable $u$, on obtient une solution ne rentrant pas dans les formules générales (38). Cette solution peut encore être définie par les équations

$$\left\{\begin{aligned} y^{m+1} &= (m+1)^2 a(x-x_0)^2,\\ z - z_0 &= -2(m-1)a(x-x_0),\end{aligned}\right. \tag{39}$$

qui dépendent des trois constantes arbitraires $a$, $x_0$, $z_0$.

## IV.

Pour terminer, calculons les quadratures

$$(40)\qquad u=\int\frac{dx}{1+xy},\qquad v=\int\frac{dy}{1+xy},$$

dont s'occupe M. Beudon avec d'autres notations, et où $x$ et $y$ sont liées par une relation *arbitraire*. Il s'agit, en somme, de résoudre le système

$$(41)\qquad \begin{cases} \omega\equiv du-\dfrac{dx}{1+xy}=0,\\ \varpi\equiv dv-\dfrac{dy}{1+xy}=0.\end{cases}$$

Cherchons l'équation dérivée. On a

$$\omega'=-\frac{x}{(1+xy)^2}(dx\,\delta y-dy\,\delta x),$$

$$\varpi'=\frac{y}{(1+xy)^2}(dx\,\delta y-dy\,\delta x),$$

et, par suite, l'équation dérivée est

$$(42)\qquad \Omega\equiv y\omega+x\varpi\equiv y\,du+x\,dv-\frac{x\,dy+y\,dx}{1+xy}=0.$$

Cette équation peut s'écrire

$$dv+\frac{y}{x}du-\frac{x\,dy+y\,dx}{x(1+xy)}=0,$$

et l'on voit qu'en posant

$$\frac{y}{x}=\text{const.}=X$$

elle est complètement intégrable; son intégrale générale se calcule immédiatement et est

$$v+Xu-2\sqrt{X}\,\text{arc tang}(x\sqrt{X})=v+\frac{y}{x}u-2\sqrt{\frac{y}{x}}\,\text{arc tang}(\sqrt{xy})=Y.$$

Par suite, l'équation (42) peut se mettre sous la forme

$$dY-Y'\,dX=0,$$

en posant

$$Y'=u-\sqrt{\frac{x}{y}}\,\text{arc tang}\sqrt{xy}.$$

Finalement, le système (41) se met sous la forme

$$(43)\qquad \begin{cases} dY - Y'\,dX = 0, \\ dY' - Y''\,dX = 0, \end{cases}$$

et l'on trouve, par différentiations,

$$Y'' = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{3}{2}} \operatorname{arc\,tang} \sqrt{xy} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{y}\frac{1}{1+xy}.$$

L'intégrale générale du système (41) est alors donnée par les formules

$$(44)\qquad \begin{cases} X = \dfrac{y}{x} = \alpha, \\ Y = v + \dfrac{y}{x}u - 2\sqrt{\dfrac{y}{x}} \operatorname{arc\,tang} \sqrt{xy} = f(\alpha), \\ Y' = u - \sqrt{\dfrac{x}{y}} \operatorname{arc\,tang} \sqrt{xy} = f'(\alpha), \\ Y'' = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{3}{2}} \operatorname{arc\,tang} \sqrt{xy} - \dfrac{1}{2}\dfrac{x^2}{y}\dfrac{1}{1+xy} = f''(\alpha). \end{cases}$$

En posant

$$\sqrt{xy} = \operatorname{tang} \frac{\beta}{2},$$

on obtient

$$(45)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{tang} \dfrac{\beta}{2}, \\ y = \sqrt{\alpha} \operatorname{tang} \dfrac{\beta}{2}, \\ u = \dfrac{\beta}{2\sqrt{\alpha}} + f'(\alpha), \\ v = \dfrac{\beta\sqrt{\alpha}}{2} + f(\alpha) - \alpha f'(\alpha), \end{cases}$$

où $\alpha$ et $\beta$ sont deux paramètres variables liés par la relation

$$(46)\qquad \beta - \sin\beta = 4\alpha^{\frac{3}{2}} f''(\alpha).$$

Ce sont, sous une forme peut-être plus symétrique, les résultats obtenus par M. Beudon.

En regardant maintenant, dans les formules (45), $\alpha$, $f(\alpha)$

et $f'(\alpha)$ comme trois constantes arbitraires, $\beta$ comme un paramètre variable, on obtient une solution ne rentrant pas dans le cas général et qui correspond au cas où $y$ est proportionnel à $x$.