M. SERVANT

Sur la déformation des quadriques

Bulletin de la S. M. F., tome 30 (1902), p. 18-23
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1902__30__18_1>

SUR LA DÉFORMATION DES QUADRIQUES ;

Par M. Servant.

1. Soit

$$ds^2 = \mathrm{E}\, du^2 + 2\mathrm{F}\, du\, dv + \mathrm{G}\, dv^2$$

l'élément linéaire d'une quadrique quelconque rapportée à ses génératrices rectilignes et soit

$$2\mathfrak{D}'\, du\, dv$$

la seconde forme quadratique relative à cette surface ; la condition nécessaire et suffisante pour que cette surface soit du deuxième degré est

$$\begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0.$$

Pour obtenir une surface S' applicable sur la quadrique donnée, il suffit d'intégrer le système d'équations (notation de M. Bianchi, *Géométrie différentielle*)

$$\frac{\partial D}{\partial v} - \frac{\partial D'}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\log \rho D + \frac{\partial}{\partial u}\log \delta' D' = 0. \qquad DD'' - D'^2 = -\delta'^2.$$

$$\frac{\partial D''}{\partial u} - \frac{\partial D'}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\log \delta' D' + \frac{\partial}{\partial u}\log \rho D'' = 0, \qquad \rho^2 = \frac{\delta'}{H} = \sqrt{-\frac{1}{RR'}},$$

ce qui s'écrit encore

$$(1) \qquad \Omega\frac{\partial \Delta'}{\partial u} = \frac{\partial \Delta}{\partial v}, \qquad \Omega\frac{\partial \Delta'}{\partial v} = \frac{\partial \Delta''}{\partial u}, \qquad \Delta\Delta'' = \Omega^2(\Delta'^2 - 1),$$

où l'on a posé

$$\Delta = \rho D, \qquad \Delta'' = \rho D'', \qquad \Delta' = \frac{D'}{\delta'}, \qquad \Omega = \rho\delta' = \frac{\delta'^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\Delta}}.$$

L'équation du réseau conjugué commun à S et S′ s'écrit

$$\Delta\, du^2 - \Delta''\, dv^2 = 0.$$

2. La forme quadratique du premier membre jouit d'une propriété remarquable : elle a sa courbure nulle; on peut donc déterminer le réseau conjugué commun par quadratures; on aura

$$(2) \qquad \begin{cases} e^{i\lambda}\,(\sqrt{\Delta}\, du - \sqrt{\Delta''}\, dv) = d\alpha, \\ e^{-i\lambda}(\sqrt{\Delta}\, du + \sqrt{\Delta''}\, dv) = d\beta; \end{cases}$$

on trouve de suite le facteur intégrant

$$e^{-2i\lambda} = \Delta' + \sqrt{\Delta'^2 - 1}, \qquad e^{2i\lambda} = \Delta' - \sqrt{\Delta'^2 - 1}.$$

Des équations (2) on tire

$$(3) \qquad \begin{cases} 2\sqrt{\Delta}\, du = \quad e^{-i\lambda}\, d\alpha + e^{i\lambda}\, d\beta, \\ 2\sqrt{\Delta''}\, dv = -e^{-i\lambda}\, d\alpha + e^{i\lambda}\, d\beta. \end{cases}$$

Si l'on fait le changement de variables défini par les équations (3), la seconde forme quadratique relative à la quadrique S devient

$$-\frac{\delta'(\Delta' + \sqrt{\Delta'^2 - 1})}{2\Omega\sqrt{\Delta'^2 - 1}}\, d\alpha^2 + \frac{\delta'(\Delta' - \sqrt{\Delta'^2 - 1})}{2\Omega\sqrt{\Delta'^2 - 1}}\, d\beta^2.$$

Désignons, comme d'usage, par D et D″ les coefficients de

$d\alpha^2\, d\beta^2$; ces coefficients seront liés par la relation

$$(4)\qquad D + D'' = -\frac{\delta'}{\Omega} = -\frac{1}{\rho},$$

qui caractérise les réseaux conjugués cycliques des quadriques.

3. La forme quadratique relative à la surface S′ est

$$\frac{\Delta}{\rho}\,du^2 + 2\delta'\Delta'\,du\,dv + \frac{\Delta''}{\rho}\,dv^2;$$

si nous effectuons le changement de variables défini par les équations (3), elle devient

$$\frac{1}{2\rho\sqrt{\Delta'^2 - 1}}(-d\alpha^2 + d\beta^2).$$

Les coefficients de $d\alpha^2$ et de $d\beta^2$ seront donc liés par la relation

$$D_1 + D''_1 = 0,$$

ce qui montre que le réseau $\alpha\beta$ est sur la surface S un réseau isotherme conjugué : proposition déjà établie par une autre méthode par M. Darboux (*A. E. N. S.*, 1900).

4. En utilisant les formules de Gauss, on peut facilement calculer tous les éléments relatifs aux surfaces S et S′ et à leur représentation sphérique. Calculons, en particulier, les crochets de Christoffel relatifs à l'élément linéaire commun à S et S′; il vient de suite

$$\begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\log\frac{D}{\rho^3}, \qquad \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\beta}\log\frac{D}{\rho}, \qquad \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} = -\frac{1}{2}\frac{D''}{D}\frac{\partial}{\partial\alpha}\log D''\rho,$$

$$\begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\beta}\log\frac{D''}{\rho^3}, \qquad \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\log\frac{D''}{\rho}, \qquad \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} = -\frac{1}{2}\frac{D}{D''}\frac{\partial}{\partial\beta}\log D\rho.$$

Si l'on pose

$$\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{\partial a}{\partial\beta}, \qquad \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{\partial b}{\partial\alpha},$$

on voit, à l'aide des formules de Gauss, que les coordonnées de la surface S seront les solutions communes aux deux équations du second ordre

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2 x}{\partial\beta^2}&=2\frac{\partial a}{\partial\alpha}\frac{\partial x}{\partial\alpha}+2\frac{\partial b}{\partial\beta}\frac{\partial x}{\partial\beta},\\ \frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\,\partial\beta}&=\frac{\partial a}{\partial\beta}\frac{\partial x}{\partial\alpha}+\frac{\partial b}{\partial\alpha}\frac{\partial x}{\partial\beta},\end{aligned}\right.$$

qui formeront alors un système en involution

On calculerait de même les $\left\{\begin{matrix} ik \\ l \end{matrix}\right\}$ relatifs à la représentation sphérique de S; on a, en particulier,

$$\left\{\begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix}\right\}' = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\beta}\log D\rho, \qquad \left\{\begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix}\right\}' = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\log D''\rho.$$

On en déduit de suite la proposition suivante : *Pour qu'un réseau d'une quadrique soit un réseau conjugué persistant dans une déformation continue, il faut que l'on ait*

$$\frac{D}{D''}=\frac{A(\alpha)}{B(\beta)},$$

c'est-à-dire que le réseau soit isotherme conjugué sur la quadrique. On peut retrouver ainsi aisément les résultats connus relatifs à la déformation des surfaces de révolution donnés par Bour et Ossian Bonnet.

5. On peut écrire sous bien des formes différentes les équations du problème de la déformation des quadriques. Si l'on part du système (1), on peut ramener le problème à l'intégration d'une équation du second ordre linéaire par rapport aux dérivées secondaires.

On peut aussi chercher la surface S′ rapportée au réseau conjugué commun en utilisant les propriétés données précédemment; on sera ainsi conduit à un système de deux équations aux dérivées partielles du second ordre de forme assez compliquée. La méthode la plus simple, semble-t-il, consiste à chercher les réseaux conjugués des quadriques qui sont susceptibles de se conserver dans une déformation (les réseaux C de M. Guichard). Ces réseaux sont caractérisés par l'équation (4), et le problème est alors le suivant : *Ramener la seconde forme quadratique d'une quadrique à la forme*

$$D\,d\alpha^2+D''\,d\beta^2,$$

D *et* D″ *étant liés par l'équation* (4).

Supposons la quadrique rapportée à un système (uv) quelconque de coordonnées curvilignes; on peut, soit chercher à déterminer u et v en fonction de α et β, soit chercher à déterminer α et β en fonction de u et v. La première méthode, que j'ai déjà utilisée (*B. S. M.*, 1901) ([1]), conduit pour chacune des fonctions u et v à deux équations aux dérivées partielles du troisième ordre; la seconde donne un résultat plus simple : elle conduit pour chacune des fonctions α et β à une équation aux dérivées partielles du second ordre que l'on peut immédiatement écrire en se servant des paramètres différentiels relatifs à la forme quadratique donnée; on aura

$$\Delta(\alpha\beta) = 0, \qquad \frac{1}{\Delta(\alpha)} + \frac{1}{\Delta(\beta)} + \frac{1}{\rho} = 0.$$

Si u et v sont les paramètres des génératrices rectilignes, il vient simplement

$$(5) \qquad pq' + qp' = 0, \qquad \frac{1}{pq} + \frac{1}{p'q'} + \frac{2}{\Omega} = 0$$

et la fonction α sera donnée par l'équation

$$(6) \qquad 2(pq+\Omega)s - q^2 r - p^2 t + pq^2 \frac{\partial}{\partial u}\log\Omega + p^2 q \frac{\partial}{\partial v}\log\Omega = 0;$$

les équations (5) permettent d'en déduire β par quadratures. Cette équation linéaire par rapport aux dérivées du second ordre et ne contenant pas α est de forme assez simple. Dans le cas de la sphère, à toute solution de cette équation on peut faire correspondre une surface à courbure totale constante dont on pourra calculer tous les éléments par quadratures. Le problème de la recherche des surfaces dont les rayons de courbure sont fonctions l'un de l'autre peut également se ramener à une équation de la forme (6).

On peut trouver également une équation du second ordre de même forme que (6) en cherchant, suivant une méthode donnée par M. Darboux, les paramètres des asymptotiques de la surface S'. Dans le cas général on a, pour déterminer ces quantités, deux équations du second ordre; dans le cas des quadriques, elles se

([1]) *Voir* aussi RAFFY, *Comptes rendus*, 1901.

ramènent à deux équations du premier ordre qui ne contiennent pas les fonctions inconnues, et, par conséquent, le problème se ramène à l'intégration d'une équation de même forme que (6), mais elle est un peu moins simple.