BULLETIN DE LA S. M. F.

G. HUMBERT

Détermination des courbes algébriques de degré donné qu'on peut tracer sur la surface de l'onde

Bulletin de la S. M. F., tome 30 (1902), p. 23-28

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1902__30__23_1>

DÉTERMINATION DES COURBES ALGÉBRIQUES DE DEGRÉ DONNÉ QU'ON PEUT TRACER SUR LA SURFACE DE L'ONDE;

Par M. G. Humbert.

Je rappellerai d'abord quelques propositions établies dans mon Mémoire sur les fonctions abéliennes singulières (*Journal de Mathématiques*, 5e série, t. V).

Soit un système de fonctions abéliennes à deux variables, u et v, admettant comme périodes normales

$$\begin{matrix} 1 & 0 & g & h \\ 0 & 1 & h & g' \end{matrix};$$

ces fonctions sont ce que j'appelle *singulières*, si les quantités g, h, g' sont liées par une relation qui peut être ramenée au type

$$\alpha g + \beta h + g' = 0, \tag{1}$$

α et β étant entiers.

En désignant par l et k deux entiers, appelons *fonctions intermédiaires normales, d'indices* l, k, les fonctions entières de u, v qui satisfont aux équations

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} F(u+1, v) &= e^{\omega\pi i} F(u, v), \\ F(u, v+1) &= e^{\omega'\pi i} F(u, v), \\ F(u+g, v+h) &= e^{\theta\pi i} e^{2\pi i(-lu+kv)+\pi i(-lg+kh)} F(u, v), \\ F(u+h, v+g') &= e^{\theta'\pi i} e^{2\pi i[-k\alpha u-(l+k\beta)v]+\pi i[-k\alpha h-(l+k\beta)g']} F(u, v). \end{aligned}\right.$$

Si l'on suppose la partie imaginaire de g positive, les entiers l et k sont assujettis à la seule condition

$$2l + \beta k > (\sqrt{\beta^2 - 4\alpha} \bmod k); \tag{3}$$

la quantité $\beta^2 - 4\alpha$ est nécessairement positive.

Nous dirons que la *caractéristique* de $F(u, v)$ est $\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}$; la caractéristique *nulle* répond à $\omega = \omega' = \theta = \theta' = 0$.

Il est aisé de démontrer l'existence des fonctions $F(u, v)$ et de trouver leur développement en série de Fourier; parmi les fonctions entières qui se reproduisent à une exponentielle près $e^{\lambda u + \mu v + \nu}$, quand on augmente u, v d'une période quelconque, les fonctions normales peuvent seules être paires ou impaires.

Les fonctions normales d'indices l, k, et de caractéristique donnée, sont fonctions linéaires et homogènes de δ d'entre elles, étant posé

$$\delta = l^2 + \beta kl + \alpha k^2,$$

quantité toujours positive, d'après (3).

Relativement aux fonctions normales paires ou impaires, on démontre les théorèmes suivants :

I. *k étant pair, si δ est pair,* il existe $\frac{1}{2}(\delta + 4)$ fonctions normales distinctes, d'indices l, k, de caractéristique nulle, et *paires;* il en existe $\frac{1}{2}(\delta - 4)$ *impaires;* ces dernières s'annulent toutes simplement pour les seize demi-périodes.

De même il existe $\frac{1}{2}\delta$ fonctions normales distinctes d'indices l, k, de caractéristique donnée, non nulle, et *paires;* il en existe aussi $\frac{1}{2}\delta$ *impaires.* Les fonctions paires s'annulent simplement pour huit demi-périodes et les fonctions impaires pour les huit autres. Ces demi-périodes sont celles qui annulent les fonctions thêta normales paires ou impaires, dont la caractéristique est la même et dont l'ordre a la parité de l.

II. *k étant pair, si δ est impair,* il existe $\frac{1}{2}(\delta + 1)$ fonctions normales *paires,* de caractéristique donnée, et $\frac{1}{2}(\delta - 1)$ *impaires,* ou inversement, selon que $\omega\theta + \omega'\theta'$ est pair ou impair. Les $\frac{1}{2}(\delta + 1)$ fonctions s'annulent simplement pour six demi-périodes et les $\frac{1}{2}(\delta - 1)$ s'annulent pour les dix autres; ces groupes de demi-périodes sont les mêmes que pour les fonctions thêta normales, dans les conditions indiquées au cas I.

III. *k étant impair, si δ est impair,* il existe $\frac{1}{2}(\delta + 1)$ fonctions normales *paires,* de caractéristique donnée, et $\frac{1}{2}(\delta - 1)$ *impaires,* ou inversement, selon que $\omega[(l + \beta)\theta + \theta'] - \omega'(\alpha\theta - l\theta')$

est pair ou impair. Les $\frac{1}{2}(\delta+1)$ fonctions s'annulent simplement pour six demi-périodes, et les $\frac{1}{2}(\delta-1)$ s'annulent pour les dix autres : ces groupes de six et de dix demi-périodes sont différents de ceux du cas II.

IV. *k étant impair, si δ est pair, et si la caractéristique ne vérifie pas les congruences* $\omega \equiv l\omega'$; $\theta' \equiv \theta(l+\beta) \pmod 2$, il existe $\frac{1}{2}\delta$ fonctions normales *paires* et $\frac{1}{2}\delta$ *impaires*. Les fonctions paires s'annulent simplement pour huit demi-périodes, et les fonctions impaires pour les huit autres; ces groupes de huit demi-périodes sont différents de ceux du cas I.

V. *k étant impair, si δ est pair et si la caractéristique est une des quatre caractéristiques vérifiant les congruences* ci-dessus, il existe $\frac{1}{2}(\delta+2)$ fonctions normales *paires* et $\frac{1}{2}(\delta-2)$ *impaires,* ou inversement, selon que $\theta\omega'$ est pair ou impair. Les $\frac{1}{2}(\delta+2)$ fonctions s'annulent simplement pour quatre demi-périodes, et les $\frac{1}{2}(\delta-2)$ s'annulent pour les douze autres.

Cela posé, soit K une surface de Kummer *singulière,* c'est-à-dire correspondant aux fonctions abéliennes singulières considérées; nous la supposerons représentée paramétriquement par le procédé de M. Weber (*Journal de Crelle,* t. 84) : les coordonnées homogènes d'un point sont des fonctions thêta du second ordre, normales et à caractéristique nulle, c'est-à-dire qu'elles vérifient les relations (2), où $l=2$, $k=0$ et $\omega=\omega'=\theta=\theta'=0$. Ces quatre fonctions étant toutes paires (I), à un point de K répondent, aux périodes près, les deux couples d'arguments u, v et $-u$, $-v$; il en résulte aisément que l'équation d'une courbe quelconque tracée sur K s'obtient en annulant une fonction intermédiaire normale, paire ou impaire, de caractéristique quelconque, et réciproquement.

Lorsque la fonction intermédiaire est une fonction thêta, c'est-à-dire lorsque son indice k est nul, la courbe est une courbe *ordinaire* existant sur toute surface de Kummer; si k est différent de zéro, la courbe est *singulière,* et réciproquement.

Deux fonctions intermédiaires, d'indices l et k, l' et k', ont en commun un nombre de zéros égal à

$$(4)\qquad 2ll'+\beta(lk'+l'k)+2\alpha kk';$$

il en résulte que, sur la surface K, la courbe obtenue en annulant une fonction normale d'indices l et k a pour degré

(5) $$\tfrac{1}{2}(2.2l + \beta.2k) = 2l + \beta k.$$

Les fonctions normales, de mêmes indices l et k, de même caractéristique, et qui sont soit paires, soit impaires, sont des fonctions linéaires et homogènes d'un certain nombre d'entre elles (I, II, III, IV, V); les courbes correspondantes sur K appartiennent donc à une série linéaire; nous dirons qu'elles forment une *famille de courbes*. En vertu des résultats généraux rappelés plus haut, les courbes d'une même famille passent toutes, simplement, par $2s$ points doubles de K : car les demi-périodes sont les arguments des seize points doubles de la surface. Le nombre s peut d'ailleurs être nul; mais, dans tous les cas, la famille considérée est $\frac{1}{2}(\delta - s + 2)$ fois infinie.

On établit aussi que le genre général, p, des courbes de la famille est

(6) $$p = \tfrac{1}{2}(\delta - s + 2).$$

Surface de l'onde. — Appliquons maintenant ces résultats à la surface de l'onde, ou mieux au *tétraédroïde* qui en est la transformée homographique la plus générale. Le tétraédroïde est une surface de Kummer singulière; la relation (1) correspondante entre les périodes est

$$-g + g' = 0,$$

c'est-à-dire que $\alpha = -1$, $\beta = 0$.

On a alors

$$\delta = l^2 - k^2$$

et

$$2l > 2 \bmod k.$$

De plus, la quantité $\beta^2 - 4\alpha$ étant ici un carré, 4, il existe des fonctions intermédiaires normales dont les indices, l et k, vérifient l'égalité

$$2l = 2 \bmod k;$$

à ces fonctions, qui se réduisent à des fonctions thêta elliptiques de $u + v$ ou de $u - v$, correspondent, sur K, deux séries bien connues de biquadratiques gauches, $u + v = \text{const.}$, $u - v = \text{const.}$, qui ne passent simultanément par aucun point double. Chacune de ces séries comprend quatre coniques répondant à des fonctions normales pour lesquelles $l = 1$, $k = \pm 1$, les éléments ω et θ' de la caractéristique étant nuls; on a ainsi huit coniques, situées deux à deux dans quatre plans, les quatre points communs à deux coniques d'un même plan sont des points doubles de K.

Laissant de côté ces courbes particulières souvent étudiées, nous avons le droit de supposer $2l > 2 \bmod k$, ou

$$\bmod k < l.$$

Dès lors, on déduit immédiatement de ce qui précède les conséquences suivantes :

Les courbes algébriques tracées sur le tétraédroïde sont toutes de degré pair.

Les courbes d'un degré donné, $2l$, *forment* $32(2l-1)$ *familles : une famille est déterminée par une valeur de* k *comprise entre* $-l$ *et* $+l$, *ces limites étant exclues, par une des seize caractéristiques et par la nature de fonction paire ou impaire des fonctions normales correspondantes.*

Les courbes d'une même famille passent toutes simplement par $2s$ *points doubles du tétraédroïde,* s *étant un des nombres* 0, 2, 3, 4, 5, 6, *ou* 8; *elles forment une série linéaire* $\frac{1}{2}(l^2 - k^2 - s + 2)$ *fois infinie; leur genre général est aussi* $\frac{1}{2}(l^2 - k^2 - s + 2)$.

Les surfaces d'ordre l *qui passent par une courbe quelconque d'une famille répondant à l'indice* k *coupent, en outre, le tétraédroïde suivant les courbes d'une même famille répondant à l'indice* $-k$.

Pour $k = 0$, *on obtient les courbes ordinaires, c'est-à-dire celles qui existent sur toute surface de Kummer.*

Les groupes de $2s$ points doubles dont il est question dans ces énoncés ne dépendent, dans leur ensemble, que de la parité des indices l et k; on trouvera leur détermination complète dans le Mémoire cité au commencement de ce Travail.

En appliquant, par exemple, ces résultats aux courbes du quatrième ordre, on trouve, en dehors des biquadratiques signalées plus haut :

1° Les courbes *ordinaires* d'ordre quatre existant sur toute surface de Kummer;

2° Seize familles *singulières,* chacune simplement infinie, de biquadratiques gauches passant par six points doubles du tétraédroïde;

3° Seize familles *singulières* analogues, associées aux précédentes de telle sorte qu'une quadrique quelconque passant par une courbe d'une des premières familles coupe en outre le tétraédroïde suivant une courbe de la famille associée;

4° et 5° Trente-deux courbes unicursales du quatrième ordre, passant chacune par dix points doubles, mais qui se décomposent, comme on le reconnaît aisément, en systèmes de deux coniques déjà connues sur la surface.