BULLETIN DE LA S. M. F.

CH. BRISSE

Sur une formule de la théorie des surfaces

Bulletin de la S. M. F., tome 4 (1875-1876), p. 96-98
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1875-1876__4__96_1>

Sur une formule de la théorie des surfaces; par M. CH. BRISSE.

(Séance du 22 mars 1876.)

Soient

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v)$$

les équations d'une surface, et supposons qu'on en déduise pour le carré de l'élément linéaire

$$ds^2 = E^2 du^2 + G^2 dv^2.$$

Soient, en outre, M, N, P, Q, R, S six fonctions de u et de v assujetties à vérifier les équations de Codazzi :

$$\frac{dE}{dv} + GM = o, \quad \frac{dM}{dv} - \frac{dN}{du} = RS - PQ,$$

$$\frac{dG}{du} - EN = o, \quad \frac{dP}{dv} - \frac{dS}{du} = MQ - RN,$$

$$ES + GR = o, \quad \frac{dR}{dv} - \frac{dQ}{du} = NP - MS.$$

Si l'on considère un trièdre trirectangle formé par les tangentes aux courbes $v =$ const., $u =$ const., et par la normale à la surface, et un second trièdre formé par la tangente, la normale principale et la binormale d'une courbe tracée sur cette surface et coupant sous un angle i les courbes $v =$ const., M. Laguerre a montré qu'en écrivant que la position des deux trièdres était déterminée à tout instant, on en concluait trois relations distinctes contenant le rayon de courbure ρ, le rayon de torsion r, et l'angle ϖ de la normale principale à la courbe et de la normale à la surface :

$$d\varpi - \frac{ds}{r} = (P\,du + S\,dv)\sin i + (R\,du + Q\,dv)\cos i,$$

$$\frac{\cos\varpi}{\rho}\,ds = (P\,du + S\,dv)\cos i - (R\,du + Q\,dv)\sin i,$$

$$-\frac{\sin\varpi}{\rho}\,ds = di + M\,du + N\,dv,$$

l'angle i étant lié à u et à v par les formules

$$ds\cos i = E\,du, \quad ds\sin i = G\,dv.$$

Ces trois relations vont nous donner également trois relations entre certains éléments de deux courbes tangentes en un point et tracées sur une même surface. Éliminons en effet du et dv, M et N, elles deviennent

$$(1)\quad EG\left(\frac{d\varpi}{ds} - \frac{1}{r}\right) = ES\sin^2 i + (GP + EQ)\sin i\cos i + GR\cos^2 i,$$

$$(2)\quad EG\frac{\cos\varpi}{\rho} = GP\cos^2 i + (ES - GR)\sin i\cos i - EQ\sin^2 i,$$

$$(3)\quad EG\frac{\sin\varpi}{\rho} = -EG\frac{di}{ds} + \frac{dE}{dv}\cos i - \frac{dG}{du}\sin i.$$

De la première on conclut, pour deux courbes Σ et Σ' issues d'un même point sur une même surface et tangentes entre elles, puisque le second membre ne dépend que de $\sin i$ et $\cos i$,

$$(4) \qquad \frac{d\varpi'}{ds'} - \frac{1}{r'} = \frac{d\varpi}{ds} - \frac{1}{r};$$

c'est la formule de M. Ossian Bonnet.

De la deuxième on conclut de la même manière

$$(5) \qquad \frac{\cos\varpi'}{\rho'} = \frac{\cos\varpi}{\rho};$$

c'est le théorème de Meusnier.

De la troisième on conclut enfin

$$(6) \qquad \frac{\sin\varpi'}{\rho'} + \frac{di'}{ds'} = \frac{\sin\varpi}{\rho} + \frac{di}{ds},$$

d'où l'on tire, comme nous allons le faire voir, la formule de M. Laguerre.

Différentions, en effet, l'équation (2), et, tenant compte de l'équation (1), isolons les termes qui ne dépendent que de $\sin i$ et de $\cos i$, nous en conclurons

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} & 2\left(\frac{d\varpi'}{ds'} - \frac{1}{r'}\right)\frac{di'}{ds'} - \frac{\sin\varpi'}{\rho'}\frac{d\varpi'}{ds'} - \frac{\cos\varpi'}{\rho'}\frac{d\rho'}{\rho'\,ds'} \\ & = 2\left(\frac{d\varpi}{ds} - \frac{1}{r}\right)\frac{di}{ds} - \frac{\sin\varpi}{\rho}\frac{d\varpi}{ds} - \frac{\cos\varpi}{\rho}\frac{d\rho}{\rho\,ds}. \end{aligned} \right.$$

Multiplions membre à membre les équations (4) et (6), et retranchons de l'équation (7) le double du résultat obtenu, nous aurons

$$(8) \qquad \frac{\sin\varpi'}{\rho'}\left(3\frac{d\varpi'}{ds'} - \frac{2}{r'}\right) + \frac{\cos\varpi'}{\rho'}\frac{d\rho'}{\rho'\,ds'} = \frac{\sin\varpi}{\rho}\left(3\frac{d\varpi}{ds} - \frac{2}{r}\right) + \frac{\cos\varpi}{\rho}\frac{d\rho}{\rho\,ds}.$$

Multiplions enfin membre à membre les équations (5) et (8), et nous aurons la formule cherchée

$$\operatorname{tang}\varpi'\left(3\frac{d\varpi'}{ds'} - \frac{2}{r'}\right) + \frac{d\rho'}{\rho'\,ds'} = \operatorname{tang}\varpi\left(3\frac{d\varpi}{ds} - \frac{2}{r}\right) + \frac{d\rho}{\rho\,ds}.$$