

BULLETIN DE LA S. M. F.

L. AUTONNE

Sur les groupes linéaires, réels et orthogonaux

Bulletin de la S. M. F., tome 30 (1902), p. 121-134

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1902__30__121_1

© Bulletin de la S. M. F., 1902, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LES GROUPES LINÉAIRES, RÉELS ET ORTHOGONAUX;

Par M LÉON AUTONNE.

Considérons un groupe G_x de substitutions linéaires n -aires, de déterminant un $[j, k = 1, 2, \dots, n]$,

$$A = \left| x_j \sum_k a_{jk} x_k \right| = |x_j A[x_j]| = |x A[x]|.$$

Supposons que les substitutions A soient : 1° réelles, les coefficients a_{jk} étant réels; 2° orthogonales, admettant pour invariant absolu la somme des carrés des variables. On dira que G_x est un groupe linéaire réel et orthogonal.

Changeons de variables, en posant symboliquement $x = r[t]$, c'est-à-dire, en notation ordinaire,

$$x_j = \sum_k r_{jk} t_k.$$

Le nouveau groupe Γ_t , qui est d'ailleurs $r^{-1} G r$, n'est, en général, plus ni réel, ni orthogonal. Γ_t n'est cependant pas quelconque, car, pour un changement convenable de variables, $t = r^{-1}[x]$, il redevient réel et orthogonal. J'exprimerai plus brièvement cette propriété en disant que Γ_t est *réalisable* et admet la substitution r pour *réalisante*.

Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un groupe n -aire Γ_t soit réalisable?

La présente Note fournit la réponse complète à la question.

Mon Mémoire *Sur l'Hermitien* (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1902) contient, sur les substitutions linéaires, des considérations d'où la solution de notre problème se déduit assez simplement. Je vais me référer très fréquemment à ce travail; j'y renverrai pour la notation (*loc. cit.*, n° 7), par exemple.

Rappelons brièvement les principales théories dont on va faire usage.

Soit une *matrice* ou Tableau de n^2 coefficients,

$$[j, k = 1, 2, \dots, n],$$

$$A = [a_{jk}] = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ de déterminant } |A| = 1.$$

La matrice $A' = [a_{kj}]$ est la *transposée* de A . \bar{g} étant la conjuguée de l'imaginaire g , on pose $\bar{A} = [\bar{a}_{jk}]$ (*loc. cit.*, n° 1).

La matrice A définit, sans ambiguïté (*loc. cit.*, n° 2), une *forme bilinéaire*

$$A(x, y) = \sum_{jk} A_{jk} y_j x_k$$

et une *substitution*

$$A = \left| x_j \frac{\partial A(x, y)}{\partial y_j} \right| = |x \quad A[x]|.$$

La matrice

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \dots \end{pmatrix}$$

définit la forme bilinéaire $E(x, y) = \sum xy$ et la substitution *unité*.

La même lettre A peut désigner la matrice, la forme bilinéaire et la substitution. Les formules du calcul symbolique (FROBENIUS, *J. f. r. u. a. m.*, t. 84, p. 1) sont ainsi susceptibles (*loc. cit.*, n° 4) d'une triple interprétation.

Si l'on pose $x = L[\xi]$, $y = M[\eta]$, les formes bilinéaires

$$A(x, y) \text{ et } A(x, \bar{x})$$

deviennent respectivement (*loc. cit.*, n° 5)

$$M'AL(\xi, \eta) \text{ et } \bar{L}'AL(\xi, \bar{\xi}).$$

Une matrice, forme bilinéaire ou substitution, A est

symétrique,	si	$A' = A$;
réelle,	si	$\bar{A} = A$;
orthogonale,	si	$A'A = E$;
unitaire,	si	$\bar{A}'A = E$;
enfin hermitienne,	si	$A' = A$,

l'expression $A(x, \bar{x})$ devant être, de plus, dans ce dernier cas, un *hermitien*, c'est-à-dire toujours positive.

Les matrices réelles, orthogonales ou unitaires forment évidemment un groupe réel, orthogonal ou unitaire.

Si A est hermitienne, il existe (*loc. cit.*, n° 25) une, et une seule, hermitienne $a = A^{\frac{1}{2}}$ telle que $a^2 = A$. Si un groupe G admet pour invariant absolu un hermitien $H(x, \bar{x})$, le groupe transformé

$$H^{\frac{1}{2}}GH^{-\frac{1}{2}}$$

par l'hermitienne $H^{-\frac{1}{2}}$ est unitaire (*loc. cit.*, n° 31).

Tout cela rappelé; voici la proposition qui résout le problème :

THÉORÈME. — *Pour qu'un groupe n-aire Γ_t puisse, par un choix convenable de variables, être rendu réel et orthogonal, les conditions suivantes sont nécessaires et suffisantes :*

I. Γ_t possède deux invariants absolus, un hermitien $H(t, \bar{t})$ et une forme quadratique n-aire

$$[p_{jk} = p_{kj}] \quad P = \sum_{jk} p_{jk} t_j t_k$$

de déterminant un.

II. Γ_t ayant été rendu unitaire (en le transformant par

l'hermitienne H^{-1}), dans l'expression transformée P la matrice $P = [p_{jk}]$ symétrique est unitaire.

Si Γ_t possède plus d'une réalisante, les divers groupes G_x, G_y, \dots réels et orthogonaux, auxquels on ramène Γ_t , sont les transformés l'un de l'autre par des substitutions réelles et orthogonales. On peut donc ne pas considérer G_x, G_y, \dots comme distincts. Il suffira de se procurer, d'une manière quelconque, une seule réalisante.

Je construis effectivement cette dernière dans le cas particulier, assez étendu du reste, où, dans le groupe Γ_t , une substitution A au moins a toutes les racines de son équation caractéristique

$$|\rho E - A| = 0$$

distinctes.

Un résumé des présentes recherches a été inséré aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* du 17 mars 1902.

Je passe maintenant à la démonstration du théorème.

1. Je ne considère pas comme distincts deux groupes réels et orthogonaux, transformés l'un de l'autre par une substitution réelle et orthogonale.

Je nomme *réalisable* tout groupe n -aire qui devient réel et orthogonal après transformation par une substitution *réalisante* convenablement choisie. Je vais poursuivre la construction des groupes réalisables.

2. LEMME I. — *Des trois propriétés, réalité, unitarité, orthogonalité, que possède éventuellement une matrice A, deux quelconques assurent toujours la troisième.*

En effet, des trois relations

$$\begin{aligned} \bar{A} &= A, & \text{réalité,} \\ A'A &= E, & \text{orthogonalité,} \\ \bar{A}'A &= E, & \text{unitarité,} \end{aligned}$$

deux quelconques assurent toujours la troisième.

LEMME II. — *Toute matrice est le produit d'une unitaire par une hermitienne.*

Soit la matrice A . La matrice $\bar{A}'A$ est hermitienne (*loc. cit.*, n° 27) et sa racine carrée h (*loc. cit.*, n° 25) aussi est hermitienne. On a

$$\bar{A}'A = h^2 \quad \text{et} \quad h^{-1}\bar{A}'A h^{-1} = E \quad \text{ou} \quad (\overline{A h^{-1}})'A h^{-1} = E.$$

La matrice $A h^{-1} = u$ est donc unitaire et il vient

$$A = uh. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On a du reste aussi

$$A^{-1} = h^{-1}u^{-1}.$$

h^{-1} est hermitienne (*loc. cit.*, n° 24) et u^{-1} est unitaire. On peut donc dire aussi que toute matrice est le produit d'une hermitienne par une unitaire.

3. Considérons maintenant un groupe Γ_t , exprimé en n variables t_1, t_2, \dots, t_n . Par hypothèse, Γ_t est réalisable et, posant

$$t = r^{-1}[x],$$

on a un groupe G_x , exprimé en n variables x_1, \dots, x_n , lequel G_x est réel et orthogonal. La substitution r^{-1} sera dite *réalisante*.

G_x , étant réel et orthogonal, admet deux invariants absolus, savoir :

I. L'hermitien $E(x, \bar{x}) = \sum x \bar{x}$ (car toute substitution de G_x , étant réelle et orthogonale, est aussi unitaire, par le lemme I du 2°);

II. Le polynome quadratique $E(x, x) = \sum x^2$.

En vertu de la relation précédente

$$t = r^{-1}[x] \quad \text{ou} \quad x = r[t],$$

l'hermitien $E(x, \bar{x})$ devient l'hermitien $\bar{r}'r(t, \bar{t})$ et le polynome quadratique $E(x, x)$ devient le polynome quadratique

$$r'r(t, t) = \sum_{jk} p_{jk} t_j t_k = P(t, t),$$

où P désigne la matrice symétrique

$$\{k, j = 1, 2, \dots, n\} \quad P = [p_{jk}] = [p_{kj}].$$

4. Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant : *Tout groupe réalisable Γ_t possède deux invariants absolus, un hermitien et une forme quadratique.*

Cherchons si la réciproque est vraie.

5. Je dis que l'on peut, sans restreindre la généralité, n'envisager que des groupes réalisables Γ_t unitaires.

r étant une réalisante, posons, conformément au lemme II du n° 2,

$$r = uh.$$

L'invariant absolu hermitien, qui est, d'après le n° 3, $\bar{r}' r(t, \bar{t})$, devient

$$h^2(t, \bar{t}).$$

Transformons Γ_t par l'hermitienne h^{-1} . L'hermitien $h^2(t, \bar{t})$ devient l'hermitien $E(t, \bar{t})$ et, par conséquent, Γ_t devient unitaire.

C'est ce que je supposerai toujours dorénavant.

Cela revient à supposer unitaires la réalisante r , pour que $\bar{r}' r$ puisse être identique à E , et aussi la matrice symétrique $P = r' r$ (n° 3).

6. Nous allons montrer que *tout groupe unitaire Γ_t qui admet pour invariant absolu une forme quadratique*

$$\sum_{jk} p_{jk} t_j t_k, \quad p_{jk} = p_{kj},$$

où la matrice symétrique

$$P = [p_{jk}]$$

est unitaire, est réalisable.

Il suffira évidemment de construire une réalisante.

Cette proposition est bien la réciproque de celle du n° 4, car le second invariant absolu est déjà, par unitarité, l'hermitien $E(t, \bar{t})$.

7. La matrice unitaire symétrique P admet une canonisante (loc. cit., n° 22) unitaire λ et a pour forme canonique P_0 ,

$$P = \lambda^{-1} P_0 \lambda,$$

$$P_0 = |t_j, \quad c_j t_j|,$$

où $|c_j| = 1$ (loc. cit., n° 20, in fine).

Mettons en évidence les c_j égaux; on écrira, $i = \sqrt{-1}$,

$$\begin{aligned} c_1 = c_2 = c_3 = \dots = c_m &= e^{i\varphi}, \\ c_{m+1} = c_{m+2} = \dots = c_{m+m'} &= e^{i\psi}, \\ c_{m+m'+1} = \dots = c_{m+m'+m''} &= e^{i\omega}, \\ \dots\dots\dots \end{aligned}$$

$\varphi, \psi, \omega, \dots$ étant des arcs réels, tous distincts, compris entre 0 et 2π .

On vérifiera sans peine la proposition suivante :

LEMME. — *Pour qu'une substitution n-aire Λ soit échangeable à P_0 , il faut et il suffit que l'on ait*

$$\Lambda = L_m L_{m'} L_{m''} \dots,$$

où $L_m, L_{m'}, L_{m''}, \dots$ sont respectivement une m -aire, une m' -aire, une m'' -aire, ... quelconques, effectuées, savoir, respectivement,

$$\begin{array}{ll} L_m & \text{sur } t_1, t_2, \dots, t_m; \\ L_{m'} & \text{sur } t_{m+1}, \dots, t_{m+m'}; \\ L_{m''} & \text{sur } t_{m+m'+1}, \dots, t_{m+m'+m''}; \\ \dots & \dots \dots \dots, \dots, \dots \end{array}$$

Ce lemme résulte immédiatement de théories, bien connues, de M. Jordan.

8. Sont symétriques : P par hypothèse et P_0 comme canonique. Il vient (n° 7)

$$P = \lambda^{-1} P_0 \lambda = P' = \lambda' P_0 \lambda'^{-1}, \quad P_0 = \lambda \lambda' P_0 (\lambda \lambda')^{-1};$$

$\lambda \lambda'$ est échangeable à P_0 et l'on écrira

$$\Lambda = \lambda \lambda',$$

Λ ayant l'expression qui figure au lemme du n° 7.

9. Considérons maintenant la canonique unitaiee

$$\theta_0 = |t_j, d_j t_j|,$$

où (voir n° 7)

$$d_1 = d_2 = \dots = d_m = e^{\frac{i\varphi}{2}},$$

$$d_{m+1} = d_{m+2} = \dots = d_{m+m'} = e^{\frac{i\psi}{2}},$$

$$d_{m+m'+1} = \dots = d_{m+m'+m''} = e^{\frac{i\omega}{2}},$$

.....,

les arcs $\frac{\varphi}{2}, \frac{\psi}{2}, \frac{\omega}{2}, \dots$ sont tous inégaux.

On a évidemment $\Theta_0^2 = P_0$ et Λ est échangeable à Θ_0 .

Posons

$$\theta = \lambda^{-1} \theta_0 \lambda, \text{ comme } P = \lambda^{-1} P_0 \lambda;$$

on a aussi

$$\theta^2 = P.$$

Je dis que Θ est *symétrique*.

Considérons, en effet,

$$\theta' \theta^{-1} = \lambda' \theta_0 \lambda'^{-1} \lambda^{-1} \theta_0^{-1} \lambda = \lambda' \theta_0 \Lambda^{-1} \theta_0^{-1} \lambda$$

et, comme $\Lambda = \lambda \lambda'$ est échangeable à θ_0 ,

$$\theta' \theta^{-1} = \lambda' \Lambda^{-1} \lambda = E \text{ et } \theta' = \theta. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

10. On reprendra donc un groupe unitaire Γ_t ayant pour invariant absolu quadratique l'expression

$$P(t, t),$$

où la matrice unitaire symétrique $P = \Theta^2$.

Posons

$$t = \theta^{-1}[x] \text{ ou } x = \theta[t];$$

Γ_t se transforme en un groupe unitaire G_x , lequel admet pour invariant quadratique l'expression

$$\theta'^{-1} P \theta^{-1}(x, x) = \theta^{-1} \theta^2 \theta^{-1}(x, x) = E(x, x) = \sum x^2.$$

G_x est orthogonal; il est déjà unitaire, donc (lemme I du n° 2) G_x est réel. Γ_t est réalisable et Θ est une réalisante.

11. Nous avons, au n° 5, rendu Γ_t unitaire, en le transformant par l'hermitienne h^{-1} , h étant la racine carrée de son hermitien,

invariant absolu,

$$H(t, \bar{t}) = \bar{r}' r(t, \bar{t}).$$

Nous pouvons donc résumer toute la discussion précédente dans un théorème qui est la proposition annoncée au commencement du présent travail.

THÉORÈME. — *Pour qu'un groupe Γ_t puisse, par un choix convenable de variables, être rendu orthogonal et réel, les conditions suivantes sont nécessaires et suffisantes :*

1° Γ_t possède deux invariants absolus, un hermitien $H(t, \bar{t})$ et une forme quadratique n -aire, de déterminant un,

$$P = \sum_{jk} p_{jk} t_j t_k, \quad p_{jk} = p_{kj};$$

2° Γ_t ayant été rendu unitaire (en le transformant par l'hermitienne $H^{-\frac{1}{2}}$) dans l'expression transformée, P , la matrice n -aire symétrique

$$P = [p_{jk}]$$

est unitaire.

12. Γ_t satisfaisant aux conditions du théorème, nous avons construit la réalisante Θ , laquelle est connue dès qu'on possède la matrice P et une de ses canonisantes.

Existe-t-il pour Γ_t encore d'autres réalisantes?

Supposons qu'il en existe deux, r et s , de façon qu'en posant

$$x = r[t], \quad y = s[t],$$

on obtienne deux groupes G_x et G_y , tous deux réels et orthogonaux.

On aura (n° 3)

$$P(t, t) = r' r(t, t) = s' s(t, t), \quad r'^{-1} s' s r^{-1} = (sr^{-1})' sr^{-1} = 1;$$

la matrice $u = sr^{-1}$ est orthogonale. D'ailleurs, $y = u[x]$.

Je dis que u est réelle. Il suffira (lemme I du n° 2) de montrer que u est unitaire. Or, cela est évident, car u , transformant l'un dans l'autre les groupes réels et orthogonaux G_x et G_y , transforme l'un dans l'autre les deux hermitiens $E(x, \bar{x})$, et $E(y, \bar{y})$.

u étant réelle et orthogonale, les groupes G et \mathfrak{G} ne sont pas distincts (n° 1).

Il est donc inutile de chercher d'autres réalisantes que Θ .

Il suffira même de se procurer une réalisante r quelconque.

La manière la plus simple d'avoir r est de poser $x = r(t)$ de façon que l'expression $\sum x^2$ s'identifie avec le polynome quadratique P en t_1, \dots, t_n . r , bien entendu, doit être unitaire.

Alors, en effet, en transformant Γ_t par r^{-1} , on a un groupe G_x qui est unitaire, comme Γ_t , et, de plus, orthogonal; donc, G_x est aussi réel.

13. Le calcul effectif d'une réalisante unitaire ne présente aucune difficulté dans un cas particulier, assez étendu du reste. C'est lorsque le groupe réalisable unitaire Γ_t possède au moins une substitution A , pour laquelle l'équation caractéristique

$$f(\rho) = |\rho E - A| = 0$$

a ses n racines distinctes. Le polynome $f(\rho)$ est évidemment à coefficients réels.

Ces racines sont, par unitarité, de la forme $e^{i\alpha}$. A cause de la réalité du polynome $f(\rho)$, s'il y a une racine $e^{i\alpha}$, il y aura une racine $e^{-i\alpha}$. Tous les arcs réels α et $-\alpha$ sont distincts. Aucun d'eux n'est égal à π , car l'équation caractéristique, en vertu de $|A| = 1$, possède la racine -1 avec un degré pair de multiplicité.

Nous supposerons A mise sous forme canonique et nous distinguerons deux cas :

$$\begin{aligned} n = 2m &= \text{pair,} \\ n = 2m + 1 &= \text{impair.} \end{aligned}$$

14. Prenons $n = 2m$. Eu égard à ce qui vient d'être dit, on peut écrire

$$A = \begin{vmatrix} y_l & y_l e^{i\alpha_l} \\ z_l & z_l e^{-i\alpha_l} \end{vmatrix} \quad l = 1, 2, \dots, m,$$

où

$$t_1 = y_1, \quad t_2 = z_1, \quad t_3 = y_2, \quad t_4 = z_2, \quad \dots;$$

les arcs α sont tous distincts; aucun d'eux n'est ni 0 ni π .

Le polynome quadratique P est un invariant absolu vis-à-vis

de A. On vérifie de suite que

$$P = 2 \sum_l p_l y_l z_l$$

et l'on a la matrice symétrique

$$P = \begin{pmatrix} 0 & p_1 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ p_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & p_2 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & p_2 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots \end{pmatrix}.$$

Par hypothèse,

$$1 = |P| = (-1)^m \prod_l p_l^2.$$

$$(1) \quad \prod_l p_l^2 = (-1)^m.$$

Par unitarité on a, par un calcul facile,

$$\bar{P}'P = \begin{pmatrix} |p_1|^2 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & |p_2|^2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & |p_3|^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = E$$

$$(2) \quad 1 = |p_1| = |p_2| = \dots = |p_m|,$$

$$p_l = e^{i\varpi_l},$$

$\varpi_l =$ arc réel compris entre 0 et 2π . Eu égard à (1), on a

$$2 \sum_l \varpi_l = m\pi = 2M\pi, \quad M = \text{entier}.$$

15. Introduisons maintenant une transformation

$$t = q[x], \quad |q| = 1$$

en posant

$$y_l = \mu_l \frac{x_l + ix'_l}{\sqrt{2}}, \quad z_l = \mu_l \frac{ix_l + x'_l}{\sqrt{2}}.$$

La condition $|q| = 1$ donne

$$(3) \quad \prod_l \mu_l^2 = 1,$$

et l'unitarité donne, par un calcul aisé,

$$1 = \mu_l \bar{\mu}_l = |\mu_l|^2, \quad |\mu_l| = 1, \quad \mu_l = e^{i\varphi_l}.$$

Le polynome P devient

$$P_1 = \sum_l p_l \mu_l^2 (x_l^2 + x_l'^2).$$

q est une réalisante dès que P_1 est, à un facteur constant K près, la somme des carrés des variables x et x' (n° 12). Il faut donc déterminer les paramètres μ par la condition

$$(4) \quad K = p_l \mu_l^2 = e^{i(\varpi_l + 2\varphi_l)};$$

sous le bénéfice de (3), (4) donne

$$\prod_l p_l = K^m,$$

et, eu égard à (1),

$$(5) \quad K^{2m} = (-1)^m.$$

Si m est pair, on prendra, pour avoir (4),

$$K = 1, \quad \varphi_l = -\frac{\varpi_l}{2}.$$

Si m est impair, on prendra, à cause de (4),

$$K = i, \quad \varphi_l = -\frac{\varpi_l}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

La réalisante est construite.

16. Supposons enfin que n est impair, $n = 2m + 1$.

On écrira, eu égard aux explications du n° 13, et remarquant que 1 est racine de l'équation caractéristique,

$$A = \begin{vmatrix} t_0 & t_0 \\ y_l & y_l e^{i\alpha_l} \\ z_l & z_l e^{-i\alpha_l} \end{vmatrix} \quad l = 1, 2, \dots, m,$$

$y_1 = t_1, z_1 = t_2, y_2 = t_3, \dots$; les arcs réels α sont tous distincts, compris entre 0 et 2π et $\neq 0, 2\pi$ ou π .

Comme au n° 14, on voit que le polynome P est

$$P = p_0 t_0^2 + 2 \sum p_l y_l u_l;$$

la matrice P est

$$P = \begin{pmatrix} p_0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & p_1 & \dots \\ 0 & p_1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

$$1 = |P| = p_0 (-1)^m \prod_l p_l^2,$$

$$(6) \quad \prod_l p_l^2 = (-1)^m p_0^{-1}.$$

Par unitarité,

$$1 = p_0 \bar{p}_0 = |p_0|^2 = p_l \bar{p}_l = |p_l|^2,$$

$$|p_0| = |p_l| = 1, \quad p_0 = e^{i\varpi_0}, \quad p_l = e^{i\varpi_l},$$

les arcs ϖ étant compris entre 0 et 2π . Eu égard à (6),

$$\varpi_0 + 2 \sum_l \varpi_l = m\pi + 2M\pi, \quad M = \text{entier.}$$

17. Introduisons maintenant une transformation

$$t = q[x], \quad |q| = 1,$$

en posant

$$t_0 = \mu_0 x_0,$$

$$y_l = \mu_l \frac{x_l + ix'_l}{\sqrt{2}}, \quad x_l = \mu_l \frac{ix_l + x'_l}{\sqrt{2}}.$$

La condition $|q| = 1$ donne

$$(7) \quad 1 = \mu_0 \prod_l \mu_l^2, \quad \prod_l \mu_l^2 = \mu_0^{-1}.$$

L'unitarité donne

$$1 = \mu_0 \bar{\mu}_0 = |\mu_0|^2 = \mu_l \bar{\mu}_l = |\mu_l|^2,$$

$$|\mu_0| = |\mu_l| = 1; \quad \mu_0 = e^{i\varphi_0}, \quad \mu_l = e^{i\varphi_l}.$$

Le polynome P devient

$$P_1 = p_0 \mu_0^2 x_0^2 + i \sum_l p_l \mu_l^2 (x_l^2 + ix'_l).$$

q est une réalisante dès que

$$(8) \quad p_0 \mu_0^2 = ip_l \mu_l^2 = e^{i(\varpi_0 + 2\varphi_0)} = ie^{i(\varpi_l + 2\varphi_l)}.$$

Eu égard à (6) et (7), il vient

$$p_0^m \mu_0^{2m} = i^m \mu_0^{-1} \prod_l p_l, \quad i^m \prod_l p_l = p_0^m \mu_0^{2m+1},$$

(9) $(p_0 \mu_0^2)^{2m+1} = 1.$

On prendra $p_0 \mu_0^2 = 1$, et, pour satisfaire à (8),

$$\varphi_0 = -\frac{\varpi_0}{2}, \quad \varphi_l = -\frac{\varpi_l}{2}.$$

18. Si, dans toute substitution du groupe réalisable, l'équation caractéristique a des racines multiples, le calcul d'une réalisante est analogue, mais beaucoup plus compliqué.
