BULLETIN DE LA S. M. F.

L. LECORNU

Sur le mouvement vertical d'un projectile dans un milieu résistant

Bulletin de la S. M. F., tome 30 (1902), p. 202-207

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1902__30__202_0>

SUR LE MOUVEMENT VERTICAL D'UN PROJECTILE DANS UN MILIEU RÉSISTANT;

Par M. L. Lecornu.

La hauteur à laquelle s'élève un corps pesant projeté verticalement de bas en haut dépend de sa vitesse initiale, de sa masse et de la résistance de l'air. Parmi plusieurs projectiles sphériques de même dimension, lancés avec la même vitesse initiale, le plus dense est évidemment celui qui doit monter le plus haut; mais, au lieu de supposer connue la vitesse initiale, on peut se donner le travail dépensé pour créer cette vitesse (par exemple, au moyen de la détente d'un ressort), et les choses se passent alors d'une façon moins simple. Si l'on prend une masse infiniment légère, une dépense finie de travail lui communique une vitesse infiniment grande : la résistance de l'air, pourvu qu'elle croisse sans limite avec la vitesse, absorbe, au bout d'un parcours infiniment petit, la force vive initiale, et la hauteur d'ascension a une limite nulle. Si l'on prend, au contraire, une masse infiniment grande, la vitesse initiale est infiniment petite et, dans ce cas encore, le mobile ne peut s'élever. On conçoit, d'après cela, que, pour un projectile de figure donnée et pour chaque valeur du travail dépensé au départ, il doive exister une masse correspondant au maximum d'ascension. Je me propose de calculer cette masse dans l'hypothèse d'une résistance proportionnelle à une puissance constante de la vitesse.

Soit m la masse du corps et soit v sa vitesse au bout du parcours s. Je représente la résistance de l'air par $\lambda g v^{2p}$, λ et p désignant deux constantes positives, d'ailleurs quelconques. L'équation du mouvement peut s'écrire

$$mv\,dv = -mg\,ds - \lambda g v^{2p}\,ds;$$

d'où

$$g\,ds = -\frac{mv\,dv}{m + \lambda v^{2p}}.$$

Si v_0 est la vitesse initiale, la hauteur h à laquelle parvient le mobile est

$$h = \frac{m}{g}\int_0^{v_0} \frac{v\,dv}{m + \lambda v^{2p}},$$

ou bien, en posant $v^2 = v_0^2 x$ et désignant par T le travail $\frac{mv_0^2}{2}$ nécessaire pour créer la vitesse initiale,

$$h = \frac{T}{g}\int_0^1 \frac{dx}{m + \lambda v_0^{2p} x^p}.$$

Faisons

$$\lambda v_0^{2p} = \frac{m}{\alpha},$$

d'où

$$(1) \qquad m = \lambda^{\frac{1}{p+1}} (2T)^{\frac{p}{p+1}} \alpha^{\frac{1}{p+1}}.$$

Il vient

$$(2) \qquad h = \frac{1}{2g}\left(\frac{2T}{\lambda}\right)^{\frac{1}{p+1}} \alpha^{\frac{p}{p+1}} \int_0^1 \frac{dx}{\alpha + x^p}.$$

Il s'agit de choisir α de façon à rendre maximum le produit

$$\alpha^{\frac{p}{p+1}} \int_0^1 \frac{dx}{\alpha + x^p}.$$

En égalant à zéro la dérivée de ce produit prise par rapport à α, l'on trouve

$$p\int_0^1 \frac{dx}{\alpha + x^p} = (p+1)\alpha \int_0^1 \frac{dx}{[\alpha + x^p]^2}.$$

Mais l'intégration par parties donne

$$(3) \qquad \int_0^1 \frac{dx}{\alpha + x^p} = \frac{1}{1+\alpha} + p\int_0^1 \frac{x^p\,dx}{[\alpha + x^p]^2} = \frac{1}{1+\alpha} + p\int_0^1 \frac{dx}{\alpha + x^p} - p\alpha\int_0^1 \frac{dx}{[\alpha + x^p]^2},$$

ce qui permet de ramener l'équation précédente à la forme très simple

$$(4) \qquad \int_0^1 \frac{dx}{\alpha + x^p} = \frac{p+1}{\alpha + 1}.$$

Cette équation détermine le coefficient α. On peut l'écrire

$$(5) \qquad \int_0^1 \left[\frac{\alpha + 1}{\alpha + x^p} - (p+1)\right] dx = 0.$$

La dérivée, par rapport à α, de la fonction entre crochets est

$\frac{x^p - 1}{(\alpha + x^p)^2}$. Comme x demeure comprise entre zéro et un, cette dérivée est constamment négative. L'intégrale (5) décroît donc à mesure que l'on fait croître α. Pour $\alpha = 0$, elle se réduit à

$$\int_0^1 x^{-p}\,dx - (p+1).$$

Cete valeur est égale à $+\infty$ ou à $\frac{1}{1-p}$ suivant que p est supérieur ou inférieur à l'unité : dans tous les cas, l'intégrale est positive pour les très petites valeurs de α. Pour $\alpha = \infty$, elle tend vers la valeur négative $-p$. On voit, d'après cela, qu'il existe toujours une racine positive, et une seule, de l'équation (4). On peut, en outre, remarquer que la fonction figurant entre crochets dans l'intégrale (5), égale à $\frac{1}{\alpha} - p$ pour $x = 0$ et à $-p$ pour $x = 1$, décroît constamment quand x varie de 0 à 1, et que, par suite, l'intégrale ne peut s'annuler si la différence $\frac{1}{\alpha} - p$ n'est pas positive. La racine α est donc certainement inférieure à $\frac{1}{p}$.

Pour les valeurs commensurables de p, la quadrature $\int_0^1 \frac{dx}{\alpha + x^p}$ s'effectue sans difficulté; mais on obtient ainsi une fonction transcendante et compliquée, dont la connaissance ne peut guère servir pour la résolution de l'équation (4). Le procédé suivant, applicable aussi bien pour les valeurs incommensurables que pour les valeurs commensurables de p, paraît beaucoup plus pratique.

Partageons l'intervalle de zéro à un en n parties égales. Comme la fonction $\frac{1}{\alpha + x^p}$ est constamment décroissante, si, pour le $k^{\text{ième}}$ intervalle, on substitue successivement à cette fonction chacune des valeurs constantes $\frac{1}{\alpha + \left(\frac{k-1}{n}\right)^p}$ et $\frac{1}{\alpha + \left(\frac{k}{n}\right)^p}$, on diminue ou l'on augmente l'intégrale. La racine cherchée doit donc vérifier les deux inégalités

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha + \left(\frac{1}{n}\right)^p} + \ldots + \frac{1}{\alpha + \left(\frac{n-1}{n}\right)^p} > n\,\frac{p+1}{\alpha+1}$$

et

$$\frac{1}{\alpha + \left(\frac{1}{n}\right)^p} + \ldots + \frac{1}{\alpha + 1} < n\frac{p+1}{\alpha+1},$$

Multiplions les deux membres de chaque inégalité par $\alpha + 1$ et remplaçons $\dfrac{\alpha + 1}{\alpha + \left(\frac{k}{n}\right)^p}$ par $1 + \dfrac{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^p}{\alpha + \left(\frac{k}{n}\right)^p}$.

Nous obtenons

$$\frac{1}{\alpha} + \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^p}{\alpha + \left(\frac{k}{n}\right)^p} > p,$$

$$\sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^p}{\alpha + \left(\frac{k}{n}\right)^p} < p.$$

En mettant $=$ à la place des signes $>$ et $<$, on a deux équations algébriques donnant pour α des valeurs approchées respectivement par excès et par défaut. L'approximation est d'autant plus grande que le nombre arbitraire n est plus élevé. En particulier, pour $n = 2$, la seconde inégalité montre que α est supérieur à $\frac{1}{p} - \left(\frac{1}{2}\right)^p \frac{p+1}{p}$. Nous avons vu précédemment que α est inférieur à $\frac{1}{p}$.

Après avoir obtenu, par ce moyen ou par un autre, une première valeur de la racine, on peut avoir recours à la méthode des approximations successives et opérer, à cet effet, de la manière suivante :

La valeur provisoire α substituée dans l'équation (4) laisse subsister entre les deux membres une petite différence ε et l'on a

$$\int_0^1 \frac{dx}{\alpha + x^p} = \frac{p+1}{\alpha+1} + \varepsilon.$$

Soit $\alpha + \Delta\alpha$ la valeur exacte. En traitant $\Delta\alpha$ comme une quantité infiniment petite, on peut écrire

$$\Delta\alpha \int_0^1 \frac{dx}{(\alpha + x^p)^2} = \frac{p+1}{(\alpha+1)^2}\Delta\alpha + \varepsilon,$$

ou bien, en tenant compte des équations (3) et (4),

$$\Delta\alpha = \varepsilon \times \frac{\alpha(\alpha+1)^2}{p(1-\alpha)}.$$

Telle est l'expression du terme correctif $\Delta\alpha$ en fonction de l'erreur ε.

Le nombre α est susceptible d'une interprétation physique assez remarquable. Soit k la limite vers laquelle tendrait la vitesse du mobile, tombant verticalement dans l'air. On obtient cette limite en écrivant que, pour $v = k$, la résistance $\lambda g k^{2p}$ fait équilibre à la pesanteur mg. On a donc $\lambda k^{2p} = m$. Comme α est égal par définition à $\frac{m}{\lambda v_0^{2p}}$, on peut écrire $\alpha = \left(\frac{k}{v_0}\right)^{2p}$. Ce nombre représente donc la puissance $2p$ du rapport entre la vitesse limite k et la vitesse initiale v_0.

Dès que α est calculé, le problème se trouve entièrement résolu. Nous avons déjà obtenu la masse m qui, d'après la formule (1), a pour valeur

$$m = (\lambda\alpha)^{\frac{1}{p+1}}(2\text{T})^{\frac{p}{p+1}}.$$

Le carré de la vitesse initiale est

$$v_0^2 = \frac{2\text{T}}{m} = \left(\frac{2\text{T}}{\lambda\alpha}\right)^{\frac{1}{p+1}}.$$

La hauteur d'ascension se tire de la formule (2), d'après laquelle

$$h = \frac{1}{2g}\left(\frac{2\text{T}}{\lambda}\right)^{\frac{1}{p+1}} \alpha^{\frac{p}{p+1}} \frac{p+1}{\alpha+1}.$$

Si l'on remplace $\left(\frac{2\text{T}}{\lambda}\right)^{\frac{1}{p+1}}$ par $v_0^2\alpha^{\frac{1}{p+1}}$, on obtient

$$h = \frac{v_0^2}{2g}\,\frac{(p+1)\alpha}{\alpha+1};$$

$\frac{v_0^2}{2g}$ est la hauteur H qui serait atteinte dans le vide avec la même vitesse initiale v_0. Comme αp, ainsi que nous l'avons vu, est inférieur à l'unité; il en est de même du rapport $\frac{h}{H}$, résultat qu'il était aisé de prévoir.

La résistance du milieu, à l'instant du départ, a pour expression $\lambda g v_0^{2p}$, c'est-à-dire $\frac{mg}{\alpha}$: on voit qu'elle est égale au poids divisé par α, ce qui donne une nouvelle interprétation du nombre α.

Examinons, en particulier, le cas où la résistance varie proportionnellement au carré de la vitesse. L'exposant p est alors égal à l'unité et l'équation (4) devient

$$\int_0^1 \frac{dx}{\alpha + x} = \frac{2}{\alpha + 1}$$

ou

$$\mathrm{Log}\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{2}{\alpha + 1}.$$

L'équation $\mathrm{Log}(1 + \beta) = \frac{2\beta}{1 + \beta}$, déduite de la précédente en remplaçant α par $\frac{1}{\beta}$, admet une racine positive qui est sensiblement $\beta = 3,92$. Prenons, en chiffres ronds, avec une erreur de 2 pour 100, $\beta = 4$, d'où $\alpha = \frac{1}{4}$ et appliquons, dans ces conditions, les formules générales établies ci-dessus; nous pouvons alors énoncer les résultats suivants :

Si la résistance de l'air est proportionnelle au carré de la vitesse, et si on lance verticalement, de bas en haut, avec une même dépense de travail, T, *des mobiles pesants ayant même forme extérieure, le mobile pour lequel la hauteur d'ascension est la plus grande vérifie les conditions que voici :*

Sa masse est égale à $\sqrt{\frac{1}{2}\lambda T}$ *et le carré de sa vitesse initiale est égal à* $2\sqrt{\frac{2T}{\lambda}}$;

Sa vitesse initiale est double de la vitesse limite vers laquelle il tendrait en tombant verticalement;

Sa hauteur d'ascension est égale aux $\frac{2}{5}$ *de la hauteur à laquelle il parviendrait dans le vide en vertu de sa vitesse initiale;*

La résistance qu'il éprouve de la part de l'air, à l'instant initial, est quadruple de son poids.