BULLETIN DE LA S. M. F.

J. HADAMARD

Sur une classe d'équations différentielles

Bulletin de la S. M. F., tome 30 (1902), p. 208-220
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1902__30__208_0>

SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES;

Par M. HADAMARD.

1. Les équations que je vais considérer appartiennent à la catégorie des équations du second ordre dans lesquelles y'' est rationnel en y'. Les remarques que j'ai à présenter à leur égard sont, comme on va le voir, tout à fait élémentaires et presque évidentes par elles-mêmes, et ne peuvent, par conséquent, prétendre apporter un complément notable aux connaissances que les beaux travaux de M. Painlevé ont permis d'acquérir sur ce sujet. Leur simplicité même m'a paru, toutefois, leur donner un intérêt suffisant pour que je les mentionne ici.

Parmi les équations différentielles du second ordre

$$(1) \qquad y'' = \mathrm{R}(y', x, y) = \frac{\mathrm{P}(y', x, y)}{\mathrm{Q}(y', x, y)},$$

telles que y'', exprimé en fonctions de x, y, y', soit rationnel par rapport à y', envisageons, comme l'a fait à plusieurs reprises M. Painlevé (1), celles dont l'intégrale générale peut être mise sous forme algébrique par rapport aux constantes d'intégration a et b, c'est-à-dire sous la forme

$$(2) \qquad \mathrm{F}(x, y, a, b) = 0,$$

F étant un polynome entier en a, b dont les coefficients sont des fonctions de x et de y.

Ces fonctions, ainsi que celles qui figurent dans la fonction R, sont d'ailleurs tout à fait quelconques, analytiques ou non.

Dans le second cas, cependant, nous leur imposerons certaines conditions simples, toujours vérifiées par les fonctions analytiques : outre que nous admettrons l'existence de leurs dérivées partielles, au moins jusqu'à un ordre suffisamment élevé, nous exclurons le cas où une équation aux dérivées partielles du second ordre, algébrique par rapport à ces fonctions et ne contenant d'autre élément variable qu'elles et leurs dérivées, serait vérifiée constamment dans une certaine région du plan des xy, tout en ne l'étant pas ailleurs.

(1) *Voir* notamment *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXIX, 1894, p. 37, et t. CXXIV, 1897, p. 36.

Si l'on considère x, y comme données et a, b comme des coordonnées courantes, l'équation (2) représente une courbe algébrique C, lieu du point (a, b) tel que l'intégrale passe par un point (x, y) donné. Je remarquerai, en passant, qu'il y aurait sans doute intérêt à étudier l'équation différentielle de ces courbes, à savoir celle qui définit b comme fonction de a, lorsque x et y sont regardés comme des constantes arbitraires, et que l'on peut nommer la *corrélative* de l'équation différentielle donnée. Cette équation (définie, à une transformation ponctuelle près, lorsqu'on donne l'équation différentielle primitive) se déduit, en effet, de la première par la transformation de contact que définit l'équation (2) et qui se réduit à la transformation par polaires réciproques lorsque celle-ci a la forme

$$ax + by + 1 = 0,$$

c'est-à-dire lorsque l'équation donnée est $y'' = 0$.

D'après cela, il serait naturel de nommer les courbes C les *intégrales corrélatives* de l'équation (1).

2. D'après la forme de cette dernière, il n'existe qu'une intégrale passant par un point donné et y admettant une tangente donnée. Pour déterminer cette intégrale, nous devons adjoindre à l'équation (2) la condition

$$\frac{\partial F}{\partial x} + y' \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \tag{3}$$

laquelle, considérée comme relation entre a et b, représente une seconde courbe algébrique. Il peut arriver que cette dernière ait avec C plusieurs points communs (a_0, b_0), (a_1, b_1), ..., (a_{h-1}, b_{h-1}); mais, dans ce cas, tous les couples de valeurs de a, b variables avec y' ainsi obtenus correspondent à la même courbe intégrale.

Il est, dès lors, aisé de s'arranger de façon que cette circonstance n'ait pas lieu. Les quantités

$$a_i, \quad b_i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, h-1)$$

sont, en effet, constantes sur la courbe intégrale en question : ce sont des fonctions de a_0, b_0. Il en est de même de deux quelconques de leurs fonctions symétriques. Or, celles-ci sont des fonctions rationnelles de y'. D'ailleurs, on peut évidemment les prendre distinctes, c'est-à-dire telles que leur déterminant fonctionnel par rapport à a_0, b_0 soit différent de zéro.

Autrement dit, comme l'avait déjà constaté M. Painlevé, l'équation donnée admet deux intégrales premières rationnelles en y'.

3. Le raisonnement précédent est rigoureux si cette équation et, par suite, l'intégrale (2) sont analytiques. Dans le cas contraire, il demande, semble-t-il, à être présenté avec un peu plus de détails. Alors, en effet, l'équation (2) n'aura de sens qu'autant qu'elle représentera une courbe réelle. Or, ceci ne peut évidemment avoir lieu que pour des valeurs convenablement choisies (que nous appellerons, pour abréger, *valeurs acceptables*) de a et de b.

L'hypothèse la plus naturelle à cet égard est de supposer que ces valeurs acceptables sont les valeurs réelles ; mais, ce qu'il y a de certain, c'est qu'elles ne peuvent pas être quelconques. Elles ne peuvent pas remplir, indépendamment l'une de l'autre, deux aires prises dans le plan des a et dans celui des b respectivement : en un mot, elles ne peuvent pas dépendre de deux paramètres complexes, ce qui équivaut à quatre paramètres réels, mais de deux paramètres réels seulement.

Dans ces conditions, on peut craindre qu'un ou plusieurs des points communs aux courbes (2) et (3) correspondent à des valeurs *non acceptables* de a et de b, lesquelles ne donneraient aucune courbe intégrale : le raisonnement serait alors en défaut.

Il est aisé de répondre à cette objection en examinant la question d'un peu plus près.

Si, aux équations (2) et (3), nous adjoignons celle qu'on obtient en différentiant deux fois (2), savoir

$$(4)\qquad \frac{\partial F}{\partial y}y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}y'^2 = 0,$$

nous devons pouvoir déduire de là l'équation (1), on encore l'équation

$$(5)\qquad \varphi \equiv \frac{\partial F}{\partial y}R(y', x, y) + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,dy}y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}y'^2 = 0.$$

Si, dans celle-ci, préalablement multipliée par $Q(y', x, y)$, on remplace y' par sa valeur tirée de (3), on aura une équation que l'on pourra rendre entière par rapport à a, b en la multipliant par une certaine puissance de $\frac{\partial F}{\partial y}$. L'égalité ainsi obtenue

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^p (\varphi P) = 0, \qquad y' = -\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y}$$

devra être vérifiée pour toutes les valeurs *acceptables* de a, b satisfaisant à l'équation (2). Ces valeurs étant en nombre infini, l'égalité en question doit résulter de (2). Autrement dit, quel que soit y', les points d'intersection des courbes (2), (3) sont situés sur la courbe représentée par l'équation

$$(5') \qquad P\varphi\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^p = 0.$$

On peut, dès lors, appliquer un théorème connu d'après lequel le premier membre de celle-ci est une combinaison de ceux de (2) et de (3), si l'on prend soin de lui adjoindre un facteur $\left[\text{tel que } \left(\frac{\partial F}{\partial a}\right)^q\right]$ s'annulant, avec un ordre suffisant de multiplicité, aux points doubles de (2). Nous arrivons donc à l'identité

$$(6) \qquad P\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^p \left(\frac{\partial F}{\partial a}\right)^q \varphi = AF + B\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y'\right),$$

A, B étant des polynomes entiers en a, b dont les coefficients seront rationnels en y'.

Sur une courbe intégrale (correspondant à $a = a_0$, $b = b_0$), $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y'$ n'est autre que la dérivée totale $\frac{dF}{dx}$, et φ que la dérivée totale $\frac{d^2F}{dx^2}$, de sorte que $F(x, y, a, b)$ satisfera à une équation linéaire de la forme

$$(7) \qquad \frac{d^2F}{dx^2} = A'F + B'\frac{dF}{dx},$$

A' et B' étant finis, continus et dérivables sauf pour certaines valeurs particulières de y' (celles qui annulent P ou les dénominateurs des coefficients de A et de B) et pour les valeurs de a, b qui annuleront $\frac{\partial F}{\partial y}$ ou $\frac{\partial F}{\partial a}$.

Cette dernière circonstance ne se présentera pas si nous donnons à a et à b les valeurs a_i, b_i ($i = 1, 2, \ldots, h-1$) définies tout à l'heure (puisque celles-ci sont variables avec y'). Comme, d'ailleurs, on annule ainsi F et $\frac{dF}{dx}$ au point considéré, F sera nul le long de la courbe intégrale (a_0, b_0) issue de ce point. Il en résulte qu'on retrouverait les mêmes valeurs de a_i, b_i en partant d'un autre point quelconque de cette courbe : ce que nous nous proposions de démontrer.

4. Nous pourrons substituer aux anciennes constantes les deux intégrales premières dont l'existence nous est démontrée, et prendre

$$\left\{\begin{aligned} a &= r_1(y', x, y), \\ b &= r_2(y', x, y), \end{aligned}\right. \tag{8}$$

r_1 et r_2 étant rationnels en y'. Ces deux formules nous donneront bien, par élimination de y', une équation algébrique de la forme (2), la courbe C correspondante étant unicursale [1].

Cette fois, la courbe (3) ne coupe plus C qu'en un seul point variable avec y'. Tout autre point commun devra vérifier les deux relations

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 0. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Plusieurs hypothèses sont alors possibles :

1° Le point en question peut être un point double de C : soit

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial b} = 0; \tag{10}$$

et, en effet, tout point double de la courbe représentée par

---

[1] Grâce à la transformation précédente, chaque courbe intégrale ne correspond qu'à un seul système de valeurs de a et de b.

Par contre, à la suite de la même transformation, il peut se faire qu'à un système de valeurs de a, b corresponde non une seule courbe intégrale, mais l'ensemble de plusieurs de ces courbes : ce qui est, d'ailleurs, sans influence sur les raisonnements du texte.

l'équation (2), pour un système de valeurs *quelconque* de x et de y, vérifie les relations (9). Il suffit, pour s'en convaincre, de différentier (2) en regardant a et b comme fonctions de x et de y, ce qui donne

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x}=0,\\ &\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial y}=0,\end{aligned}\right.$$

et, par conséquent $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y}=0$, moyennant (10).

2° S'il n'en est pas ainsi, les équations (11), se réduisant, en vertu de (9), à

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x}=0,\\ &\frac{\partial F}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial y}=0,\end{aligned}\right.$$

montrent que a et b sont fonctions l'un de l'autre: *le point* (a, b), *s'il n'est pas fixe, décrit une courbe fixe* Γ; et, de plus, les équations (12) montrent que *cette courbe est tangente à* C, *quels que soient x et y.*

5. A ces hypothèses générales s'en subordonnent une série d'autres plus particulières.

Il peut arriver, par exemple, que les courbes (9) soient tangentes à C en un point ordinaire. S'il en est ainsi, Γ et C ont, en ce point, un contact du second ordre.

En effet, on devra alors avoir sur C et, par suite, sur Γ,

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial a}da+\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial b}db=0,\\ &\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial a}da+\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial b}db=0.\end{aligned}\right.$$

Or, les équations (9) étant vérifiées en tout point de Γ, on a, tout le long de cette courbe,

$$dF=\frac{\partial F}{\partial a}da+\frac{\partial F}{\partial b}db,$$

relation que l'on peut différentier pour obtenir d^2F. On reconnaît alors que, dans cette dernière différentielle, la partie qui dépend de dx et de dy disparaît en vertu de (13).

On voit immédiatement comment cette conclusion s'étendrait, dans le cas où la courbe C et les courbes (9) auraient un nombre quelconque d'intersections confondues. L'ordre du contact entre C et Γ serait alors égal au nombre de celles-ci.

Mais nous allons retrouver le même résultat en revenant d'abord au cas opposé, celui d'un point singulier de C.

Il suffit alors de partir de cette remarque (assez simple pour être, sans doute, depuis longtemps familière à ceux qui s'occupent des fonctions algébriques) que, pour toute courbe algébrique C dépendant des paramètres arbitraires x, y et représentée par une équation de la forme (2), les courbes

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \tag{9}$$

sont des adjointes de C (pourvu que x, y aient des valeurs arbitraires et non pas particulières).

En effet, si nous considérons une singularité quelconque de C et que η soit la variable caractéristique d'un cycle ayant pour origine ce point, on pourra prendre cette variable telle que a et b soient des fonctions dérivables de x, y, η. [Par exemple, si C est unicursale et représentée par les équations (8), on prendra $\eta = y' - y'_0$, en désignant par y'_0 la valeur de y' correspondant au point singulier considéré.] On pourra alors écrire les relations (11) et transformer par leur moyen l'intégrale

$$\int_C \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial b}}\, da = \int \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial b}} \frac{\partial a}{\partial \eta}\, d\eta,$$

qui deviendra

$$\int \left(-\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\frac{\partial F}{\partial a}}{\frac{\partial F}{\partial b}} \frac{\partial a}{\partial x} \right) \frac{\partial a}{\partial \eta}\, d\eta = \int \left(\frac{\partial b}{\partial \eta} \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial \eta} \frac{\partial b}{\partial x} \right) d\eta.$$

Cette intégrale sera donc finie sur tous les cycles singuliers (a et b étant, comme il est légitime, supposés finis aux origines de ces cycles) et, par conséquent, la courbe $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ est adjointe de C.

Ceci assigne un certain minimum à l'ordre du contact des courbes (9) avec chacun des cycles singuliers de C. D'autre part, ce minimum ne sera dépassé que si les quantités

$$(14)\qquad \left(\frac{\frac{\partial b}{\partial \eta}}{\frac{\partial a}{\partial \eta}}\frac{\partial a}{\partial x}-\frac{\partial b}{\partial x}\right)\frac{\partial a}{\partial \eta},\qquad \left(\frac{\frac{\partial b}{\partial \eta}}{\frac{\partial a}{\partial \eta}}\frac{\partial a}{\partial y}-\frac{\partial b}{\partial y}\right)\frac{\partial a}{\partial \eta}$$

(où nous supposons la tangente du cycle non parallèle à l'axe des b) s'annulent. Ceci a lieu :

1° Lorsque $\frac{\frac{\partial b}{\partial \eta}}{\frac{\partial a}{\partial \eta}}\frac{\partial a}{\partial x}-\frac{\partial b}{\partial x}$ et $\frac{\frac{\partial b}{\partial \eta}}{\frac{\partial a}{\partial \eta}}\frac{\partial a}{\partial y}-\frac{\partial b}{\partial y}$ sont nuls. Le point (a, b), s'il n'est pas fixe, décrira alors (pour les mêmes raisons que tout à l'heure) une courbe fixe Γ, constamment tangente à C et l'ordre du contact de celle-ci avec les courbes (9) devra être augmenté ([1]) de l'ordre du contact qu'elle a avec Γ (ce dernier ne pouvant, d'ailleurs, être supérieur à 1 que si le cycle est à courbure finie, sans quoi le rayon de courbure de C serait constamment nul).

Il est clair qu'en considérant, au lieu d'un point singulier, un point ordinaire de C, commun à cette courbe et aux courbes (9), on retombe ainsi sur le résultat énoncé tout à l'heure.

2° Les quantités (14) s'annulent encore pour $\frac{\partial a}{\partial \eta} = 0$, c'est-

([1]) En effet, soit p l'ordre du contact de C et de Γ, l'équation de cette dernière étant $\varphi(a, b) = 0$. La fonction φ s'annulera, ainsi que ses p premières dérivées par rapport à η, pour $\eta = 0$; et il en sera de même de $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, de sorte que la quantité

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x}$$

sera d'ordre infinitésimal $p+1$ en η.

Dès lors $\left(\text{si } \frac{\partial \varphi}{\partial b} \text{ et } \frac{\partial a}{\partial x} \text{ ne sont pas nuls avec } \eta\right)$, $\frac{\partial \varphi}{\partial a}+\frac{\partial \varphi}{\partial b}\frac{\frac{\partial b}{\partial \eta}}{\frac{\partial a}{\partial \eta}}$ étant d'ordre p, l'expression $\frac{\partial b}{\partial x}-\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\frac{\partial b}{\partial \eta}}{\frac{\partial a}{\partial \eta}}$ sera aussi d'ordre p exactement.

à-dire lorsque le cycle est d'ordre ω supérieur à 1. L'ordre du contact des courbes (9) devra alors être augmenté de $\omega - 1$.

On peut encore dire que, si un point singulier de C ne décrit pas une courbe fixe tangente à C, il absorbe un nombre d'intersections de celle-ci avec les courbes (9) précisément égal au nombre d'unités dont il abaisse la classe de C.

Pour $\omega = 2$ on a un point de rebroussement de C. Un tel point, par conséquent, sera un point de contact de cette courbe avec la courbe (3), absorbant trois intersections de ces deux courbes (et cela quel que soit y').

6. Cela posé, il est aisé de montrer comment est engendrée l'intégrale d'une équation satisfaisant aux conditions données.

On assujettira une courbe algébrique C de degré m à avoir d points doubles et r points de rebroussement, le nombre total de ces points étant celui que comporte le degré m, soit

$$d + r = \frac{(m-1)(m-2)}{2}. \tag{15}$$

On l'assujettira, en outre, à toucher h courbes données (analytiques ou non, et qui pourront n'être que des portions d'une seule et même courbe). La condition de toucher une courbe donnée pourra toutefois être remplacée par celle de passer par un point donné, et la condition de toucher p courbes données, par celle d'avoir avec l'une d'elles un contact d'ordre p (en un point non donné) ou un contact d'ordre $p - 1$ en un point donné.

Le nombre h sera choisi de manière que le nombre total des conditions ainsi imposées à C soit inférieur de deux unités à celui qui est nécessaire pour la déterminer. Comme l'existence d'un point double implique une condition et celle d'un point de rebroussement deux, ceci donne

$$d + 2r + h = \frac{m(m+3)}{2} - 2. \tag{16}$$

C dépendra alors de deux paramètres x, y et son équation aura la forme (2).

Si maintenant nous faisons passer la courbe C par un point fixe quelconque (a, b) du plan, nous aurons ainsi y en fonction de x

et l'équation différentielle à laquelle satisfait cette fonction quels que soient a, b, sera de second ordre.

Cette équation aura la forme (1) si le nombre des intersections communes à C et aux courbes (9) est $m^2 - 1$, c'est-à-dire, d'après ce qui précède, si

$$2d + 3r + h = m^2 - 1. \tag{17}$$

Or, cette relation est une conséquence des deux précédentes (15) *et* (16).

Nous formons donc bien ainsi, dans tous les cas, une équation répondant à la question.

Toutefois la démonstration de ce résultat n'est pas complète. L'équation (17) est rigoureusement établie; mais l'équation (16) ne repose que sur une simple énumération de conditions. Il serait nécessaire de s'assurer si (comme il est d'ailleurs bien vraisemblable) ces conditions sont bien idépendantes. Dans le cas contraire, si quelques-unes d'entre elles découlaient des autres, il faudrait, pour que la courbe C dépendît de deux paramètres seulement, lui imposer des conditions nouvelles, sur la nature desquelles les raisonnements précédents ne nous renseigneraient plus.

Il faudrait, d'autre part, étudier les singularités autres que les points doubles, les points de rebroussement et les contacts, en des points ordinaires, avec des courbes fixes. Mais il est à remarquer que, si l'objection précédente peut être écartée, autrement dit si l'énumération des constantes est légitime, la plupart de ces singularités *ne peuvent pas se présenter*. Si, en effet, on admettait la présence de l'une d'elles, en modifiant, en conséquence, les équations (15), (16) et (17), on tirerait de cette dernière une valeur de h qui, reportée dans la précédente, imposerait à C un nombre de conditions *supérieur* à $\frac{m(m+3)}{2} - 2$. Si l'on voulait rétablir l'égalité, il faudrait remplacer l'équation (15) par une autre assignant à C des singularités *plus nombreuses* que ne le comporte son degré, en sorte que cette courbe ne serait plus indécomposable [1].

---

[1] Soient i l'abaissement produit sur la classe par une singularité déterminée

Exception doit être faite pour un cas, celui des singularités situées en des points donnés. On peut, par exemple, assigner à C un point multiple d'ordre α $\left[\text{qui compte pour } \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \text{ points doubles dans l'équation (15)}\right]$ de situation donnée, le nombre h devant alors être diminué de $\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}$.

7. La forme de l'équation différentielle obtenue dépendra surtout du nombre de points de rebroussement des courbes C, c'est-à-dire du nombre r.

L'équation (1) s'obtient, en effet, en différentiant l'une quelconque des équations (8) : y'' a les valeurs (nécessairement identiques entre elles)

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} y'' &= -\frac{\frac{\partial r_1}{\partial x} + \frac{\partial r_1}{\partial y} y'}{\frac{\partial r_1}{\partial y'}}, \\ y'' &= -\frac{\frac{\partial r_2}{\partial x} + \frac{\partial r_2}{\partial y} y'}{\frac{\partial r_2}{\partial y}}. \end{aligned}\right.$$

Supposons que la courbe C n'ait pas de point de rebroussement. Alors les dénominateurs des fractions rationnelles (en y') qui forment les seconds membres des formules précédentes sont premiers entre eux, puisque les valeurs de y' qui annulent $\frac{\partial r_1}{\partial y'}$ et $\frac{\partial r_2}{\partial y'}$ donnent les points de rebroussement.

---

quelconque; g, le nombre d'unités dont cette même singularité abaisse le genre; c, le nombre de conditions qu'implique l'existence de cette singularité pour une courbe algébrique. Les raisonnements du texte prouvent que l'on doit avoir, pour les singularités de C, $\sum i + h = m^2 - 1$, $\sum c + h \leqq \frac{m(m+3)}{2} - 2$: par conséquent $\sum(i-c) \geqq \sum g$ $\left[\text{puisque } \sum g \leqq \frac{(m-1)(m-2)}{2}\right]$.

Or, pour les points doubles et de rebroussement, on a $i - c = g$, tandis que les singularités plus élevées donnent $i - c < g$.

Des considérations analogues s'appliqueraient aux points singuliers assujettis à décrire des courbes données.

Il en est autrement pour les singularités de situation entièrement données : un point α^{uple} à tangentes distinctes, situé en un point fixe, donnerait $g - \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}$, $c = \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}$ et absorberait α^2 intersections avec les courbes (9).

Donc les deux valeurs de y'' ne peuvent être égales qu'en étant entières en y'.

De plus, l'une au moins des fractions (18) aura son dénominateur de degré $2m-2$ (sans quoi la courbe C aurait un rebroussement correspondant à $y'=\infty$).

Or, les numérateurs des mêmes fractions sont de degré $2m+1$ au plus.

Donc enfin *l'équation différentielle* (1) *est de la forme*

$$y'' = Ay'^3 + By'^2 + Cy' + D,$$

où A, B, C, D *sont des fonctions de x et de y*, c'est-à-dire qu'elle appartient à la catégorie bien connue qui a fait l'objet des travaux de Lie, de M. R. Liouville et de M. Tresse, et qui comprend également l'équation différentielle des lignes géodésiques.

Cette forme sera donc celle de l'équation (1) toutes les fois que la courbe (2) n'aura pas de point de rebroussement et que (l'équation étant supposée analytique) une courbe intégrale quelconque ne correspond qu'à un système de valeurs de a et b. Cette dernière restriction est nécessaire, car, si l'on n'en tenait pas compte, les raisonnements précédents ne seraient applicables que moyennant la transformation effectuée aux n^{os} 2-3 et celle-ci pourrait faire apparaître, dans les courbes C, des points de rebroussement qu'elles ne posséderaient pas auparavant.

D'une manière générale, si p et q sont les degrés des polynomes P et Q qui forment, dans l'équation (1), le numérateur et le dénominateur de la valeur de y'' exprimée en fonction de y', le plus grand des deux nombres q et $p-3$, qui est un invariant vis-à-vis de toute transformation ponctuelle effectuée sur x et y et représente le nombre des courbes intégrales issues d'un point donné quelconque et ayant ce point comme point de rebroussement, est au plus égal au nombre de rebroussements d'une courbe C quelconque.

8. D'après ce qui précède, l'équation (1) admet des courbes intégrales jouissant de propriétés particulières : ce sont celles que l'on obtient en prenant pour a, b les coordonnées d'un point p situé sur l'une des courbes Γ auxquelles C est assujetti à rester constamment tangente. Il passera d'ailleurs une telle courbe

intégrale P par tout point du plan des xy, puisqu'il existe un point p sur toute courbe C.

Imaginons, comme cela est évidemment possible, qu'on ait pris pour coordonnée x le paramètre qui définit la position du point p sur Γ.

Soit P' une courbe intégrale voisine de P, correspondant à un point p' du plan des ab voisin de p, mais non situé sur Γ. Cherchons l'intersection de la courbe P' avec une courbe $y =$ const. Ceci revient à se donner y dans l'équation de la courbe C et à chercher celles de ces courbes (lesquelles ne dépendent plus que d'un paramètre) qui passe par le point p'.

Or, étant donnée une famille de courbes à un paramètre tangentes à Γ, on voit sans difficulté que *deux* d'entre elles passent par le point p' et tendent vers une même position limite lorsque p' tend vers p.

Donc la courbe P' est coupée par chacune des courbes arbitraires $y =$ const. en deux points voisins l'un de l'autre. Ceci exige que P' se compose de deux branches voisines toutes deux de P. Il pourra arriver que ces deux branches soient complètement distinctes l'une de l'autre; mais, en général, comme il est facile de s'en assurer, elles se continueront l'une l'autre, comme le font la branche ascendante et la branche descendante de la trajectoire d'un projectile lancé presque verticalement.

En un mot, les courbes P sont des courbes intégrales doubles, entièrement analogues aux *trajectoires mixtes* de M. Painlevé [1].

---

[1] Ce *Bulletin*, t. XXII, 1894, et *Leçons sur l'intégration des équations différentielles de la Mécanique*, p. 217 et suiv.