Bulletin de la S. M. F.

G. Jung

Construction de la chaînette par points, et division d'un arc de cette courbe en n parties proportionnelles à des segments donnés

Bulletin de la S. M. F., tome 4 (1875-1876), p. 114-119
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1875-1876__4__114_1>

Construction de la chaînette par points, et division d'un arc de cette courbe en n parties proportionnelles à des segments donnés; par M. G. Jung.

(Séance du 22 mars 1876.)

Il est connu que la chaînette est la courbe diamétrale de deux logarithmiques égales et symétriquement placées autour de son axe de symétrie. Cette propriété peut même servir à la construction de la chaînette par points, pourvu que les deux logarithmiques soient tracées d'avance.

Je me propose dans cette Note de donner de la chaînette une construction par points qui n'exige la construction effective que de l'une des deux logarithmiques et qui me paraît très-simple. Je donnerai aussi une règle pour la division d'un arc de chaînette en n parties égales et pour la réduction de son aire à une base donnée.

1. Soit

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right) \tag{1}$$

l'équation de la chaînette rapportée à son axe de symétrie (y) supposé vertical, et à un axe (x) horizontal et distant du point le plus bas A de la courbe, d'un segment égal à c.

Posant

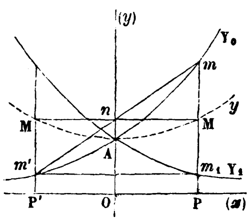
$$y_0 = ce^{\frac{x}{c}}, \quad y_1 = ce^{-\frac{x}{c}}, \tag{2}$$

on aura

$$y = \frac{y_0 + y_1}{2}.$$

Soient (*fig.* 1) m, m_1 et M les points des logarithmiques (2) et de

Fig. 1.



la chaînette (1) correspondant à la même abscisse $x = \mathrm{OP}$; et soit m' le point de la seconde logarithmique correspondant à l'abscisse $x = -\mathrm{OP} = \mathrm{OP'}$.

On a évidemment $m\mathrm{M} = \mathrm{M}m_1$ [1] et $m'\mathrm{P'} = m_1\mathrm{P}$; et, puisque le

---

[1] Si s est la longueur de l'arc de chaînette AM, on a évidemment

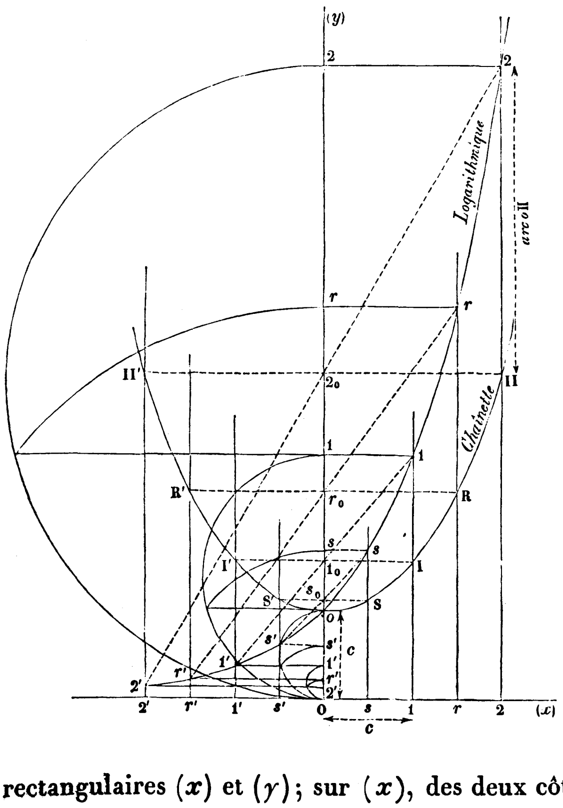
$$s = \frac{y_0 - y_1}{2} = m\mathrm{M} = \mathrm{M}m_1.$$

segment $m'm_1$ est rencontré par l'axe (y) à son point milieu, cet axe (y) rencontrera le segment mm' aussi à son point milieu n, et la droite mM sera parallèle à l'axe (x). Donc :

La corde qui unit deux points m, m' de la logarithmique $y_0 = ce^{\frac{x}{c}}$, correspondant à deux abscisses égales et opposées, rencontre l'axe (y) en un point n qui, projeté horizontalement sur les ordonnées extrêmes de la corde, fournit deux points symétriques M, m *de la chaînette* $y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right)$.

2. Sur ce théorème est fondée la méthode suivante pour la construction de la chaînette par points. Soit O (*fig.* 2) l'intersection

Fig. 2.



des axes rectangulaires (x) et (y); sur (x), des deux côtés de O, prenons les segments

$$x_0 = 0,\quad x_1 = \overline{O1} = c,\quad x_2 = \overline{O2} = 2.c,\ \ldots,\quad x_i = \overline{Oi} = i.c,$$
$$x'_1 = \overline{O1'} = -c,\quad x'_2 = \overline{O2'} = -2.c, \ldots,\quad x'_i = \overline{Oi'} = -i.c,$$

et sur (y) les segments

$$y_0 = \overline{Oo} = c,\quad y_1 = \overline{O1} = c.e,\quad y_2 = \overline{O2} = c.e^2, \ldots,\quad y_i = \overline{Oi} = c.e^i,$$
$$y'_1 = \overline{Oi'} = c.e^{-1},\quad y'_2 = \overline{O2'} = c.e^{-2}, \ldots,\quad y'_i = \overline{Oi'} = c.e^{-i},$$

e étant la base des logarithmes naturels (1).

Construisons les points $m_i\,(x_i, y_i)$ et $m'_i\,(x'_i, y'_i)$ (2), et tirons la corde $\overline{m_i m'_i}$ qui rencontre l'axe (y) au point n_i (3). Ce point se projette horizontalement sur les ordonnées de m_i et m'_i en M_i et M'_i (4) qui appartiennent à la chaînette.

3. *Interpolation.* — Soient i et $i+1$ les projections sur les axes (x) et (y) des deux points M_i et M_{i+1} ainsi construits de la chaînette, c'est-à-dire soient x_i, y_i et x_{i+1}, y_{i+1} les coordonnées des points de la logarithmique qui ont même abscisse que M_i et M_{i+1}, et que l'on se propose de trouver un autre point M_r de la chaînette compris entre ces deux derniers points (5).

Posons

$$x_r = \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \quad \text{et} \quad y_r = \sqrt{\frac{y_{i+1}}{y_i}};$$

le point r, extrémité de x_r sur (x), sera équidistant des points i et $i+1$; et, y_r étant la moyenne géométrique entre y_i et y_{i+1}, son ex-

(1) Pour la construction d'une série de segments égaux aux produits du segment c par les puissances d'un rapport $\frac{m}{n}$, *voir* Culmann, *Die graphische Statik*, 2e édition, p. 15 et suiv., et Cremona, *Elementi di Calcolo grafico*, p. 36 et suiv. Ici il suffit de prendre $m = 2{,}718n$, n étant un segment arbitraire.

(2) Dans la figure, ces points m_i, m'_i sont indiqués simplement par les indices i, i'.

(3) Dans la figure, ce point n_i est indiqué par i_0.

(4) Dans la figure, ces points M_i, M'_i sont indiqués par les indices i, i' en chiffres romains.

(5) Dans la *fig.* 2, on a interpolé les points S (et S') entre O et I (et les symétriques); R (et R') entre I et II (et les symétriques).

trémité r sur (y) sera telle que

$$\overline{Or}^2 = \overline{O.i} \times \overline{O.i+1}.$$

Les x_r, y_r ainsi obtenus sont les coordonnées d'un point m_r de la logarithmique, compris entre m_i et m_{i+1}.

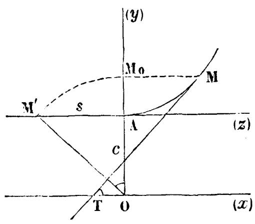
De la même manière on trouve les coordonnées du point m'_r de la logarithmique compris entre m'_i et m'_{i+1} et qui a son abscisse égale et opposée à celle de m_r : la corde $m_r m'_r$ rencontre (y) au point n_r ([1]) qui, projeté sur les ordonnées de m_r et m'_r, donne un point M_r (et le symétrique M'_r) de la chaînette compris entre M_i et M_{i+1} (M'_i et M'_{i+1} resp.).

4. De l'équation (1) on tire

$$s^2 = y^2 - c^2 \quad \text{et} \quad \frac{s}{c} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}}\right) = \frac{dy}{dx}.$$

Si donc (*fig.* 3) *on fait sur* (y) *la projection horizontale de*

Fig. 3.



M *en* M_0 *et si, avec un cercle de centre* O *et de rayon* $y = OM_0$, *on coupe la droite* (z) (tangente à la courbe en A) *en* M', *on aura*

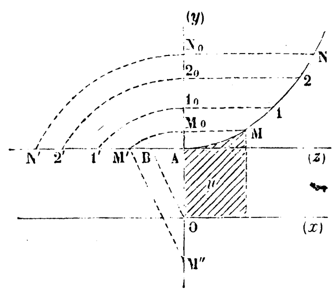
$$\overline{AM'} = \text{arc. AM}.$$

Et si, de M, on tire MT perpendiculaire à OM', *la droite* MT *sera la tangente à la courbe en* M.

([1]) Dans la figure, ce point n_r est indiqué par r_0.

5. *Division d'un arc MN de chaînette en parties proportionnelles à des segments donnés.* — Soient (*fig.* 4) AM′ = arc AM,

Fig. 4.



AN′ = arc AN les segments de (z) déterminés comme précédemment.

Divisons le segment M′N′ en n parties proportionnelles aux segments donnés, et soient $1', 2', \ldots, n'-1$ les points de division. Avec des circonférences de centre O et des rayons égaux à O1′, O2′, .., resp., coupons (y) aux points 1_0, 2_0, ..., n_0, -1 : ces points se projettent horizontalement sur la courbe en 1, 2, ..., $n-1$, et ces points divisent l'arc donné MN en n parties proportionnelles aux segments donnés.

6. *Réduction de l'aire de la chaînette à une base donnée b* [1]. — Soit u l'aire comprise entre les axes (x) et (y), la chaînette et l'ordonnée du point M; alors

$$u = cs.$$

Donc le segment $\overline{\text{AM}'}$ représente cette aire réduite à la base c.

Si la *base de réduction b* est différente de c, on prendra sur (z) le segment $\overline{\text{AB}} = b$, et l'on tirera du point M′ (*fig.* 4) la parallèle à OB qui rencontre (y) en M″. Le segment AM″ représentera évidemment l'aire u réduite à la base b.

---

(1) C'est-à-dire recherche d'un segment f, tel que bf soit égal à cette aire. *Voir* CULMANN, *l. c.*, p. 14, 85 et suiv.; CREMONA, *l. c.*, p. 50 et suiv.