BULLETIN DE LA S. M. F.

M. DE MONTCHEUIL

Séparation analytique d'un système de rayons incidents et réfléchis

Bulletin de la S. M. F., tome 31 (1903), p. 233-258
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1903__31__233_0>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SÉPARATION ANALYTIQUE D'UN SYSTÈME DE RAYONS INCIDENTS ET RÉFLÉCHIS;

Par M. M. DE MONTCHEUIL.

On peut considérer les deux familles de surfaces respectivement normales aux congruences d'un système de rayons incidents et réfléchis, comme les deux nappes de l'enveloppe d'une sphère dont le centre décrit la surface dirimante.

La séparation analytique de ces deux nappes est en général impossible. Elle l'est néanmoins dans quelques cas particuliers. De ce nombre est le cas que nous nous proposons d'étudier et que nous définirons comme il suit :

Soit donnée une sphère mobile, dont le centre se déplace sur une surface de translation, lieu du milieu d'un segment reliant deux courbes données C, C_1 ; *si nous prenons pour rayon de cette sphère la demi-somme, ou encore la demi-différence des arcs de ces courbes, comptés d'une origine fixe aux extrémités du segment, l'enveloppe de la sphère sera composée de deux nappes analytiquement séparables.*

Le problème de la séparation des deux nappes de l'enveloppe d'une sphère est étroitement lié, comme nous le verrons, à celui de la séparation des deux plans isotropes tangents en un point d'une courbe. Or, la solution de cette question dépend à son tour de la solution de l'équation différentielle, qui définit la valeur de l'arc d'une courbe donnée. Nous allons donc commencer par résoudre ce premier problème.

Résolution de l'équation $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. — J.-A. Serret (¹), et après lui M. Darboux (²), ont donné des formules qui résolvent cette équation au moyen d'expressions des fonc-

(¹) J.-A. SERRET, *Journal de Liouville*, t. XIII, p. 355.

(²) DARBOUX, *Sur une classe remarquable de surfaces et de courbes algébriques*, p. 14 et suiv.

tions x, y, z, s dégagées de tout signe de quadrature. *Nous nous proposons d'établir des formules qui jouissent de la même propriété, et soient en même temps rationnelles, par rapport à la variable et aux fonctions qui y figurent.*

On se rend compte que tout système d'expressions des fonctions x, y, z, s donnant la solution de l'équation proposée, doit renfermer trois fonctions d'une variable, l'une de ces fonctions pouvant d'ailleurs être prise pour variable. Du reste, les quantités x, y, z, s étant rationnelles, il doit en être de même de leurs différentielles. Supposons donc les différentielles dx, dy, dz définies au moyen d'expressions rationnelles; la question est ramenée à exprimer la quatrième différentielle ds, au moyen d'une expression de même nature.

Cette différentielle étant liée aux précédentes par la relation

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

ne saurait être carré parfait, quelle que soit la courbe donnée, si l'on ne fait pas un choix convenable des fonctions et de la variable qui la caractérisent. C'est ce choix qu'il s'agit de fixer.

Représentons-nous une courbe quelconque de l'espace, comme le lieu décrit par un point de la tangente à une courbe minima. Nous plaçant à ce point de vue, nous supposons la courbe définie par les trois éléments suivants : 1° par une fonction définissant la direction du plan osculateur de la courbe minima; 2° par une deuxième fonction, achevant de déterminer la position de ce plan; 3° par une dernière fonction F dont nous nous abstenons, pour le moment, de préciser la signification géométrique, mais n'ayant d'autre rôle que de déterminer la position du point décrivant sur la tangente.

L'introduction de ces trois éléments nous permet d'abord d'écrire les coordonnées de la courbe cherchée sous la forme suivante :

$$x = x_1 + \frac{1-u^2}{2}F,$$

$$y = y_1 + i\frac{1+u^2}{2}F,$$

$$z = z_1 + uF,$$

x, y, z désignant ici les coordonnées de la courbe minima, supposées exprimées par les formules de Weierstrass, tandis que u désigne la variable indépendante. Nous avons donc obtenu des expressions rationnelles des coordonnées de la courbe, par rapport aux fonctions et à la variable qui la définissent.

Il nous reste à étudier la forme de la différentielle ds de l'arc de la courbe, par rapport à ces éléments.

L'arc élémentaire ds étant situé dans le plan osculateur de la courbe minima peut se décomposer suivant deux directions : la tangente à la courbe minima et une droite de direction fixe par rapport à cette tangente, tracée dans le plan isotrope. La première composante est nulle; ds se réduit donc à ds_1. Or cette composante ayant une position fixe par rapport aux éléments de la courbe minima $\frac{ds_1}{du}$, et par suite $\frac{ds}{du}$ peuvent être considérées comme dépendant uniquement de la position du point sur la tangente. $\frac{ds}{du}$ pourra donc s'exprimer à l'aide de la seule fonction F. La différentielle de l'arc ayant ainsi cessé d'être représentée par la racine d'une forme quadratique des trois éléments de la courbe; la principale difficulté se trouve levée, et nous allons voir à l'instant que la dérivée $\frac{ds}{du}$ n'est autre que la fonction F, que nous désignerons par D'. Il nous suffit d'écrire les formules

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{1-u^2}{2}(C''+D') + uC' - C,\\ y &= i\left[\frac{1+u^2}{2}(C''+D') - uC' + C\right],\\ z &= u(C''+D') - C',\\ s &= D, \end{aligned}\right.$$

C désigne la fonction qui caractérise la courbe minima; C', C'' ses dérivées. On vérifie que la dernière formule est une conséquence des trois premières. Elle nous montre que si l'on considère une courbe quelconque de l'espace, comme définie au moyen des fonctions C, D de leurs dérivées et de la variable u, les quantités x, y, z, s seront exprimées au moyen de fonctions rationnelles par rapport à ces éléments. Les formules (1) résolvent donc complètement le problème.

Du système précédent on déduit le nouveau système

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
x &= \frac{1-u^2}{2}\left[\frac{\frac{du}{ds}\frac{d^2C}{ds^2}-\frac{dC}{ds}\frac{d^2u}{ds^2}+\left(\frac{du}{ds}\right)^2}{\left(\frac{du}{ds}\right)^3}\right]+\frac{u\frac{dC}{ds}-C\frac{du}{ds}}{\frac{du}{ds}},\\
y &= i\frac{1+u^2}{2}\left[\frac{\frac{du}{ds}\frac{d^2C}{ds^2}-\frac{dC}{ds}\frac{d^2u}{ds^2}+\left(\frac{du}{ds}\right)^2}{\left(\frac{du}{ds}\right)^3}\right]-i\frac{u\frac{dC}{ds}-C\frac{du}{ds}}{\frac{du}{ds}},\\
z &= u\left[\frac{\frac{du}{ds}\frac{d^2C}{ds^2}-\frac{dC}{ds}\frac{d^2u}{ds^2}+\left(\frac{du}{ds}\right)^2}{\left(\frac{du}{ds}\right)^3}\right]-\frac{\frac{dC}{ds}}{\frac{du}{ds}}.
\end{aligned}\right.$$

Si l'on considère C et u comme des fonctions données de s, les formules précédentes nous donneront les coordonnées d'une courbe quelconque, en fonction de son arc.

Elles vont nous permettre de déterminer toutes les courbes dont les coordonnées sont des fonctions rationnelles de leur arc. Nous allons en effet démontrer cette proposition : *La condition nécessaire et suffisante, pour que les coordonnées d'une courbe soient des fonctions rationnelles de leur arc, est que les fonctions* C, u *qui figurent dans les formules* (2) *soient elles-mêmes des fonctions rationnelles de cet arc.*

Il est évident que la condition est suffisante. Nous allons montrer qu'elle est nécessaire.

Des formules (2) on tire

$$(3)\qquad (1-u^2)\,dx+i(1+u^2)\,dy+2u\,dz=0,$$

$$(4)\qquad (1-u^2)x+i(1+u^2)y+2uz+2C=0.$$

Or, la première relation nous donne

$$u=-\frac{\frac{dx}{ds}+i\frac{dy}{ds}}{\frac{dz}{ds}\pm 1}.$$

On voit que x, y, z étant fonctions rationnelles de s, il doit en être de même de u.

Dès lors, la deuxième relation qui définit C en fonction de x,

y, z, u montre que cette fonction doit, elle aussi, être rationnelle en s.

Nous venons d'envisager les courbes de l'espace comme définies au moyen des fonctions C, D considérées comme données. Supposons qu'inversement une courbe soit définie par les deux équations

$$\varphi(x, y, z) = 0, \qquad \psi(x, y, z) = 0,$$

où x, y, z désignent ses coordonnées cartésiennes, et cherchons à déterminer les fonctions C, D relatives à cette courbe.

Nous avons le système

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz &= 0, \\ \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy + \frac{\partial\psi}{\partial z}dz &= 0, \\ (1-u^2)\,dx + i(1+u^2)\,dy + 2u\,dz &= 0. \end{aligned}$$

Éliminant les différentielles, on trouve

$$(1-u^2)\frac{\partial(\varphi\psi)}{\partial(yz)} + i(1+u^2)\frac{\partial(\varphi\psi)}{\partial(zx)} + 2u\frac{\partial(\varphi\psi)}{\partial(xy)} = 0. \tag{5}$$

Cette équation, jointe aux deux équations de la courbe, nous donnera x, y, z en fonction de u. Portant ces valeurs dans l'équation (4), nous connaîtrons C. Nous pourrons ensuite déduire D′ de la relation

$$z = u(C'' + D') - C'.$$

Nous avons ainsi obtenu sans quadrature les fonctions C, D′, qui seules figurent dans les expressions des coordonnées. Une quadrature sera seulement nécessaire pour obtenir la fonction D, c'est-à-dire l'arc de la courbe.

Supposons maintenant que les coordonnées de la courbe nous soient données en fonction d'une variable quelconque θ.

La relation

$$u = \frac{dx + i\,dy}{ds - dz}$$

nous donnera θ en fonction de u. Portant la valeur trouvée de θ dans les expressions des coordonnées, nous achèverons le problème comme précédemment.

Avant d'aller plus loin, nous croyons utile de reprendre l'équation différentielle que nous venons d'étudier et d'en donner une interprétation géométrique, qui nous permettra de déterminer presque immédiatement la solution de cette équation.

Posons

$$s = iz_1.$$

Dès lors, notre équation prendra la forme absolument symétrique

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 + dz_1^2 = 0. \tag{6}$$

Cela posé, nous allons établir la proposition suivante :

L'équation différentielle (6) *définit les coordonnées des deux points de rencontre d'une droite perpendiculaire au plan des x, y avec les tangentes à deux courbes minima quelconques, les points de ces courbes étant associés de telle sorte que les projections des tangentes sur le plan des x, y forment un angle droit.*

En effet, soient M, M_1 deux points associés des courbes minima; m, m_1 les projections de ces points sur le plan des xy; P, P_1 les points de rencontre des tangentes en M, M_1 aux courbes minima avec une même droite perpendiculaire au plan des x, y; p la projection commune des deux points. Par hypothèse, les projections mp, m_1p forment un angle droit.

Considérons la tangente MP. Comme caractéristique d'une développable isotrope, cette droite est perpendiculaire à toute droite tracée dans le plan qui enveloppe cette développable, et par suite elle est perpendiculaire à la trace de ce plan sur celui des x, y. Cette trace est dès lors perpendiculaire à la projection mp de MP, et par suite parallèle à la projection m_1p de M_1P_1. Il suit de là que le plan osculateur de la première courbe minima est parallèle à la projection m_1p de la tangente à la seconde courbe. Il est évident que le plan osculateur de la seconde courbe sera de même parallèle à la droite mp.

Cela posé, considérons l'élément infinitésimal ds décrit par le point P. Cet élément étant situé dans le plan osculateur de la courbe minima peut être considéré comme la résultante de deux composantes, l'une située sur la tangente MP, l'autre sur la parallèle à m_1p menée par le point P dans le plan isotrope. La première composante est de longueur nulle. L'élément ds sera donc égal à sa composante suivant la seconde direction. Mais celle-ci se trouvant parallèle à la droite $m_1 p$, on voit que ds a même valeur que sa projection sur la droite $m_1 p$. Pour une raison identique, l'élément linéaire ds_1 relatif à la courbe décrite par le point P_1 sera égal à sa projection sur la droite mp. Supposons, pour un instant, que les droites mp, $m_1 p$ représentent les axes des x et des y. Alors on aura

$$ds = dx, \qquad ds_1 = dy$$

au point considéré.

D'où

$$ds^2 + ds_1^2 = dx^2 + dy^2.$$

D'ailleurs la quantité $dx^2 + dy^2$ est indépendante de la position des axes des x et des y. On aura donc identiquement

$$ds^2 + ds_1^2 = (dx^2 + dy^2 + dz^2) + (dx^2 + dy^2 + dz_1^2) = dx^2 + dy^2.$$

D'où

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 + dz_1^2 = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Il nous est maintenant facile de déterminer les expressions des fonctions x, y, z, z_1.

Si nous supposons les coordonnées des courbes minima exprimées au moyen des formules de Weierstrass, la condition d'orthogonalité des projections des tangentes se traduira par la relation

$$u^2 + u_1^2 = 0,$$

u, u_1 désignant les deux variables relatives aux courbes minima.

Tenant compte de ce résultat, on vérifie que les quantités x, y, z, z_1 sont définies par le système

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{1+u^2}{2} F' + \frac{1+u_1^2}{2} F'_1, \\ y &= i\frac{1-u^2}{2} F' + i\frac{1-u_1^2}{2} F'_1, \\ z &= \mp i s_1 = - F \mp i u_1 F'_1, \\ z_1 &= \pm i s = - F_1 \pm i u F', \end{aligned}\right.$$

F, F_1 désignant ici deux fonctions arbitraires de u et de u_1; F', F'_1 les dérivées de ces fonctions.

Applications. — Cherchons un système de formules générales donnant les coordonnées et l'arc d'une courbe sphérique quelconque.

Soit R le rayon de la sphère sur laquelle est tracée la courbe. Du système (7) on tire

$$x^2+y^2+z^2 = u^2 F'^2 + F^2 \pm 2iu_1 FF'_1 = R^2.$$

D'où

$$F'_1 = \frac{u^2 F'^2 + F^2 - R^2}{2uF}.$$

Portant cette valeur de F'_1 dans les formules (7), il vient

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{1+u^2}{2} F' + \frac{1-u^2}{4uF}(F^2 + u^2F'^2 - R^2),\\ y &= i\frac{1-u^2}{2} F' + i\frac{1+u^2}{4uF}(F^2 + u^2F'^2 - R^2),\\ z &= \frac{u^2F'^2 - F^2 - R^2}{2F},\\ s &= \mp iz_1 = uF' - \int \frac{u^2F'^2 + F^2 - R^2}{2uF}\,du. \end{aligned}\right.$$

Les formules (7) permettent encore de déterminer les courbes dont l'arc est une fonction linéaire des coordonnées.

Elles peuvent être toutes définies par la relation

$$\alpha z + \alpha_1 z_1 = 0,$$

α, α_1 désignant des constantes.

Si l'on porte dans cette dernière équation les valeurs de z et de z_1, on trouve que les fonctions F, F_1 sont définies par les relations

$$\begin{aligned} F &= i\alpha u^{-i\frac{\alpha}{\alpha_1}} \int \varphi u^{1+i\frac{\alpha}{\alpha_1}} du,\\ F_1 &= -i\alpha_1 u_1^{i\frac{\alpha_1}{\alpha}} \int \varphi u_1^{1-i\frac{\alpha_1}{\alpha}} du_1. \end{aligned}$$

φ désigne ici une fonction arbitraire de u ou de u_1. Nous avons pris le signe supérieur dans les expressions de z et de z_1.

On peut prendre, par exemple,

$$\begin{aligned} F &= \frac{a}{u},\\ F_1 &= \frac{a_1}{u_1}, \end{aligned}$$

et l'on trouvera le système

$$\begin{aligned} x &= \alpha s^2 + \beta, \\ y &= -i\alpha\beta^2 + i\beta, \\ z &= s, \end{aligned}$$

α, β désignant des constantes. On obtient ainsi des courbes imaginaires tracées dans le plan isotrope

$$x - iy = 2\beta,$$

qui se projettent sur les plans des xz et des yz suivant des paraboles.

Donnons-nous maintenant une courbe, par ses équations en coordonnées cartésiennes, et cherchons les valeurs des fonctions C, D correspondantes.

Soit donnée, par exemple, une conique définie par le système

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) &= b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0, \\ \psi(x, y, z) &= z = 0. \end{aligned}$$

L'équation (5) devient ici

$$b^2(1+u^2)x + ia^2(1-u^2)y = 0.$$

Nous avons ainsi un système de trois équations qui nous permet de déterminer x, y, z en fonction de u.

Il vient

$$\begin{aligned} x &= \frac{a^2(1-u^2)}{\sqrt{a^2(1-u^2)^2 - b^2(1+u^2)^2}}, \\ y &= \frac{ib^2(1+u^2)}{\sqrt{a^2(1-u^2)^2 - b^2(1+u^2)^2}}, \\ z &= 0. \end{aligned}$$

Portant ces valeurs dans la relation

$$(1-u^2)x + i(1+u^2)y + 2uz^2 + 2C = 0,$$

on trouve

$$C = -\frac{\sqrt{a^2(1-u^2)^2 - b^2(1+u^2)^2}}{2}.$$

D' sera donné par la relation

$$D' = \frac{C' - uC''}{u}.$$

D'où l'on déduira D par une quadrature.

Posons

$$b = a.$$

Nous obtenons alors le système

$$x = -\frac{ia}{2}\,\frac{1-u^2}{u},$$

$$y = \frac{a}{2}\,\frac{1+u^2}{u},$$

$$C = -\,iau,$$

$$D = -\,ia\log u.$$

Nous avons ainsi déterminé les fonctions C, D, relatives au cercle de rayon a.

Séparation des deux plans isotropes tangents à une courbe. — Soient x, y, z les coordonnées d'une courbe quelconque de l'espace, s la longueur de l'arc; les deux équations des plans isotropes tangents à cette courbe peuvent s'écrire

$$(dx\,dz \mp i\,dy\,ds)(X-x) + (dy\,dz \pm i\,dx\,ds)(Y-y) - (dx^2+dy^2)(Z-z) = 0.$$

Si nous portons, dans cette relation, les valeurs de x, y, z, s et de leurs différentielles déduites du système (1), on obtient les deux équations suivantes

$$(9)\qquad \left\{\begin{array}{l} (1-u^2)X + i(1+u^2)Y + 2uZ + 2C = 0,\\ (1-v^2)X + i(1+v^2)Y + 2vZ + 2G = 0, \end{array}\right.$$

v et G étant des fonctions de u définies par les relations

$$(10)\qquad \left\{\begin{array}{l} v = u + \dfrac{2D'}{C''' + D''},\\[2mm] G = C + \dfrac{v-u}{2}\,[2C' + (v-u)(C''+D')]. \end{array}\right.$$

Ces formules étant établies, nous devons préciser ce que nous entendons par plans isotropes ou nappes d'enveloppes de sphères *analytiquement séparables.*

Supposons les coordonnées d'une courbe, exprimées au moyen d'une variable, de deux fonctions de cette variable et de leurs dérivées, nous dirons que les plans isotropes de la courbe sont analytiquement séparables quand les coordonnées de la courbe et les paramètres des deux équations des plans isotropes seront à la fois rationnels par rapport à ces éléments ; ou encore, lorsque les fonctions étant particularisées, ces mêmes coordonnées et ces mêmes paramètres seront à la fois rationnels par rapport à la variable. Les hypothèses faites sur la nature de la courbe et sur la forme des expressions de ses coordonnées indiqueront, pour chaque cas particulier, dans lequel de ces deux sens on doit prendre l'expression *analytiquement séparable.*

Si, aux coordonnées de la courbe, nous substituons les coordonnées de la surface, lieu du centre de la sphère mobile, et au groupe d'éléments formé d'une variable et de deux fonctions, celui des deux variables et des quatre fonctions qui figurent dans les expressions des coordonnées de la surface, notre définition s'appliquera d'elle-même aux équations des nappes de l'enveloppe de la sphère.

En rapprochant les équations (9) et (10), nous constatons que les équations des deux plans isotropes d'une courbe pourront toujours s'exprimer rationnellement par rapport à la variable u, aux fonctions C, D′ et à leurs dérivées, seules quantités qui figurent dans les expressions des coordonnées de la courbe.

De cette constatation nous déduisons la conclusion suivante :

Si l'on exprime les coordonnées d'une courbe par les formules du système (1), *les plans isotropes de la courbe seront analytiquement séparables.*

Ces mêmes équations nous permettent de déterminer l'ensemble des courbes unicursales, dont les plans isotropes sont analytiquement séparables.

Ces courbes ne sont autres que celles dont la différentielle de l'arc est rationnelle par rapport à la variable.

La condition est suffisante. On s'en assure, en remarquant la forme de l'équation en x, y, z, dx, dy, dz, ds écrite (p. 242), et qui définit les deux plans isotropes d'une courbe.

La condition est d'ailleurs nécessaire. En effet, d'après la définition, les quantités u, C, v, G, qui figurent dans les équations des plans isotropes, doivent être rationnelles par rapport à la variable. Dès lors, la seconde des équations (10) qui définit $D' = \frac{ds}{du}$

rationnellement en fonction de u, v, C, G et des dérivées de C par rapport à u, sera rationnelle par rapport à la variable. Elle donnera donc pour ds une expression rationnelle par rapport à cette variable.

En particulier, toutes les courbes unicursales en u auront leurs plans isotropes analytiquement séparables.

On les obtiendra en prenant pour C *et* D' *des fonctions rationnelles.*

Il n'est pas sans intérêt de se demander à quelle particularité les formules du système (1) doivent d'effectuer cette séparation des plans isotropes, que d'autres formules ne réalisent pas.

Imaginons une figure de l'espace, composée des éléments suivants : d'une sphère de rayon R et de centre x_0, y_0, z_0, d'un point M de coordonnées x, y, z situé sur une courbe quelconque, de la tangente à cette courbe au point M, d'un des plans tangents à la sphère passant par la tangente à la courbe, enfin d'une droite D perpendiculaire en M, à la tangente à la courbe et au rayon de la sphère passant par ce point. L'équation du plan tangent à la sphère que nous venons de considérer sera définie par une relation de la forme

$$F\left(X, Y, Z; x, y, z; x_0, y_0, z_0; R; \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right) = 0,$$

X, Y, Z désignant les coordonnées courantes du plan.

Cela posé, considérons la figure symétrique de la précédente par rapport à la droite D. Elle se composera évidemment des mêmes éléments, avec cette différence que le premier plan tangent à la sphère aura été remplacé par le second, et que la différentielle ds sera de sens contraire. On voit donc que, pour obtenir l'équation du second plan, il suffira de changer ds en $-ds$ dans l'équation du premier.

D'autre part, remarquons que les deux plans tangents à la sphère ne se succèdent d'une façon continue, en d'autres termes ne se confondent qu'aux points de la courbe où la tangente à celle-ci est en même temps tangente à la sphère. Il faudra donc, pour que ces plans soient séparables, que $\frac{ds}{du}$ dérivée de l'arc par rapport à la variable s'annule en un de ces points et soit continue dans le voisinage.

Supposons, maintenant, que la sphère de rayon R soit remplacée par le cercle de l'infini. Les deux plans tangents à la sphère deviennent les deux plans isotropes tangents à la courbe et les deux conditions précédentes subsistent.

Il faudra donc que l'un des points où la tangente à la courbe rencontre le cercle de l'infini $\frac{ds}{du}$ s'annule, ce qui, du reste, aura lieu dans le cas général. Il faudra, en outre, que cette fonction soit continue dans le voisinage de ce point. Or, si cette condition est nécessaire pour que les plans isotropes soient *géométriquement* séparables, la condition requise pour qu'ils le soient *analytiquement* sera que les formules définissant les équations des coordonnées de la courbe et des plans tangents traduisent cette propriété géométrique de la figure. C'est ce qui a lieu quand on prend les formules du système (1). En effet, les expressions des coordonnées de la courbe étant supposées rationnelles en u, la fonction $\frac{ds}{du} = D'$ sera continue dans le voisinage des points pour lesquels elle s'annulera. D'ailleurs, pour $D' = 0$, la formule qui donne v en fonction de u se réduit à $v = u$. Le système (1) indique donc bien le caractère essentiel des courbes à plans isotropes séparables. On voit par là comment elles se prêtent à la séparation analytique des équations de ces plans.

Le système (1) exprime les coordonnées de la courbe en fonction des éléments qui entrent dans l'expression du premier plan isotrope. Il est évident que l'on obtiendra des expressions de forme identique des coordonnées de la courbe, si l'on substitue aux éléments du premier plan isotrope ceux du second. Il suffira de remplacer, dans les formules du système (1), u, C, D et les dérivées de ces fonctions par v, G, E et les dérivées de ces nouvelles fonctions. Nous désignons par E la fonction qui joue le rôle de D dans le nouveau système. *A priori*, on obtiendra trois relations distinctes entre ces fonctions et ces variables. Il suffira pour cela d'identifier les deux systèmes de valeurs des coordonnées.

Nous avons déjà trouvé les deux relations (10). Il suffira d'y ajouter la relation évidente

$$D + E = 0,$$

E désignant la relation de l'arc de la courbe, dans le second système.

On remarquera, en passant, que ces trois relations sont réciproques et qu'ainsi l'on pourra passer d'un système à l'autre par de simples opérations algébriques. Les quantités u, C, D′ étant connues, nous obtiendrons v, G, E′ par des équations du premier degré et réciproquement.

Parmi les courbes dont les équations s'expriment rationnellement par rapport à u, nous pouvons signaler le cercle, et plus généralement toutes les courbes sphériques. Cela résulte des formules (8) qui définissent les coordonnées de ces courbes.

Séparation des deux nappes de l'enveloppe d'une sphère. — Nous venons de prendre une courbe isolée. Nous allons maintenant étudier le réseau des courbes génératrices d'une surface de translation et considérer le système des intersections des quatre plans isotropes tangents à deux de ces courbes en un même point de la surface.

Désignons par X, Y, Z les coordonnées d'une courbe quelconque de l'espace, exprimées au moyen des formules du système (1); par X′, Y′, Z′ ces mêmes formules où les quantités u, C, D auront été remplacées par les quantités v, G, — D. Désignons par X_1, Y_1, Z_1 ; X'_1, Y'_1, Z'_1 un couple analogue au précédent relatif à la seconde courbe.

Soient S, S′; S_1, S'_1 les couples d'expressions des arcs des deux courbes correspondant aux couples d'expressions des coordonnées des courbes.

Désignons enfin par x, y, z les coordonnées de la surface de translation du milieu d'un segment dont les extrémités décrivent les deux courbes. Chaque coordonnée de la surface pourra s'écrire sous quatre formes distinctes, et l'on aura, par exemple,

$$x = \frac{X + X_1}{2} = \frac{X' + X_1}{2} = \frac{X + X'_1}{2} = \frac{X' + X'_1}{2}.$$

Soient u_1, v_1 les deux formes de la variable indépendante relatives à la seconde courbe. Les quatre plans isotropes seront donnés par les équations

$$\begin{aligned}
&(1-u^2)(X-x)+i(1+u^2)(Y-y)+2u\,(Z-z)=0,\\
&(1-v^2)\,(X-x)+i(1+v^2)\,(Y-y)+2v\,\,(Z-z)=0,\\
&(1-u_1^2)(X-x)-i(1+u_1^2)(Y-y)+2u_1(Z-z)=0,\\
&(1-v_1^2)\,(X-x)-i(1+v_1^2)(Y-y)+2v_1(Z-z)=0.
\end{aligned}$$

Ces plans, par leurs intersections, détermineront quatre congruences de droites, dont l'une sera définie par le système

$$\frac{X-x}{u+u_1}=\frac{Y-y}{i(u_1-u)}=\frac{Z-z}{uu_1-1}.$$

On déduira les trois autres de celle-ci par la substitution successive ou simultanée des lettres v, v_1 aux lettres u, u_1.

Soient c, c', c'' les cosinus directeurs de l'intersection des deux plans isotropes relatifs aux variables u, u_1. On trouve la relation

$$c\,dx+c'\,dy+c''\,dz+d\left(\frac{S+S_1}{2}\right)=0.$$

On vérifie que la substitution de v à u et de v_1 à u_1 a pour effet de substituer $S'=-S$ à S, $S'_1=-S_1$ à S_1 dans la relation précédente.

De ces résultats nous déduisons les conclusions suivantes :

Les quatre intersections des quatre plans isotropes tangents aux deux courbes qui se rencontrent en un point d'une surface de translation forment quatre congruences, normales à quatre familles de surfaces.

Ces surfaces sont les enveloppes des sphères de rayons égaux à la demi-somme et à la demi-différence des arcs des courbes génératrices, dont le centre décrit la surface de translation. Ces quatre surfaces se groupent évidemment en deux couples formant chacun les deux nappes de chaque enveloppe.

Les propriétés des enveloppes de sphères nous permettent encore d'affirmer que les quatre congruences, intersections des quatre plans isotropes, formeront un double système de rayons incidents et réfléchis admettant la surface de translation pour surface dirimante.

Nous allons retrouver et compléter les résultats précédents en procédant comme il suit :

Soit donnée l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^4 \xi}{\partial u^2 \partial u_1^2} = 0, \tag{11}$$

ξ, u, u_1 désignant les coordonnées tangentielles de O. Bonnet. On vérifie que la développée moyenne ponctuelle relative aux surfaces définies par cette équation se compose de l'ensemble des surfaces de translation ([1]). On constate encore que le segment qui relie un point de la proposée au point correspondant de sa développée est égal à la demi-somme ou à la demi-différence des arcs de courbe de la surface de translation, ces arcs étant définis comme précédemment. On en conclut que les quatre familles de surfaces normales aux congruences de rayons incidents et réfléchis sont définies par autant de solutions de l'équation (11). Nous sommes ainsi amenés à chercher quatre solutions d'une équation de cette forme définissant les quatre nappes des deux enveloppes des sphères. Ces nappes étant déterminées, nous en déduirons aisément les deux systèmes de rayons incidents et réfléchis.

La solution de l'équation (11) est donnée par la formule

$$\xi = u A_1 + u_1 A + B + B_1,$$

A, B_1; A_1, B_1 désignant deux couples de fonctions respectives de u et de u_1.

De cette formule on déduirait sans peine la surface de translation, développée moyenne de la proposée, et les courbes génératrices de la développée. Mais, si l'on veut retrouver les coordonnées des courbes génératrices sous la forme même définie par le système (1), il faut modifier la forme de l'expression de ξ que nous venons d'écrire.

Écrivons les relations

$$\left\{\begin{aligned}
\xi_1 &= u_1 C + u C_1 - \frac{1 + u u_1}{2}(C' + C'_1 + S + S_1),\\
\xi_2 &= u_1 G + v\, C_1 - \frac{1 + v u_1}{2}(G' + C'_1 - S + S_1),\\
\xi_3 &= v_1 C + u G_1 - \frac{1 + u v_1}{2}(C' + G'_1 + S - S_1),\\
\xi_4 &= v_1\, G + v\, G_1 - \frac{1 + v v_1}{2}(G' + G'_1 - S - S_1).
\end{aligned}\right. \tag{12}$$

([1]) Thèse de Doctorat.

Ces quatre fonctions sont bien autant de solutions d'équations de la forme (11). D'ailleurs, si l'on cherche leurs développées moyennes, on trouve l'unique surface de translation précédemment définie exprimée successivement par les quatre formes que nous avons indiquées. Calculant les quatre plans isotropes des courbes génératrices de la surface de translation, on retrouvera les quatre congruences de droites déjà rencontrées. Nous avons donc bien déterminé les quatre nappes des deux enveloppes de sphères définies par l'équation

$$(X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2 = \left(\frac{S \pm S_1}{2}\right)^2.$$

Les formules (12) ayant été ainsi établies, il nous reste à déterminer les enveloppes de sphères dont les deux nappes sont analytiquement séparables.

On obtient immédiatement ce résultat, si l'on remarque que les quatre fonctions ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 sont toutes rationnelles par rapport à chacun des systèmes de variables et de fonctions u, C, S, u_1, C_1, S_1, par exemple. En effet, le système (10) donne v et G sous forme rationnelle des éléments du premier système. La même remarque s'applique évidemment aux quantités v_1 et G_1.

Si l'on suppose maintenant les quatre fonctions ξ exprimées au moyen des éléments u, C, S, u_1, C_1, S_1, on se rendra compte aisément que les enveloppes auront leurs nappes séparables toutes les fois que les fonctions C, S, C_1, S_1 sont respectivement rationnelles en u et u_1. Pour que les congruences de rayons incidents et réfléchis soient séparables, il suffira que C, S', C_1, S'_1 soient des fonctions rationnelles de u et de u_1. Nous désignons ici par S', S'_1 les dérivées de S et S_1.

Nous pouvons résumer les résultats trouvés dans la proposition suivante :

Soient données deux courbes quelconques P, P_1 définies par le système (1). Considérons les sphères mobiles ayant pour centre le milieu du segment qui relie les points de ces courbes et pour rayons la demi-somme et la demi-différence des distances des extrémités du segment à deux développantes des courbes P, P_1. Soient Q, Q_1 les courbes de mêmes paramètres que P, P_1 décrites par le milieu du segment. *Les enveloppes des deux sphères se* *composeront de quatre surfaces respectivement normales aux quatre congruences de droites intersections des quatre plans isotropes tangents aux courbes* Q, Q_1. *La surface de translation pourra être considérée comme la surface dirimante de deux systèmes de rayons incidents et réfléchis fournis par les quatre congruences. Pour que les congruences de rayons soient séparables, il faut et il suffit que* C, S′, C_1, S'_1 *soient des fonctions rationnelles de* u *et de* u_1. *Pour que les nappes des enveloppes des sphères soient elles-mêmes séparables, il faut en outre que* S, S_1 *soient des fonctions rationnelles de* u *et de* u_1.

Nous plaçant à un point de vue un peu différent, nous énoncerons encore cette proposition :

La condition nécessaire et suffisante pour que les deux nappes de la sphère précédemment définie soient analytiquement séparables est que les coordonnées des deux courbes génératrices de la surface de translation, lieu du centre de cette sphère, soient des fonctions rationnelles de leurs arcs.

La condition est suffisante. On s'en assure en calculant les coordonnées des nappes de la sphère et tenant compte du système (2), qui donne les coordonnées d'une courbe en fonction de son arc.

Cette condition est nécessaire. En effet, si les équations des coordonnées des nappes sont rationnelles, il en sera de même de l'équation de la sphère mobile

$$(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2=\left(\frac{S\pm S_1}{2}\right)^2.$$

Or, cette équation ne saurait être rationnelle à moins que x, y, z ne soient des fonctions rationnelles de S et de S_1, ces quantités étant prises pour variables indépendantes.

On obtiendra donc toutes les enveloppes des sphères de rayons $\frac{S\pm S_1}{2}$ *à nappes analytiquement séparables en prenant pour* u, C, u_1, C_1 *des fonctions rationnelles de* S *pour les premières, de* S_1 *pour les dernières.*

Surfaces réelles. — La condition nécessaire et suffisante pour que l'enveloppe de la première sphère et sa développée moyenne soient des surfaces réelles est que les fonctions C, S, C_1, S_1 soient des fonctions conjuguées. Ces résultats ont été démontrés ailleurs ([1]). La seconde enveloppe sera réelle dans des conditions analogues qu'on déduirait aisément des précédentes. Il faut seulement remarquer que les deux enveloppes ne sauraient être simultanément réelles.

Applications. — Donnons-nous les deux couples de fonctions

$$C = \alpha u^3, \qquad C_1 = \alpha_1 u_1^3,$$
$$D = \beta u^2, \qquad D_1 = \beta_1 u_1^2,$$

α, β, α_1, β_1 désignant des constantes.

Appliquant notre méthode, cherchons les courbes, les congruences de droites et les enveloppes de sphères correspondant aux fonctions données.

Si l'on porte les valeurs données des fonctions C, D, C_1, D_1 et les valeurs des dérivées qu'on en déduit, les formules (1) nous donneront pour définir les coordonnées de l'arc de la première courbe

$$\begin{aligned} X &= -(\alpha+\beta)u^3 + (3\alpha+\beta)u, \\ Y &= i(\alpha+\beta)u^3 + i(3\alpha+\beta)u, \\ Z &= (3\alpha+2\beta)u^2, \\ S &= \beta u^2. \end{aligned}$$

En affectant d'un indice les lettres qui figurent dans ces formules, on obtiendra les coordonnées de l'arc relatives à la seconde courbe.

Ces courbes, d'ailleurs imaginaires, sont les intersections de surfaces du second degré. La première courbe est définie par le système

$$(\alpha+\beta)(X-iY)Z + (3\alpha+\beta)(3\alpha+2\beta)(X+iY) = 0,$$
$$4(3\alpha+\beta)^2 Z - (3\alpha+2\beta)(X-iY)^2 = 0.$$

Nous avons vu que chaque courbe peut s'exprimer au moyen de deux systèmes de fonctions et de variables. Cherchons à déter-

---

(1) Thèse de Doctorat.

miner les éléments du second système en fonction de ceux du premier.

Appliquant les formules (10) nous trouvons

$$v = 3\frac{\alpha+\beta}{3\alpha+\beta}u,$$

$$G = \frac{(3\alpha+4\beta)(\alpha+\beta)}{3\alpha+\beta}u^3 = \frac{(3\alpha+4\beta)(3\alpha+\beta)^2}{27(\alpha+\beta)^2}v^3.$$

Il suffira de remplacer α, β par α_1, β_1 pour obtenir v_1, G_1. On voit que les deux groupes de fonctions sont de même forme et l'on vérifie qu'elles définissent les mêmes courbes.

Désignant par x, y, z les coordonnées de la surface de translation, par ρ le rayon de la première sphère, on trouve

$$x = \frac{1}{2}[-(\alpha+\beta)u^3+(3\alpha+\beta)u-(\alpha_1+\beta_1)u_1^3+(3\alpha_1+\beta_1)u_1],$$

$$y = \frac{i}{2}[\ \ (\alpha+\beta)u^3+(3\alpha+\beta)u-(\alpha_1+\beta_1)u_1^3-(3\alpha_1+\beta_1)u_1],$$

$$z = \frac{1}{2}[(3\alpha+2\beta)u^2+(3\alpha_1+2\beta_1)u_1^2],$$

$$\rho = \frac{S+S_1}{2} = \frac{\beta u^2+\beta_1 u_1^2}{2}.$$

La première congruence sera définie par le système

$$\frac{X-x}{u+u_1} = \frac{Y-y}{i(u_1-u)} = \frac{Z-z}{uu_1-1}.$$

La congruence des rayons réfléchis sera définie par le système

$$\frac{X-x}{v+v_1} = \frac{Y-y}{i(v_1-v)} = \frac{Z-z}{vv_1-1}.$$

Si l'on tient compte des valeurs trouvées pour x, y, z, v, v_1 en fonction de u, u_1, on voit que les deux congruences du système sont bien analytiquement séparées.

Le second système de rayons incidents et réfléchis donne lieu aux mêmes observations.

Il nous reste à déterminer les quatre nappes des deux enveloppes des sphères. En procédant comme nous l'avons indiqué, nous obtiendrons quatre fonctions de la forme

$$\xi = \gamma u^2 + \gamma_1 u_1^2 + u u_1(\delta u^2 + \delta_1 u_1^2),$$

γ, γ_1, δ, δ_1 désignant des constantes.

Ainsi donc les quatre nappes formeront bien autant de surfaces analytiquement séparables.

Considérons le cas particulier où l'on a

$$\alpha_1 = \alpha, \qquad \beta_1 = \beta.$$

Alors la fonction ξ_1 prend la forme

$$\xi_1 = -\frac{(\alpha+\beta)uu_1 + 3\alpha + \beta}{2}(u^2 + u_1^2).$$

La fonction ξ_4 prend une forme analogue.

Ces surfaces jouissent des propriétés suivantes :

Elles sont définies par des solutions communes aux deux équations

$$\frac{\partial^4 \xi}{\partial u^2 \partial u_1^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2}.$$

Elles ont leurs lignes de courbure planes.

On a en effet

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} du^2 - \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2} du_1^2 = \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2}(du^2 - du_1^2) = 0.$$

Si donc nous désignons par ρ, ρ_1 les paramètres de ces lignes, par c, c', c'' les cosinus directeurs de la normale à la surface, nous déduirons de l'équation précédente

$$\rho = u + u_1 = \frac{2c}{1 - c''},$$

$$\rho_1 = i(u_1 - u) = \frac{2c'}{1 - c''}.$$

Les deux nappes de la surface des centres sont séparables.

En effet, la seule irrationnelle qui figure dans les expressions des coordonnées de ces nappes est la quantité $\sqrt{\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2}}$. Mais, en vertu de la relation $\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2}$, cette quantité est ici rationnelle. Les coordonnées des deux nappes le seront donc également.

On trouve encore (k désignant une constante)

$$\rho = kz.$$

Le rayon de la sphère est donc proportionnel à l'ordonnée du centre de cette sphère.

Si nous posons

$$\gamma = -\frac{\alpha + \beta}{2},$$

ξ_1 prendra la forme

$$\xi_1 = \gamma(3 + uu_1)(u^2 + u_1^2) + \beta(u^2 + u_1^2).$$

Or, on vérifie que les équations

$$\zeta = (3 + uu_1)(u^2 + u_1^2),$$
$$\zeta' = u^2 + u_1^2$$

définissent respectivement la surface minima d'Enneper et la cyclide de Dupin. D'où l'on conclut que la surface définie par ξ_1 est le lieu d'un point partageant dans un rapport donné le segment qui relie deux points à normales parallèles d'une surface minima d'Enneper et d'une cyclide de Dupin. En faisant $\beta = 0$, nous aurons la surface minima; pour $\gamma = 0$, nous obtiendrons la cyclide.

La nappe associée à la cyclide de Dupin n'est autre que le plan des xy; par suite, l'une des congruences de rayons est formée de droites parallèles. D'ailleurs, la développée moyenne de cette surface est le paraboloïde équilatère défini par l'équation

$$z = a(x^2 - y^2),$$

a désignant une constante.

On en déduit cette proposition : *Un faisceau de rayons parallèles à l'axe d'un paraboloïde équilatère se réfléchit sur cette surface normalement à une cyclide de Dupin.*

Nous venons de rencontrer un système de rayons incidents et réfléchis dont l'une des congruences est formée de rayons parallèles. *Plus généralement, cherchons tous les systèmes dérivés des sphères mobiles précédemment définies qui jouissent de la même propriété.* Prenons pour plan perpendiculaire à la direction des rayons parallèles le plan des xy.

Soient X, Y, Z; X_1, Y_1, Z_1 les coordonnées respectives des courbes génératrices de la surface de translation, S, S_1 les longueurs de leurs arcs. Désignons encore par x, y, z les coordonnées du centre de la sphère, par ρ son rayon.

La sphère étant supposée tangente au plan des xy, on a ici

$$z = \rho.$$

La surface dirimante étant une surface de translation engendrée au moyen des courbes considérées, on a

$$(13) \qquad x = \frac{X + X_1}{2}, \qquad y = \frac{Y + Y_1}{2}, \qquad z = \frac{Z + Z_1}{2}.$$

On a d'ailleurs par hypothèse

$$\rho = \frac{S + S_1}{2}.$$

D'où l'on tire

$$\frac{S + S_1}{2} = \frac{z + z_1}{2} = \text{const.}$$

On tire de là

$$dS = dZ, \qquad dS_1 = dZ_1.$$

D'où

$$dX^2 + dY^2 = 0, \qquad dX_1^2 + dY_1^2 = 0.$$

Telles sont les équations qui doivent vérifier les courbes cherchées. On peut considérer comme équivalent au système précédent le système des deux équations

$$(14) \qquad X + iY = 0, \qquad X_1 - iY_1 = 0.$$

Ce sont donc des courbes planes tracées dans deux plans isotropes conjugués.

Formons l'équation qui définit la surface de translation lieu du centre de la sphère.

Des équations (13) et (14) on tire

$$x + iy = \frac{X_1 + iY_1}{2} = f_1(u_1),$$
$$x - iy = \frac{X - iY}{2} = f(u).$$

D'ailleurs Z et Z_1 sont aussi deux fonctions respectives de u et de u_1. On a donc

$$z = \varphi(x - iy) + \varphi_1(x + iy).$$

La surface de translation est donc définie par la solution générale de l'équation harmonique

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Il est inutile de chercher l'enveloppe de la sphère de rayon $\frac{S - S_1}{2}$, car ici la congruence des normales à cette enveloppe se réduit à deux ensembles de droites situées respectivement dans deux plans isotropes conjugués.

La nappe qui a pour normales les rayons non parallèles est définie par l'équation

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u \, \partial u_1} = 0.$$

Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant :

Si, par le milieu d'un segment dont les extrémités décrivent deux courbes quelconques tracées dans deux plans isotropes conjugués, on mène une droite parallèle à l'intersection des deux plans isotropes mobiles tangents aux deux courbes, on obtiendra un système de rayons qui se réfléchiront sur la surface lieu du milieu d'un segment suivant une congruence de droites parallèles.

Comme dernière application, nous allons nous donner les deux courbes et en déduire les fonctions avec les éléments géométriques qui en dérivent. Soient donnés les deux cercles de rayons conjugués α, α_1 définis par les équations

$$x^2 + y^2 = \alpha^2, \qquad x^2 + y^2 = \alpha_1^2.$$

L'application de la méthode exposée précédemment donnera

$$\begin{aligned} C &= i\alpha u, & C_1 &= i\alpha_1 u_1, \\ D &= i\alpha \log u, & D_1 &= i\alpha_1 \log u_1. \end{aligned}$$

Les coordonnées de la surface, lieu du milieu du segment qui relie les deux cercles, seront définies par le système

$$x = i\alpha\,\frac{1-u^2}{4u} + i\alpha_1\,\frac{1-u_1^2}{4u_1},$$
$$y = -\alpha\frac{1+u^2}{4u} + \alpha_1\,\frac{1+u_1^2}{4u_1},$$
$$z = 0.$$

Ces relations définissent un réseau de cercles tracés sur le plan des x, y.

On obtiendra les directions des quatre normales aux enveloppes de sphères en calculant v, v_1 au moyen des formules (10).

Il vient

$$v = -u, \qquad v_1 = -u_1.$$

On déduit de ces relations que les deux plans contenant respectivement les couples de rayons incidents et réfléchis de chaque système se coupent à angle droit.

On trouve pour rayons des sphères

$$\rho = \frac{S+S_1}{2} = i\frac{\alpha\log u + \alpha_1\log u_1}{2},$$
$$\rho' = \frac{S-S_1}{2} = i\frac{\alpha\log u - \alpha_1\log u_1}{2}.$$

Les fonctions G, G_1 ont ici pour valeurs

$$G = i\alpha\,u = -i\alpha\,v,$$
$$G_1 = i\alpha_1 u_1 = -i\alpha_1 v_1.$$

Les quatre nappes des enveloppes des sphères sont définies par les équations

$$\xi_1 = i\frac{\alpha+\alpha_1}{2}(uu_1-1) - i\frac{1+uu_1}{2}(\quad\alpha\log u + \alpha_1\log u_1),$$
$$\xi_2 = i\frac{\alpha+\alpha_1}{2}(vu_1-1) + i\frac{1+vu_1}{2}(\quad\alpha\log v + \alpha_1\log u_1),$$
$$\xi_3 = i\frac{\alpha+\alpha_1}{2}(uv_1-1) + i\frac{1+uv_1}{2}(-\alpha\log u + \alpha_1\log v_1),$$
$$\xi_4 = i\frac{\alpha+\alpha_1}{2}(vv_1-1) + i\frac{1+vv_1}{2}(\quad\alpha\log v + \alpha_1\log v_1).$$

Au moyen d'une translation effectuée parallèlement à l'axe des z, ces équations se ramènent au type

$$\xi = (1 + uu_1)(\beta \log u + \beta_1 \log u_1).$$

On peut déterminer les lignes de courbure de ces surfaces. Désignant par ρ, ρ_1 les paramètres de ces lignes, on trouve

$$\sqrt{\beta} \log u - \sqrt{\beta_1} \log u_1 = \rho,$$
$$\sqrt{\beta} \log u + \sqrt{\beta_1} \log u_1 = \rho_1.$$

D'où l'on déduit

$$\sqrt{\beta_1}\, S - \sqrt{\beta}\, S_1 = 2\sqrt{\beta\beta_1}\,\rho,$$
$$\sqrt{\beta_1}\, S + \sqrt{\beta_1}\, S_1 = 2\sqrt{\beta\beta_1}\,\rho_1.$$

Ces dernières formules montrent que le réseau des projections des lignes de courbure de chaque nappe sur le plan des xy rappelle par sa forme le réseau formé d'ellipses et d'hyperboles se coupant à angle droit.

Pour $\alpha = \alpha_1$, les cercles se confondent et l'on obtient des surfaces de révolution. Alors le réseau se réduit à un système formé de cercles concentriques et des rayons de ces cercles.