BULLETIN DE LA S. M. F.

C DE POLIGNAC

Note sur les substitutions linéaires

Bulletin de la S. M. F., tome 4 (1875-1876), p. 120-127
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1875-1876__4__120_0>

Note sur les substitutions linéaires; par M. C. de Polignac.

(Séance du 5 avril 1876.)

Si l'on répète indéfiniment la substitution linéaire

$$x_1 = \frac{bx+d}{ax+c}, \quad x_2 = \frac{bx_1+d}{ax_1+c}, \quad \ldots,$$

on aura toujours un résultat de la forme

$$\frac{Qx+S}{Px+R}.$$

L'expression générale de P, Q, R, S, en fonction de a, b, c, d, peut se mettre sous une forme assez simple.

Tout d'abord la nature même de l'opération par laquelle on passe d'une substitution PQRS à la suivante P′Q′R′S′ donne

$$\begin{aligned} P' &= bP + aR, & R' &= dP + cR,\\ Q' &= bQ + aS, & S' &= dQ + cS, \end{aligned}$$

mais ces formules peuvent se transformer. Je dis qu'on aura, quel que soit le rang de la substitution considérée,

$$\frac{P}{a} = \frac{Q-R}{b-c} = \frac{S}{d}.$$

Admettons le fait jusqu'à P, Q, R, S; les formules précédentes donnent les relations

$$\frac{P'}{a} = b\frac{P}{a} + R, \quad \frac{Q'-R'}{b-c} = \frac{bQ-cR}{b-c}, \quad \frac{S'}{d} = Q + c\frac{S}{d}.$$

Égalant d'abord la première et la troisième, on obtient

$$b\frac{P}{a} + R = Q + c\frac{S}{d} = Q + c\frac{P}{a}$$

par hypothèse, ou

$$(b-c)\frac{P}{a} = Q - R, \quad \frac{P}{a} = \frac{Q-R}{b-c};$$

donc

$$\frac{P'}{a} = \frac{S'}{d}.$$

Quant à la deuxième relation, elle se transforme ainsi

$$\frac{Q'-R'}{b-c} = \frac{(b-c)Q + c(Q-R)}{b-c} = Q + c\frac{S}{d}$$

par hypothèse, ou

$$\frac{Q'-R'}{b-c} = \frac{S'}{d};$$

la généralité est donc établie.

Au moyen de cette remarque, on exprimera P' et Q' en fonction de P et Q

$$(1) \qquad P' = aQ + cP, \quad Q' = bQ + dP;$$

R' et S' s'obtiendront ensuite en fonction de P' et Q'.

En général, on aura

$$P_{m+n} = P_m Q_n + R_m P_n, \quad Q_{m+n} = Q_m Q_n + S_m P_n,$$

formules dans lesquelles les indices sont permutables. Pour $m = n$, la première donne

$$P_{2n} = P_n (Q_n + R_n);$$

on trouvera encore

$$(Q'R' - P'S') = (bc - ad)(QR - PS),$$

d'où l'on conclura

$$(2) \qquad Q_n R_n - P_n S_n = (bc - ad)^n,$$

et les propositions suivantes s'établiront de proche en proche.

P_n, Q_n, R_n, S_n sont homogènes et de degré n en a, b, c, d;

P_n contient a en facteur commun et est symétrique par rapport à b et c;

Les lettres a et d n'entrent point seules dans $\frac{P_n}{a}$ et Q_n, mais toujours leur produit;

Q_n et R_n ne diffèrent que par le changement de b en c et *vice versa.*

Enfin de l'équation (2) on tire, pour $c=b$, $d=a$,

$$Q - P_n^2 = (b^2 - a^2)^n;$$

d'où l'on conclura, dans cette hypothèse,

$$Q_n + P_n = (b+a)^n, \quad Q_n - P_n = (b-a)^n.$$

D'ailleurs les formules générales donneront aisément, pour $d=0$, $c=b$,

$$P_n = nab^{n-1}, \quad Q_n = b^n.$$

L'ensemble de ces remarques nous conduit toujours, dans le cas de $c=b$, aux formules suivantes :

$$(3)\quad \begin{cases} P_n = a\Big[nb^{n-1} + \dfrac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} b^{n-3}ad \\ \qquad + \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5} b^{n-5}a^2d^2 + \ldots\Big], \end{cases}$$

$$(4)\quad Q^n = b^n + \frac{n(n-1)}{1.2} b^{n-2}ad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} b^{n-4}a^2d^2 + \ldots.$$

Pour avoir l'expression générale de P_n et de Q_n, il suffira de décomposer les coefficients des puissances de ad en fonctions de b et de c, d'après la loi de formation. Ces fonctions seront symétriques dans P_n.

Désignons par la notation

$$(b^m c^{m'})(ad)^k P_n$$

le *coefficient* de $b^m c^{m'}(ad)^k$ dans le développement général de P_n, on aura, eu égard aux formules (1),

$$(5)\qquad (b^m c^{m'})(ad)^k P_n = (b^m c^{m'-1})(ad)^k P_{n-1} + (b^m c^{m'})(ad)^k Q_{n-1},$$

$$(6)\qquad (b^m c^{m'})(ad)^k Q_{n-1} = (b^{m-1} c^{m'})(ad)^k Q_{n-2} + (b^m c^{m'})(ad)^{k-1} P_{n-2}.$$

Ces formules permettront de conclure de proche en proche les valeurs suivantes:

$$(7)\quad (b^m c^{m'})(ad)^k P_n = \frac{(m+1)(m+2)\dots(m+k)}{1.2\dots k}\,\frac{(m'+1)(m'+2)\dots(m'+k)}{1.2\dots k},$$

avec $m + m' + 2k + 1 = n$;

$$(8)\quad \begin{cases} (b^m c^{m'})(ad)^k Q_n = \dfrac{(m+1)(m+2)\dots(m+k)}{1.2\dots k} \\ \qquad\qquad \times \dfrac{(m'+1)(m'+2)\dots(m'+k-1)}{1.2\dots(k-1)}, \end{cases}$$

avec $m + m' + 2k = n$ [1].

En effet, admettons (hypothèse qui se justifiera dès les premiers essais) que l'on ait trouvé $(b^m c^{m'})(ad)^{k-1} P_{n-2}$ sous la forme d'un produit d'une fonction de m par une fonction de m', soit $f_{k-1}(m)$ par $f_{k-1}(m')$, fonctions identiques, puisque P est symétrique par rapport à b et c. Observant que m' est constant dans la formule relative à Q_{n-1}, on aura

$$\begin{aligned}
(b^m c^{m'})(ad)^k Q_{n-1} &= (b^{m-1} c^{m'})(ad)^k Q_{n-2} + f_{k-1}(m) \times f_{k-1}(m'),\\
(b^{m-1} c^{m'})(ad)^k Q_{n-2} &= (b^{m-2} c^{m'})(ad)^k Q_{n-3} + f_{k-1}(m-1) \times f_{k-1}(m'),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
(b c^{m'})(ad)^k Q_{n-m} &= (c^{m'})(ad)^k Q_{n-m-1} + f_{k-1}(1) \times f_{k-1}(m'),\\
(c^{m'})(ad)^k Q_{n-m-1} &= f_{k-1}(0) \times f_{k-1}(m');
\end{aligned}$$

d'où, en ajoutant,

$$(b^m c^{m'})(ad)^k Q_{n-1} = f_{k-1}(m') \times \sum_0^m f_{k-1}(m).$$

Remplaçant dans la formule relative à P_n et faisant cette fois varier m' jusqu'à zéro, on trouvera exactement de même, observant qu'ici

---

[1] P_n et Q_n sont homogènes et de degré n; mais P_n contient a en facteur commun, c'est pourquoi la somme $m + m'$ est moindre dans P_n que dans Q_n.

m est constant,

$$(b^m c^{m'})\,(ad)^k \mathrm{P}_n = \sum_0^m f_{k-1}(m) \times \sum_0^{m'} f_{k-1}(m') = f_k(m) \times f_k(m').$$

On retrouve donc, pour le coefficient du terme général en $(ad)^k$, une expression de la même forme que pour $(ad)^{k-1}$, ce qui permettra de répéter le calcul indéfiniment.

La valeur même de f s'obtiendra en faisant successivement $k=0$ et $k=1$. Le premier cas se traitera directement et de proche en proche au moyen des formules

$$\mathrm{P}' = a\mathrm{Q} + c\mathrm{P}, \quad \mathrm{Q}' = b\mathrm{Q} + d\mathrm{P},$$

et l'on verra aisément que les termes indépendants de ad sont :

Dans P_n, les termes du développement $\dfrac{b^n - c^n}{b - c}$;

Dans Q_n, b^n simplement.

En faisant ensuite $k=1$ dans la formule (6), on aura

$$(b^m c^{m'})\,ad\,.\,\mathrm{Q}_{n-1} = (b^{m-1} c^{m'})\,ad\mathrm{Q}_{n-2} + 1.$$

Faisant varier m jusqu'à zéro dans le premier membre, et ajoutant comme ci-dessus, on obtiendra

$$(b^m c^{m'})\,ad\mathrm{Q}_{n-1} = m + 1,$$

et, en remplaçant dans la formule (5), on aura de même

$$(b^m c^{m'})\,ad\mathrm{P}_n = (m+1)\,(m'+1).$$

On a donc

$$f_1(m) = m + 1;$$

on en conclut, eu égard aux remarques qui précèdent,

$$f_2(m) = \sum^m f_1(m) = \sum_0^m (m+1) = \frac{(m+1)(m+2)}{1\,.\,2},$$

$$f_3(m) = \sum_0^m f_2(m) = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1\,.\,2\,.\,3},$$

d'après les propriétés connues des nombres figurés, et ainsi de suite.

La comparaison des formules (7), (8) avec (3), (4) conduit aux égalités suivantes :

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{m=0}^{m'=0} \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+k)}{1.2\ldots k}\,\frac{(m'+1)(m'+2)\ldots(m'+k)}{1.2\ldots k}\\ &\quad=\frac{n(n-1)\ldots(n-2k)}{1.2\ldots(2k+1)},\end{aligned}\right.$$

avec $m+m'+2k+1=n$,

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{m=0}^{m'=0} \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+k)}{1.2\ldots k}\,\frac{(m'+1)(m'+2)\ldots(m'+k-1)}{1.2\ldots(k-1)}\\ &\quad=\frac{n(n-1)\ldots(n-2k+1)}{1.2\ldots 2k},\end{aligned}\right.$$

avec $m+m'+2k=n$.

On peut déduire des formules (7) et (8) une règle extrêmement simple.

La formule (7) donne chaque coefficient de $b^m c^{m'}(ad)^k$ sous forme d'un produit de deux nombres appartenant chacun à la $(k+1)^{\text{ième}}$ ligne horizontale du triangle arithmétique de Pascal, et dont la somme des rangs est constante. Pour faire ce produit, on peut prendre les nombres m sur la $(k+1)^{\text{ième}}$ colonne du triangle, et les nombre m' sur la $(k+1)^{\text{ième}}$ ligne, d'où la règle suivante :

Pour P_n. Écrire horizontalement et verticalement la $(k+1)^{\text{ième}}$ ligne du triangle de Pascal, puis former avec ces nombres une table de multiplication de Pythagore. Les hypoténuses qui joignent les nombres de même rang sur les deux côtés donneront les coefficients, facteurs de $(ad)^k$, dans le développement de P_n, pour toutes les valeurs de n.

Exemple. — Termes en a^2d^2 dans P_n. La troisième ligne du triangle arithmétique est

$$1 \quad 3 \quad 6 \quad 10 \quad 15 \ldots;$$

nous formons le tableau

n						
5 ...	1	3	6	10	15	... m'
6 ...	3	9	18	30	45	
7 ...	6	18	36	60		
8 ...	10	30	60			
9 ...	15	45				
.....	..	..				
	m					

et nous aurons, par exemple,

$$\mathrm{P} = a\left[\frac{b^7 - c^7}{b - c} + (\ldots)ad + (6b^2 + 9bc + 6c^2)a^2d^2 + \ldots\right].$$

A chaque puissance de ad correspond un tableau distinct qui sert pour toutes les valeurs de n.

La règle pour les termes du développement de Q_n est analogue.

Pour Q_n. Former la table de Pythagore avec la $(k+1)^{\text{ième}}$ colonne et la $k^{\text{ième}}$ ligne du triangle de Pascal : les hypoténuses donneront les termes facteurs de $(ad)^k$.

Exemple. — Termes en a^2d^2 dans Q_n. Nous prenons la troisième colonne de la deuxième ligne

n					
4 ...	1	2	3	4	... m'
5 ...	3	6	9	12	
6 ...	6	12	18		
7 ...	10	20	30		
.....	..	..	..		
	m				

et nous aurons

$$Q_6 = b_6 + (\ldots)ad + (6b^2 + 6bc + 3c^2)a^2d^2 + \ldots.$$

Les égalités (9) et (10) expriment que la somme des nombres de chaque hypoténuse dans les deux Tables donne un nombre figuré du triangle arithmétique.

On obtient aisément, par la règle précédente,

$$P_2 = a(b+c), \quad Q_2 = b^2 + ad;$$

$$P_3 = a(b^2 + bc + c^2 + ad),$$

$$Q_3 = b^3 + (2b + c)\,ad;$$

$$P_4 = a\left[\frac{b^4 - c^4}{b - c} + (2b + 2c)\,ad\right],$$

$$Q_4 = b^4 + (3b^2 + 2bc + c^2)\,ad + a^2d^2;$$

$$P_5 = a\left[\frac{b^5 - c^5}{b - c} + (3b^2 + 4bc + 3c^2)\,ad + a^2d^2\right],$$

$$Q_5 = b^5 + (4b^3 + 3b^2c + 2bc^2 + c^3)\,ad + (3b + 2c)\,a^2d^2;$$

$$P_6 = a\left[\frac{b^6 - c^6}{b - c} + (4b^3 + 6b^2c + 6bc^2 + 4c^3)\,ad \right.$$
$$\left. + (3b + 3c)\,a^2d^2\right],$$

$$Q_6 = b^6 + (5b^4 + 4b^3c + 3b^2c^2 + 2bc^3 + c^4)\,ad$$
$$+ (6b^2 + 6bc + 3c^2)\,a^2d^2 + a^3d^3;$$

$$P_7 = a\left[\frac{b^7 - c^7}{b - c} + (5b^4 + 8b^3c + 9b^2c^2 + 8bc^3 + 5c^4)\,ad \right.$$
$$\left. + (6b^2 + 9bc + 6c^2)\,a^2d^2 + a^3d^3\right],$$

$$Q_7 = b^7 + (6b^5 + 5b^4c + 4b^3c^2 + 3b^2c^3 + 2bc^4 + c^5)\,ad$$
$$+ (10b^3 + 12b^2c + 9bc^2 + 4c^3)\,a^2d^2 + (4b + 3c)\,a^3d^3;$$

. . . .

Remarque. — Dans ces formules, la somme des coefficients doit toujours être égale à 2^{n-1}; formules (3) et (4), ou directement par la loi même de formation.