BULLETIN DE LA S. M. F.

E. BOREL

Quelques remarques sur les ensembles de droites ou de plans

Bulletin de la S. M. F., tome 31 (1903), p. 272-275

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1903__31__272_0>

QUELQUES REMARQUES SUR LES ENSEMBLES DE DROITES OU DE PLANS;

Par M. Émile Borel.

La notion d'*ensemble* de points est aujourd'hui tout à fait classique; il semble que l'on soit moins habitué à considérer des ensembles dont les éléments sont d'autres éléments géométriques ([1]); cependant, certains de ces ensembles, par exemple les ensembles de droites dans le plan ou de plans dans l'espace, se présentent dans bien des recherches et leur étude systématique, d'ailleurs aisée, est presque aussi utile que l'étude des ensembles de points. Ayant été amené dans un Mémoire récent ([2]) à utiliser de tels ensembles, je voudrais en indiquer ici quelques propriétés très simples et très élémentaires, qui me paraissent de nature à pouvoir rendre des services dans de nombreuses questions ([3]).

Il importe tout d'abord de définir ce que l'on doit entendre par *droites infiniment voisines* d'une droite donnée; nous adopterons la définition *géométrique* suivante : *Étant donnée une droite fixe* D, *la droite variable* D' *sera dite infiniment voisine de* D *si, deux points quelconques* A *et* B *étant choisis sur* D, *on peut à tout nombre positif* ε *faire correspondre une position de* D' *telle que la distance à* D' *de chacun des points* A *et* B *soit inférieure à* ε. Il est aisé de voir que le choix des points A et B sur D peut être fait arbitrairement; si la définition est vérifiée avec un choix particulier de ces deux points, elle est vérifiée avec *tout* choix de ces deux points, pourvu qu'ils soient distincts.

([1]) Bien entendu, je ne veux pas dire que l'on n'a jamais considéré de tels ensembles; mais leur introduction ne paraît pas être classique, c'est-à-dire que l'on n'en parle pas habituellement sans explications préalables, comme on fait pour les ensembles de points.

([2]) *Contribution à l'analyse arithmétique du continu* (*Journal de Mathématiques*, 1903, p. 329-375). Je dois signaler une erreur d'impression dans ce Mémoire: p. 372, dans l'énoncé du théorème XVI*bis*, au lieu de *borné*, on doit lire *borné et fermé*.

([3]) On pourrait évidemment se borner à dire que tout être géométrique dépendant de n paramètres peut être représenté par un point dans l'espace à n dimensions; on ramène ainsi les ensembles quelconques aux ensembles de points. Mais ces indications générales demandent à être complétées dans chaque application particulière.

De même, *étant donné un plan fixe* P, *le plan variable* P′ *sera dit infiniment voisin de* P *si, trois points quelconques non en ligne droite* A, B, C, *étant choisis sur* P, *on peut à tout nombre positif* ε *faire correspondre une position de* P′ *telle que la distance à* P′ *de chacun des points* A, B, C *soit inférieure à* ε.

Les définitions précédentes sont *invariantes* par une transformation homographique quelconque, si, par cette transformation, la droite D ou le plan P ne sont pas *rejetés à l'infini*. Si D ou P sont à l'infini, on les ramènera à distance finie par une transformation homographique et, *par définition*, la droite variable D′ sera dite infiniment voisine de D, si la transformée homographique de D′ est infiniment voisine de la transformée homographique de D. De même pour les plans (1).

Étant donné un ensemble de droites (ou de plans), l'*ensemble dérivé* est, par définition, l'ensemble des droites (ou des plans) telles qu'il y ait des droites de l'ensemble infiniment voisines de ces droites (2). On dira qu'un ensemble est *fermé* (3) s'il contient tous les éléments de l'ensemble dérivé et qu'il est *parfait* s'il est identique avec l'ensemble dérivé.

Un ensemble est dit *borné* lorsque, étant donné un point quelconque O, il existe un nombre A tel que la distance du point O à une droite (ou plan) quelconque de l'ensemble soit inférieure à A; bien évidemment, si cette propriété est vérifiée pour un

---

(1) Il y aurait, à mon avis, grand intérêt à définir de même la notion de *limite* et toutes les notions qui s'y rattachent, en se plaçant à un point de vue *projectif*, c'est-à-dire en ne faisant pas jouer aux points à l'infini un rôle spécial. Je me propose de développer prochainement cette indication d'une manière systématique; il en résultera, à ce qu'il me semble, de grandes simplifications dans bien des questions d'Analyse.

(2) Il y a parfois avantage à considérer certains éléments de l'ensemble comme y figurant *une infinité de fois;* dans ce cas, ces éléments doivent être considérés comme appartenant à l'ensemble dérivé; mais il faut avoir soin de prévenir expressément lorsqu'on s'écarte ainsi de l'usage. *Voir* à ce sujet Hadamard, *La série de Taylor et son prolongement analytique*, p. 15, note au bas de la page, et Borel, *Leçons sur les fonctions entières*, p. 22, note au bas de la page.

(3) Dans mes *Leçons sur la Théorie des fonctions* j'avais introduit l'appellation : *relativement parfait* pour les ensembles *fermés* (que M. Jordan appelle *parfaits* et qui ont effectivement beaucoup d'analogies avec les ensembles parfaits; il est souvent indifférent qu'un ensemble soit fermé ou parfait); l'expression : *ensemble fermé* est plus usitée.

point O elle est vérifiée pour tous les points de l'espace (A peut varier avec le point choisi).

Pour qu'un ensemble soit borné, il est nécessaire et suffisant que son ensemble dérivé ne renferme pas la droite de l'infini, s'il s'agit d'un ensemble de droites dans le plan, et ne renferme pas le plan de l'infini, s'il s'agit d'un ensemble de plans dans l'espace.

On en conclut immédiatement que : *Si un ensemble de droites dans le plan est tel que son ensemble dérivé ne se compose pas de toutes les droites du plan, on peut le transformer en un ensemble borné par un ensemble homographique convenable;* il en est de même *pour un ensemble de plans de l'espace dont l'ensemble dérivé ne comprend pas tous les plans de l'espace.*

La question est plus délicate pour *un ensemble de droites dans l'espace;* tout ce que l'on peut immédiatement affirmer, c'est qu'un ensemble de droites peut être transformé en un ensemble borné par une transformation homographique, s'il existe un plan qui ne soit pas un *plan limite* de l'ensemble. On entend par *plan limite* tout plan tel que si l'on y trace trois droites D, D', D'', non concourantes, on peut à tout nombre positif ε faire correspondre une droite Δ de l'ensemble non située dans ce plan et telle que le moment de Δ par rapport à chacune des droites D, D', D'' soit inférieur à ε; un plan est aussi dit *plan limite* s'il renferme une infinité de droites de l'ensemble.

Mais on peut aller plus loin et montrer que tout plan limite P renferme au moins une *droite limite,* c'est-à-dire une droite appartenant à l'ensemble dérivé. Cela est évident si le plan limite renferme une infinité de droites de l'ensemble; dans le cas contraire, on peut se donner un nombre ε, et déterminer une droite Δ non située dans le plan P, telle que ses moments par rapport à D, D', D'' soient inférieurs tous trois à ε_1; comme ces moments ne peuvent être nuls tous les trois, on peut choisir un nombre positif ε_2 inférieur au plus grand d'entre eux et inférieur aussi à $\frac{\varepsilon_1}{2}$ et déterminer une droite Δ_2 non située dans le plan P et telle que ses moments par rapport à D, D', D'' soient inférieurs à ε_2; on choisira ensuite ε_3 inférieur au plus grand de ces moments et à $\frac{\varepsilon_2}{2}$ et ainsi de suite à l'infini. Désignons par A_1, A_2, ..., A_n, ..., les points d'intersection avec P de Δ_1, Δ_2, ..., Δ_n, ...; ces points sont à distance finie ou infinie; ils ont en tous cas au moins un point-limite A à distance finie ou infinie; si A est à l'infini nous le ramènerons à distance finie par une transformation homographique. Ceci fait, choisissons des nombres tendant vers zéro ε'_1, ε'_2, ..., ε'_n, ..., et soient A'_1, A'_2, ..., A'_n, ... des points choisis parmi les points A_1, A_2, ..., A_n, ..., et tels que l'on ait $AA'_n < \varepsilon_n$ (les points A'_n pourraient tous coïncider avec A); désignons par Δ'_1, Δ'_2, ..., Δ'_n, ... les droites qui correspondent à A'_1, A'_2, ..., A'_n, ..., et par δ'_1, δ'_2, ..., δ'_n, ... les droites passant par A et parallèles aux projections sur P de Δ'_1, Δ'_2, ..., Δ'_n, ... L'ensemble des droites concourantes δ'_1, δ'_2, ..., δ'_n, ... admet au moins une droite limite δ; on démontre aisément que cette droite est une droite limite de l'ensemble qui comprend Δ_1, Δ_2, ..., Δ_n,... On en conclut qu'*un ensemble de droites peut être transformé en un ensemble borné par une transformation homographique dans le cas et seulement dans le cas où il existe un plan ne renfermant aucune droite de l'ensemble dérivé* (il existe alors forcément une infinité de plans ayant cette propriété).

On voit, par ces exemples qu'il serait aisé de multiplier, quel intérêt propre peut avoir l'étude géométrique des ensembles de droites et de plans.