Bulletin de la S. M. F.

H. Picquet

Sur un nouveau mode de génération des surfaces du troisième degré

Bulletin de la S. M. F., tome 4 (1875-1876), p. 128-148
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1875-1876__4__128_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1875-1876, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Sur un nouveau mode de génération des surfaces du troisième degré; par M. H. Picquet.

(Séance du 19 avril 1876.)

1. Considérons le lieu des points de contact des tangentes menées d'un point P à toutes les coniques

$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = 0$$

d'un faisceau défini par les deux coniques

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0,$$

et dont toutes les courbes ont quatre points communs réels ou imaginaires. Ce lieu peut encore être défini comme le lieu des couples de points conjugués communs à toutes les courbes du faisceau, points situés sur les droites issues du point P. De cette double façon d'envisager le lieu, il résulte, par des considérations élémentaires de géométrie, que c'est une courbe du troisième degré passant

1° Par le point donné P;

2° Par les quatre points A, B, C, D réels ou imaginaires qui servent de base au faisceau : les tangentes en ces points sont les droites PA, PB, PC, PD;

3° Par le point de concours Q des polaires du point P par rapport aux coniques du faisceau;

4° Par les sommets F, G, H des trois couples de droites qui font partie du faisceau : les tangentes en ces points sont les droites QF, QG, QH et la quatrième tangente issue du point Q de la cubique à cette même courbe est la droite QP qui est tangente en P.

En comptant la tangente en un point pour deux points, on connaît donc en tout dix-sept points de la courbe, dont il est facile de voir que neuf au moins sont réels dans tous les cas. L'équation de la courbe est d'ailleurs

$$P_1 C_2 - P_2 C_1 = 0,$$

$P_1 = 0$ et $P_2 = 0$ étant les équations des polaires du point P par rapport aux coniques C_1 et C_2.

Cela étant rappelé, considérons une cubique fixe, et, par un point P de cette courbe, menons-lui quatre tangentes qui la touchent en A, B, C, D; imaginons le faisceau des coniques qui passent par ces quatre points réels ou imaginaires. Si, par rapport à ce faisceau et au point P, on détermine le lieu précédent, on aura une cubique qui aura avec la proposée les cinq points communs P, A, B, C, D, ainsi que les tangentes en A, B, C, D, qui sont les droites PA, PB, PC, PD, et qui, par conséquent, coïncidera avec elle (1). Elle passera donc par les points F, G, H, par le point Q, et sera tangente en F, G, H et P aux droites qui joignent ces quatre points au point Q. Nous obtenons ainsi une propriété connue de la cubique tangente en quatre points donnés à quatre droites concourantes (2), ainsi qu'un mode important de génération des courbes du troisième degré dû à Maclaurin (3), et dont nous avons dû donner la démonstration qui précède pour l'intelligence de ce qui va suivre.

2. Avant de poursuivre, indiquons deux théorèmes. Si le point P varie dans toute l'étendue du plan, l'équation de la cubique renferme au premier degré deux paramètres variables qui sont les coordonnées du point (1); on obtient donc un réseau linéaire : c'est le réseau des cubiques passant par les points A, B, C, D, F, G, H. Si le point se meut sur une droite, on n'a plus qu'un faisceau, et les deux autres points communs sont les points de contact de la droite avec les deux coniques du faisceau ABCD qui lui sont tangentes; d'où il résulte que :

Théorème I. — *Les quatre sommets d'un quadrilatère, les trois points de rencontre des couples de côtés opposés, et les deux points conjugués communs à toutes les coniques circonscrites, situés sur*

---

(1) Il se pourrait néanmoins que les neuf points (dont huit sont confondus deux à deux) communs à ces deux courbes fussent les neuf points communs aux cubiques d'un faisceau. Mais, comme nous l'a fait remarquer M. Darboux, cela est impossible; car si, pour achever de déterminer une cubique du faisceau, on se donne un point sur la droite PA, par exemple, cette droite, ayant quatre points sur la courbe, en fera partie tout entière : il resterait donc une conique à laquelle on pourrait mener du point P trois tangentes.

(2) Salmon, *Higher plane curves*, 1873, p. 129.

(3) *Voir* de Jonquières, *Mélanges de Géométrie pure*, p. 236, à la proposition XIII de la traduction du traité de Maclaurin *Sur les courbes du troisième degré*.

une droite arbitrairement choisie, sont les neufs points communs à un faisceau de cubiques.

Il résulte encore (1) de la seconde manière de considérer le lieu que :

Théorème II. — *Lorsque cinq couples de points conjugués, situés sur des droites concourantes, ne sont pas distincts, c'est-à-dire ne déterminent pas une conique, les dix points sont situés sur une même cubique passant par le point de concours des droites.*

3. Ainsi toute cubique peut être considérée d'une infinité de manières comme le lieu des points de contact des tangentes menées d'un point donné aux coniques d'un faisceau. Le point donné est sur la cubique et les coniques se coupent sur la cubique; le faisceau correspond au point, et l'on peut dire que c'est son *faisceau conjugué*. Outre les quatre points qui lui servent de base, chaque conique du faisceau coupe la cubique en deux points qui sont, par définition, les points de contact des tangentes issues du point P à la conique, et la corde qui les joint, polaire du point P, passe par le point fixe Q de la cubique, en vertu de la définition du point Q (1), lequel n'est autre d'ailleurs que le tangentiel de P ([1]).

La cubique est aussi le lieu des points conjugués communs à toutes les coniques du faisceau, points situés sur les droites issues du point P. Si donc on considère arbitrairement une de ces courbes, les deux points α et β où une sécante quelconque issue de P rencontre la cubique sont conjugués harmoniques par rapport aux points a et b où elle coupe la conique; et si, la sécante venant à tourner, le point α décrit la cubique, le point β, conjugué harmonique de α par rapport à a et b, décrira aussi la cubique. En d'autres termes, si, par rapport au pôle P et à la conique considérée, on applique à la cubique la transformation à laquelle M. Hirst a donné le nom d'*inversion quadrique* ([2]), la cubique se transformera en elle-même.

([1]) Le tangentiel d'un point d'une cubique est le troisième point de rencontre avec la courbe de la tangente en ce point. (Salmon, *ibid.*, p. 127.)

([2]) *On the quadric inversion of plane curves* (*Proceedings of the Royal Society*, 1865, p. 91).

A ce point de vue, on peut dire que la cubique est *anallagmatique* en donnant à ce terme un sens plus général que celui qu'il a reçu jusqu'à présent. Il suffirait, en effet, que la conique fût un cercle ayant pour centre le point P pour que la transformation indiquée ne différât pas de la transformation par rayons vecteurs réciproques. On peut dire aussi que la conique est pour la cubique une conique d'*anallagmasie* par rapport au pôle P.

On peut dès lors se demander quelles sont toutes les coniques qui remplissent cette condition par rapport à une cubique. On voit que, si le point P décrit la cubique, le faisceau conjugué sera affecté d'une indétermination du premier ordre et conséquemment engendrera un réseau, mais ce réseau ne sera pas linéaire. Considérons en effet un point α de la cubique : à chaque position du point P sur la cubique correspondra un faisceau conjugué dont une conique passera par le point α; de plus, lorsque le point P sera le tangentiel de α, α sera un des points communs aux coniques du faisceau. Toutes les coniques d'anallagmasie passant par le point α seront donc : 1° celles du faisceau conjugué du tangentiel de α; 2° celles qui correspondent individuellement à chaque position du point P sur la cubique. Parmi toutes ces courbes, si nous cherchons celles qui passent par un second point β de la cubique, il y a deux cas à examiner. Nous savons en effet que les points d'intersection d'une conique d'anallagmasie avec la cubique sont : 1° les quatre points communs au faisceau dont fait partie la conique considérée; 2° les points de contact des tangentes issues à la conique du pôle de transformation. Si donc β est un des quatre premiers, en général il n'en sera pas de même de α, car les tangentes en ces deux points n'iront pas concourir sur la cubique; et alors le pôle sera le tangentiel de β, fournissant un faisceau conjugué dans lequel une seule conique passe par le point α. Si β est un des deux derniers, alors α peut appartenir aux premiers et le pôle est de même le tangentiel de α, fournissant une seule conique passant par β. Enfin, si α et β sont les deux derniers, la corde $\alpha\beta$ passe par le tangentiel du pôle; si donc on cherche le troisième point Q d'intersection de $\alpha\beta$ avec la cubique, et si de ce point Q on lui mène quatre tangentes, les quatre points de contact sont des pôles répondant à la question et fournissant chacun une conique passant par les points α et β.

THÉORÈME III. — *Les coniques d'anallagmasie d'une cubique* *forment un réseau tel, que par deux points de la cubique passent six coniques du réseau. Les pôles correspondants sont les tangentiels de chacun des deux points et les points de contact des quatre tangentes menées à la cubique par le troisième point d'intersection avec cette courbe de la droite qui joint les points donnés.*

Il est évident que, sur ces six coniques, les quatre dernières seules satisfont à la condition que le pôle de transformation soit le pôle par rapport à la courbe de la droite qui joint les deux points donnés sur la cubique.

Dans le faisceau conjugué du point P se trouve la conique polaire de ce point, puisqu'elle passe par les points de contact des tangentes issues de P à la cubique; ses deux autres points d'intersection avec la cubique sont confondus en P. Ainsi :

THÉORÈME IV. — *Les coniques polaires des points de la cubique font partie du réseau d'anallagmasie.*

4. Supposons maintenant que l'on veuille passer de la transformation quadrique à la transformation par rayons vecteurs réciproques. Il faut pour cela chercher si, parmi les coniques d'anallagmasie, il n'y a pas de cercle ayant son centre au pôle. Puisque la cubique passe par les points de contact des tangentes issues du pôle à toute conique d'anallagmasie, on voit de suite qu'elle devra passer par les points circulaires de l'infini, qui sont les points de contact des tangentes menées au cercle par son centre; et puisque la corde de contact passe par un point fixe Q qui est le tangentiel du pôle P, on voit encore que ce point fixe devra être le troisième point à l'infini de la cubique, de sorte qu'il y aura quatre positions pour le pôle P, à savoir les quatre points de contact des tangentes menées par Q, c'est-à-dire parallèlement à l'asymptote réelle.

Réciproquement, si la cubique passe par les points circulaires de l'infini, il y a six coniques d'anallagmasie passant par ces deux points, c'est-à-dire six cercles; mais, seuls, les quatre précédents ont leur centre au pôle de transformation (3); ces quatre cercles constituent donc la solution de la question : c'est le théorème de M. Moutard.

Si maintenant le troisième point à l'infini de la cubique est pris pour pôle P, le faisceau conjugué aura pour base les centres des quatre cercles, et toutes les coniques du faisceau seront conjuguée par rapport aux points cycliques, qui sont les points d'intersection avec la cubique d'une certaine sécante issue du pôle P; toutes ces coniques seront donc des hyperboles équilatères : d'où il résulte que les centres des quatre cercles sont les points communs à un faisceau d'hyperboles équilatères, sommets d'un triangle et point de rencontre des hauteurs, ce qui est la seconde partie du théorème de M. Moutard; d'où il résulte aussi que : *Toute anallagmatique du troisième degré est le lieu des points de contact des tangentes menées parallèlement à l'asymptote réelle à toutes les hyperboles équilatères qui passent par les quatre pôles principaux* (¹). Et l'on peut ajouter, en prenant pour pôle l'un des pôles principaux :

THÉORÈME V. — *Toute anallagmatique du troisième degré peut être considérée comme le lieu des points de contact des tangentes menées d'un pôle principal à toutes les coniques qui passent par les quatre points d'intersection situés à distance finie de la courbe avec le cercle de transformation correspondant.*

Extension à l'espace des propriétés précédentes.

5. Cherchons le lieu des points de contact des tangentes menées d'un point P à toutes les surfaces du second degré

$$\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 = 0$$

appartenant à un faisceau défini par les deux surfaces

$$S_1 = 0, \quad S_2 = 0,$$

et qui passent toutes par une biquadratique gauche.

Les points de contact d'une droite avec les deux surfaces du faisceau qui lui sont tangentes sont les points conjugués communs à toutes les surfaces du faisceau situées sur cette droite. Le lieu peut

(¹) Ce théorème est dû à M. Fouret, qui nous l'a communiqué, et c'est dans le but de l'étendre à l'espace que ce travail a été entrepris. Pour saisir l'analogie du théorème qui en est la généralisation (10), nous énoncerons le premier ainsi qu'il suit : *Toute anallagmatique du troisième degré est le lieu des couples de points conjugués communs à toutes les hyperboles équilatères passant par les quatre pôles principaux, couples situés sur des parallèles à l'asymptote réelle.*

donc encore être défini comme le lieu des couples de points conjugués communs à toutes les surfaces du faisceau, points situés sur les droites issues du point P. De cette double façon d'envisager le lieu, il résulte :

1° Que c'est une surface du troisième degré passant par le point P. En effet, sur chaque droite issue du point P nous connaissons déjà deux points du lieu. D'ailleurs, pour que le point P appartienne au lieu, il faut que la surface correspondante passe par le point P; or il y a une surface du faisceau et une seule passant par ce point : c'est donc un point simple du lieu, qui dès lors se trouve être du troisième degré, puisqu'il a trois points sur toute droite issue du point P;

2° Que cette surface passe par la biquadratique B_4 et est tangente tout le long de cette courbe au cône C_4 ayant cette courbe pour base et le point P pour sommet; car, sur toute droite issue du point P et passant par un point α de B_4, les deux points conjugués communs sont confondus en α ;

3° Qu'elle passe par la droite D commune aux plans polaires du point P par rapport aux surfaces du faisceau; car, sur toute droite issue du point P et passant par un point Q de D, les deux points conjugués communs sont P et Q. Tout plan passant par cette droite D coupe en outre la surface cubique suivant une conique, courbe de contact du cône de sommet P circonscrit à la surface du faisceau pour laquelle le plan considéré est le plan polaire de P. Nous connaissons donc une des vingt-sept directrices de la surface, et le système des coniques correspondantes, lesquelles par définition même appartiennent au lieu. Deux autres directrices s'obtiendront en remarquant que, parmi les coniques en question, celle qui se trouve dans le plan de la droite D et du point P est la courbe de contact du cône de sommet P avec la surface du faisceau qui passe par le point P, cône qui se réduit au plan tangent de cette surface en P et dont la courbe de contact devient les deux génératrices suivant lesquelles le plan coupe la surface. Ainsi les deux génératrices en P de la surface du faisceau [P. B_4] qui passe par ce point appartiennent au lieu; leur plan passe par la droite D et coupe alors la surface cubique suivant trois droites; c'est un des quarante-cinq plans tritangents : d'ailleurs, ces deux génératrices étant sur la surface [P. B_4] rencontrent chacune en deux points la courbe gauche B_4; ce sont donc les deux sécantes doubles que l'on peut mener du point P à B_4, ou encore les deux génératriees doubles du cône C_4;

4° Qu'elle passe par les sommets F, G, H, K des quatre cônes du faisceau; car la droite PF, par exemple, peut être considérée comme tangente en F au cône de sommet F. Le plan du point F et de la droite D, plan polaire de P par rapport au cône considéré, coupe ce cône suivant deux droites qui, d'après ce qui précède (3°), sont sur la surface cubique; c'est donc le plan tangent en F, et nous avons ainsi découvert les cinq plans tangents que l'on peut mener à la surface par la droite D (DP, DF, DG, DH, DK), en même temps que onze directrices rectilignes de cette surface. Les seize autres s'obtiennent en remarquant que, si, par une des deux directrices D_1, D_2 qui se croisent en P et qui rencontrent deux fois B_4, on mène un plan quelconque, il coupera B_4 en deux autres points α et β, et par suite la surface, outre la directrice considérée, suivant une conique qui passera par α et β; si le plan est tangent à B_4 en γ, il renfermera la tangente de B_4 en γ, mais il renferme aussi la droite $P\gamma$ qui est également tangente à la surface, puisqu'elle est sur le cône C_4; le plan est donc tangent à la surface en γ, et la conique se réduit à deux droites qui se croisent en γ. Par chaque droite $D_1 D_2$, corde de B_4, on peut ainsi lui mener quatre plans tangents, ce qui fournit les seize autres directrices de la surface.

L'équation de la surface est d'ailleurs

$$P_1 S_2 - P_2 S_1 = 0,$$

$P_1 = 0$ et $P_2 = 0$ étant les équations des plans polaires du point P par rapport aux surfaces S_1 et S_2. Il suffit, en effet, pour l'obtenir, d'éliminer λ_1 et λ_2 entre l'équation d'une surface quelconque du faisceau

$$\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 = 0$$

et celle du plan polaire de P par rapport à cette surface

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = 0.$$

Nous résumerons ces résultats dans l'énoncé suivant :

Le lieu des points de contact des tangentes menées d'un point donné aux surfaces du second degré d'un faisceau est une surface *du troisième degré passant par le point donné, par la biquadratique commune aux surfaces du faisceau et tangente tout le long de cette courbe au cône ayant cette courbe pour base et le point donné pour sommet, passant par les sommets des quatre cônes du faisceau, et par la droite commune aux plans polaires du point donné par rapport à toutes les surfaces du faisceau. Les cinq plans tangents menés par cette droite à la surface sont les plans qui joignent la droite aux sommets des quatre cônes du faisceau et au point donné. Les vingt-sept directrices rectilignes de la surface sont : 1° la droite précédente; 2° les deux sécantes doubles que l'on peut mener par le point donné à la biquadratique, base du faisceau, et les huit droites suivant lesquelles les cônes du faisceau sont coupés par les plans joignant leurs sommets respectifs à la première droite; 3° seize droites, situées deux à deux dans les huit plans tangents que l'on peut mener à la biquadratique par les deux sécantes doubles issues du point donné.*

Toutes ces propriétés, sauf celle qui concerne le cône C_4 qui est circonscrit à la surface tout le long de la biquadratique B_4, ont été énoncées par Steiner, et démontrées par M. Cremona dans deux Mémoires remarquables qui ont fait époque dans l'histoire des découvertes relatives aux surfaces du troisième degré [1]. Steiner en a conclu sans démonstration l'existence des vingt-sept droites; il semble donc avoir été en possession de la proposition inverse, à savoir que, réciproquement, toute surface du troisième degré peut être engendrée de la façon précédente. M. Cremona a démontré cette réciproque sur laquelle nous allons revenir, en nous servant de la propriété du cône C_4, et nous obtiendrons alors un premier mode de génération des surfaces du troisième degré, auquel nous donnerons le nom de mode de génération *Steiner-Cremona*.

6. Considérons à cet effet une surface cubique fixe S_3. Le cône circonscrit à cette surface d'un point quelconque de l'espace est du sixième degré; il est tangent à la surface tout le long d'une

---

[1] Steiner. — *Ueber die Flächen drittèn Grades* (*Journal de Crelle*, t. 53, p. 134) et Cremona. — *Mémoire de Géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre* (même Journal, t. 68, p. 71 et 100).

courbe du sixième degré, et la coupe en outre suivant une autre courbe de même degré, lieu des points où chaque tangente issue du sommet rencontre la surface sans la toucher; la première courbe est également la courbe d'intersection avec la surface cubique de la surface du second degré S_2 polaire du point par rapport à la surface cubique. Supposons le point P sur S_3, et choisissons un des cent trente-cinq points de la surface qui sont à l'intersection de deux directrices rectilignes.

Comme pour tous les points de la surface, la surface polaire S_2 sera tangente à S_3 en P, et aura les mêmes lignes osculatrices; mais ici les lignes osculatrices de la première sont ses deux génératrices rectilignes, celles de la seconde sont ses deux directrices : c'est donc dire que la surface polaire de P passe par les deux directrices de S_3 en P; le reste de l'intersection sera donc une biquadratique, et une biquadratique à deux points doubles, car si elle en avait trois, la surface S_2 qui la renferme couperait en outre S_3 suivant deux droites qui ne se rencontrent pas, ce qui n'a pas lieu, puisque les deux directrices se croisent en P. Cette biquadratique B_4 a donc deux points doubles apparents, et les deux sécantes doubles issues de P qui est sur S_2 ne peuvent être que les deux génératrices rectilignes de S_2 en P, c'est-à-dire les deux directrices de S_3 qui se croisent en P. Le cône circonscrit du point P à S_3 se composera donc du cône C_4 qui s'appuie sur cette biquadratique B_4 et qui a les deux directrices pour génératrices doubles, et du plan de ces deux directrices, plan tangent en P, dont nous ferons abstraction.

Imaginons maintenant le faisceau des surfaces du second degré qui passent par la biquadratique B_4. Si l'on cherche le lieu des points de contact des tangentes menées à ces surfaces par le point P, on aura une surface cubique passant par le point P et inscrite dans le cône C_4 tout le long de la biquadratique B_4 (5). Cette surface coïncide avec la surface S_3; car, si on la coupe par un plan quelconque passant par le point P, ce plan coupera les deux surfaces suivant deux courbes du troisième degré passant par le point P et tangentes aux mêmes points à quatre droites issues de P, lesquelles coïncident par conséquent (1). On en conclut le mode de génération Steiner-Cremona :

Toute surface du troisième degré non réglée peut être consi-

dérée comme le lieu des points de contact des tangentes menées d'un point choisi sur la surface, à l'intersection de deux des vingt-sept directrices rectilignes, à toutes les surfaces du second degré d'un faisceau qui aurait pour base la biquadratique gauche suivant laquelle le cône circonscrit à la surface par le point considéré touche la surface. La surface peut être ainsi engendrée de cent trente-cinq façons différentes.

La surface passe par les sommets des quatre cônes du faisceau et par la droite D commune aux plans polaires de P par rapport aux surfaces du faisceau; chacune de ces dernières, outre la biquadratique B_4, coupe la surface S_3 suivant une conique dont le plan, plan polaire de P par rapport à une surface du faisceau, passe par D, ce qui donnerait lieu à un énoncé complétant le précédent [1]; mais on peut lui donner une forme plus générale, en ce sens que la biquadratique, base du faisceau, n'a pas besoin d'être la courbe de contact d'un cône circonscrit, et l'on peut dire :

Théorème VI. — *Lorsqu'un faisceau de surfaces du second degré a pour base une biquadratique située sur une surface du troisième degré, chaque surface du faisceau coupe en outre la dernière suivant une conique dont le plan passe par une des vingt-sept directrices restilignes, fixe.*

La première partie du théorème résulte immédiatement du théorème analogue de Géométrie plane; il suffit de couper toute la figure par un plan quelconque, variable.

7. Si nous revenons au cas précédent, nous voyons que la surface cubique pour laquelle nous venons d'obtenir un premier mode de génération peut être considérée comme le lieu des couples de points conjugués communs à toutes les surfaces du faisceau, points situés sur les droites issues du point P. Si donc on considère arbitrairement une de ces surfaces S_2, les deux points α et β où une sécante quelconque issue de P coupe la surface cubique sont conjugués harmoniques par rapport aux points a et b où elle rencontre

---

[1] Cremona. — *Mémoire de Géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre* (*Journal de Crelle*, t. 68, p. 100).

S_2, et si, la sécante venant à tourner, le point α décrit S_3, le point β, conjugué harmonique de α par rapport à a et b, décrira aussi S_3. En d'autres termes, si, par rapport au pôle P et à la surface du second degré considérée, on applique à S_3 la transformation quadrique, la surface S_3 se transformera en elle-même, et l'on peut dire que la surface S_3 est *anallagmatique* par rapport au pôle P et à la surface S_2, laquelle sera une surface d'*anallagmasie.*

D'après ce qui précède, ces surfaces forment cent trente-cinq faisceaux distincts. Chacune d'elles coupe la surface S_3, outre la biquadratique B_4, suivant une conique dont le plan passe par une directrice rectiligne D de S_3, et le pôle P correspondant est le point de contact de l'un des cinq plans tangents menés par D à S_3; enfin, par la définition même de S_3, la conique est la courbe de contact du cône de sommet P circonscrit à la surface du second degré considérée; de sorte que, par une conique C_2 de S_3, passent cinq surfaces d'anallagmasie, les biquadratiques B_4 correspondantes étant les courbes de contact des cônes circonscrits à S_3 de chacun des points de contact P des plans tangents menés par D à S_3. A chacune des directrices D correspondent ainsi cinq faisceaux d'anallagmasie, pour un desquels le pôle est un des cent trente-cinq points P. Ainsi :

Théorème VII. — *Les surfaces d'anallagmasie d'une surface du troisième degré forment cent trente-cinq faisceaux distincts. Il en passe en général cent trente-cinq par un point donné de l'espace; par une conique de la surface, il en passe cinq, et les pôles correspondants sont les points de contact des plans tangents menés à la surface par la directrice de la surface correspondant à la conique considérée.*

8. Considérons maintenant toutes les surfaces du second degré appartenant à un même système linéaire du quatrième ordre, surfaces dont l'équation générale serait

$$\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \lambda_3 S_3 + \lambda_4 S_4 + \lambda_5 S_5 = 0, \tag{1}$$

$S_1 = 0, \ldots, S_5 = 0$ étant les équations de cinq surfaces quelconques du système.

Un plan quelconque détermine dans le système un système plan de même ordre, dont les coniques renferment aussi quatre indéterminées, et conséquemment sont assujetties à une condition; on sait que cette condition est d'être harmoniquement circonscrites à une conique fixe C dont on peut écrire l'équation lorsque l'on connaît cinq coniques du système : c'est la conique harmoniquement inscrite à ces cinq courbes ([1]). Cela posé, supposons que le plan sécant vienne à tourner autour d'une droite fixe D, et cherchons la surface lieu des coniques C. Remettant à une autre occasion l'étude géométrique de cette surface qui exige au préalable une étude spéciale du faisceau, du réseau et des systèmes du troisième et du quatrième ordre, nous nous bornerons à constater analytiquement quel en est le degré. Rappelons pour cela que, si

$$A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + 2F\beta\gamma + 2G\gamma\alpha + 2H\alpha\beta = 0 \tag{2}$$

et

$$a_1 x^2 + b_1 y^2 + c_1 z^2 + 2f_1 yz + 2g_1 zx + 2h_1 xy = 0$$

sont les équations tangentielle et ponctuelle de deux coniques, la condition pour que la première soit harmoniquement inscrite à la seconde, ou la seconde harmoniquement circonscrite à la première, est

$$Aa_1 + Bb_1 + Cc_1 + 2Ff_1 + 2Gg_1 + 2Hh_1 = 0.$$

Si la première doit également être harmoniquement inscrite à quatre autres coniques, on aura, entre les coefficients tangentiels de cette courbe, quatre conditions analogues, et, en éliminant ces coefficients entre l'équation (2) et les cinq équations de condition, on aura, pour l'équation tangentielle de la conique harmoniquement inscrite aux cinq coniques données, l'équation

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 & \beta\gamma & \gamma\alpha & \alpha\beta \\ a_1 & b_1 & c_1 & f_1 & g_1 & h_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & f_2 & g_2 & h_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & f_3 & g_3 & h_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & f_4 & g_4 & h_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 & f_5 & g_5 & h_5 \end{vmatrix} = 0,$$

([1]) *Voir* notre Mémoire *Sur les invariants communs à deux fonctions quadratiques* (*Comptes rendus du Congrès de Lille*, 1874, p. 1211). Si une conique est harmonique-dans laquelle les mineurs correspondant aux éléments de la première rangée sont précisément, au signe près, les coefficients tangentiels A, B, C, 2F, 2G, 2H, et l'équation ponctuelle de la même courbe sera, comme on le sait, en faisant $z = 1$, pour revenir aux coordonnées cartésiennes,

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} A & H & G & x \\ H & B & F & y \\ G & F & C & 1 \\ x & y & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Revenons maintenant au système (1), et supposons que

$$a_1 x^2 + b_1 y^2 + c_1 z^2 + d_1 + 2 l_1 yz + 2 m_1 zx \\ + 2 n_1 xy + 2 p_1 x + 2 q_1 y + 2 r_1 z = 0$$

soit l'équation ponctuelle de la surface S_1. Considérons un plan quelconque

$$(4) \qquad z = \lambda y,$$

passant par l'axe des x; il coupe la surface suivant une courbe dont la projection sur le plan des xy a pour équation

$$a_1 x^2 + (b_1 + 2 l_1 \lambda + c_1 \lambda^2) y^2 + 2(m_1 \lambda + n_1) xy \\ + 2 p_1 x + 2(q_1 + r_1 \lambda) y + d_1 = 0.$$

On aura de même les projections sur le même plan des coniques d'intersection des quatre surfaces S_2, S_3, S_4, S_5 avec le même plan sécant, et l'équation tangentielle de la conique harmoniquement inscrite aux cinq premières, projection sur le plan des xy de la courbe génératrice du lieu dans le plan (4), s'en conclura comme il a été dit; l'équation ponctuelle (3) en résultera de même. Éliminant ensuite λ entre cette équation et l'équation (4), on aura la surface cherchée, lieu des coniques du système contrevariant du système (1), coniques situées dans les plans passant par l'axe des x.

---

ment circonscrite à une autre, celle-ci est harmoniquement inscrite à la première; et la conique harmoniquement inscrite à cinq coniques données joue dans le plan un rôle tout à fait analogue à celui que joue sur une droite le couple des points conjugués communs à deux couples donnés.

Mais on peut commencer par remplacer λ par sa valeur dans les coefficients A, B, C, F, G, H de l'équation tangentielle, de sorte que l'équation n'est autre que l'équation (3) dans laquelle A, B, 2H, 2G, 2F, C seraient les mineurs, pris alternativement avec le signe + et le signe —, correspondant aux éléments de la première ligne du déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 & \beta^2 & \alpha\beta & \alpha & \beta & 1 \\ a_1y^2 & b_1y^2+2l_1yz+c_1z^2 & y(n_1y+m_1z) & p_1y^2 & y(q_1y+r_1z) & d_1y^2 \\ a_2y^2 & b_2y^2+2l_2yz+c_2z^2 & y(n_2y+m_2z) & p_2y^2 & y(q_2y+r_2z) & d_2y^2 \\ a_3y^2 & b_3y^2+2l_3yz+c_3z^2 & y(n_3y+m_3z) & p_3y^2 & y(q_3y+r_3z) & d_3y^2 \\ a_4y^2 & b_4y^2+2l_4yz+c_4z^2 & y(n_4y+m_4z) & p_4y^2 & y(q_4y+r_4z) & d_4y^2 \\ a_5y^2 & b_5y^2+2l_5yz+c_5z^2 & y(n_5y+m_5z) & p_5y^2 & y(q_5y+r_5z) & d_5y^2 \end{vmatrix}.$$

Tous ces coefficients seront du dixième degré et homogènes en y et z; A, G, C seront divisibles par y^6, H et F par y^7, B par y^8. Finalement, l'équation (3), qui, développée, peut s'écrire

$$x^2(\mathrm{BC}-\mathrm{F}^2)+y^2(\mathrm{CA}-\mathrm{G}^2)+2xy(\mathrm{FG}-\mathrm{CH}) \\ +2x(\mathrm{HF}-\mathrm{BG})+2y(\mathrm{GH}-\mathrm{AF})+\mathrm{AB}-\mathrm{H}^2=0,$$

paraît être du vingt-deuxième degré; mais le binôme coefficient de y^2 est divisible par y^{12}, les coefficients de xy et de y par y^{13}, et ceux des termes indépendants de y par y^{14}, de sorte qu'en somme l'équation est divisible par y^{14}; elle s'abaisse au huitième degré et peut s'écrire, en désignant par A_1, B_1, C_1, F_1, G_1, H_1 les coefficients divisés chacun par la plus haute puissance possible de y,

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} A_1 & H_1 & G_1 & x \\ H_1 & B_1 & F_1 & 1 \\ G_1 & F_1 & C_1 & 1 \\ x & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

A_1, B_1, C_1 sont du quatrième degré, H_1 et F_1 du troisième, B_1 du second en y et z.

Ainsi la surface cherchée est du huitième degré; par suite l'axe des x est une directrice singulière du sixième ordre : elle renferme en outre dix autres directrices rectilignes. On sait en effet que le lieu des droites de l'espace sur lesquelles se trouvent deux points conjugués à toutes les surfaces du système (1) est une surface réglée du dixième degré [1]. Chacun de ces couples de points est une conique infiniment aplatie, harmoniquement inscrite au système; comme l'axe des x rencontre cette surface en dix points, il y aura dix plans passant par l'axe des x pour lesquels la conique génératrice de la surface (5) se réduit à deux droites confondues.

Si les surfaces du système (1) ont un point commun, toute droite passant par ce point les coupe suivant des couples de points conjugués par rapport à deux points confondus au point fixe, et peut dès lors être considérée comme conique infiniment aplatie, harmoniquement inscrite au système.

Il en résulte immédiatement que le plan passant par l'axe des x et le point fixe fera tout entier partie de la surface (5), laquelle enfin, s'abaissera au troisième degré, si toutes les surfaces (1) ont cinq points communs. La droite fixe qui est ici l'axe des x, étant une fois dans chacun des plans suivant lesquels se décompose la surface complète, demeure une fois sur la surface cubique, et chacun des cinq plans est tangent à la surface au point correspondant.

Théorème VIII. — *Le lieu de la conique harmoniquement inscrite aux coniques du système du quatrième ordre que l'on obtient en coupant par un plan tournant autour d'une droite fixe toutes les surfaces du second degré passant par cinq points est une surface du troisième degré passant par la droite fixe. Les cinq plans tangents menés à la surface par cette droite sont les cinq plans qui la joignent aux cinq points, lesquels sont les points de contact.*

9. Réciproquement, si l'on considère une surface cubique S_3 et une directrice D de cette surface, on sait que parmi tous les plans passant par cette droite, lesquels sont bitangents à la surface, il y en a cinq qui la touchent encore une fois en dehors de la droite. Si, relativement à la droite et aux surfaces du second degré passant par les cinq points de contact π, on cherche le lieu précédent, on obtiendra une surface cubique passant comme la première par la

(1) Darboux, *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, t. I, p. 357.

droite D, et tangente à cette surface aux cinq points π. Ces deux surfaces satisfont à dix-neuf conditions linéaires communes, savoir quatre provenant de la droite D et trois de chaque point de contact. Elles ne peuvent donc que coïncider, à moins que ces dix-neuf conditions ne soient pas distinctes. Faute de démonstration suffisamment rigoureuse, nous admettrons que ces conditions sont distinctes, sauf à justifier cette proposition par ses conséquences (10). La surface S_3 considérée peut donc être engendrée comme le lieu précédent, relativement à chacune de ses vingt-sept directrices, et l'on obtient ce nouveau mode de génération :

Théorème IX. — *Toute surface du troisième degré peut être considérée de vingt-sept façons différentes comme le lieu de la conique harmoniquement inscrite aux coniques du système du quatrième ordre obtenu en coupant par un plan tournant autour d'une droite fixe des surfaces du second degré ayant cinq points communs. La droite fixe est une des vingt-sept directrices, et les cinq points communs sont les points de contact des cinq plans tangents que l'on peut mener à la surface par cette droite.*

Il est bien entendu que la conique génératrice de la surface ne peut être réelle si la directrice correspondante est imaginaire; mais, comme il y a toujours au moins une directrice réelle, ce mode de génération peut convenir pour toutes les surfaces du troisième degré.

10. Cela posé, si l'on veut qu'une surface cubique soit anallagmatique dans une transformation par rayons vecteurs réciproques, il faut chercher s'il n'y a pas, dans les faisceaux d'anallagmasie (7), de sphères ayant leur centre au pôle de transformation. On voit d'abord que la surface devra passer par le cercle de l'infini, puisqu'elle est le lieu des points de contact des tangentes menées du pôle à toutes les surfaces du faisceau d'anallagmasie correspondant, et que, pour la sphère considérée en particulier, les points de contact des tangentes menées du centre sont sur le cercle de l'infini. Réciproquement, si la surface passe par le cercle de l'infini, il y a cinq surfaces d'anallagmasie passant par cette courbe, c'est-à-dire cinq sphères. Les pôles correspondants sont les points de contact des cinq plans tangents menés par la droite à l'infini de la sur-

face (7) et sont les centres des cinq sphères, puisque le cercle de l'infini est alors pour l'une d'elles la courbe de contact du cône circonscrit dont le sommet est le pôle de transformation (5).

Ainsi toute surface du troisième degré qui passe par le cercle de l'infini est anallagmatique par rapport à cinq pôles de transformation par rayons vecteurs réciproques. C'est la première partie du théorème de M. Moutard; la seconde consiste en ce que ces cinq points sont les sommets et le point de rencontre des hauteurs d'un tétraèdre dont les hauteurs se rencontrent : elle résulte de ce qui précède, si l'on admet notre mode de génération.

En effet, d'après ce mode de génération, tout plan passant par la droite à l'infini de la surface ou, si l'on veut, parallèle à la direction de plans déterminée par cette droite, coupe encore la surface suivant une conique harmoniquement inscrite à toutes les coniques suivant lesquelles il coupe toutes les surfaces du second degré qui passent par les cinq pôles, lesquelles coniques sont alors harmoniquement circonscrites à la première.

En particulier, le plan de l'infini coupe toutes ces surfaces suivant des coniques harmoniquement circonscrites au cercle de l'infini qui est la conique à l'infini de la surface cubique : c'est dire que toutes ces surfaces sont des hyperboloïdes équilatères ([1]). Pour tous les couples de plans passant par les cinq points, cette condition se traduit par la perpendicularité: donc, tout plan passant par deux des points, et par suite la droite qui joint ces deux points, sont perpendiculaires sur le plan des trois autres; donc quatre quelconques des cinq points sont les sommets d'un tétraèdre dont les hauteurs se rencontrent au cinquième.

Si, au contraire, on admet cette relation réciproque entre les positions des cinq points, elle confirme notre mode de génération, en tant qu'il paraîtrait reposer sur une hypothèse gratuite (9), et le démontre alors rigoureusement. Si, en effet, les cinq points satisfont à cette relation, toutes les surfaces du second degré qui les

([1]) *Voir* notre Mémoire déjà cité, p. 1233. Il y est démontré que, si la conique à l'infini d'une surface du second degré est harmoniquement circonscrite au cercle de l'infini, la somme des carrés des coefficients des variables, en coordonnées cartésiennes rectangulaires, est nulle.

renferment sont des hyperboloïdes équilatères ([1]), et par suite sont harmoniquement circonscrites à la conique à l'infini de la surface cubique. Au moyen d'une transformation homographique, ce théorème devient :

Théorème X. — *Si un plan coupe une surface du troisième degré suivant une conique et une droite, et si, par la droite, on mène les cinq plans tangents à la surface, toutes les surfaces du second degré passant par les cinq points de contact sont harmoniquement circonscrites à la conique* ([2]).

Ce qui n'est qu'une autre manière d'énoncer le mode de génération; il suffit, pour le voir, de faire tourner le plan autour de la droite. Appliqué à la conique à l'infini d'une surface anallagmatique, ce théorème devient la généralisation du théorème de M. Fouret, et peut s'énoncer ainsi :

Théorème XI. — *Toute surface anallagmatique du troisième degré peut être considérée comme le lieu de la conique harmoniquement inscrite aux hyperboloïdes équilatères passant par les cinq pôles principaux, conique située dans des plans parallèles dont la direction est déterminée par la droite à l'infini de la surface.*

Les pôles principaux sont les points de contact des cinq plans tangents menés à la surface par une de ses directrices rectilignes, qui est la droite à l'infini de la surface : ils font donc partie des cent trente-cinq points auxquels on peut appliquer le mode de génération Steiner-Cremona. On obtient ainsi la généralisation d'un théorème précédent (4) :

([1]) *Voir* notre Mémoire déjà cité, p. 1234. Si un hyperboloïde équilatère est circonscrit à un tétraèdre dont les hauteurs se rencontrent, il passe par le point de rencontre des hauteurs, d'où résulte la réciproque que nous invoquons. Elle peut d'ailleurs se voir directement en remarquant que, si cinq surfaces d'un système du quatrième ordre sont des hyperboloïdes équilatères, il en est évidemment de même de toutes les autres; or toutes les surfaces du second degré passant par les cinq points forment un pareil système dont tous les couples de plans étant rectangulaires sont des hyperboloïdes équilatères.

([2]) C'est-à-dire coupent le plan de la conique suivant une conique qui lui est harmoniquement circonscrite. (*Voir* notre Mémoire déjà cité, p. 1226.)

THÉORÈME XII. — *Toute surface anallagmatique du troisième degré peut être considérée comme le lieu des points de contact des tangentes menées d'un pôle principal à toutes les surfaces du second degré qui passent par la biquadratique, courbe d'intersection à distance finie de la surface et de la sphère de transformation correspondante.*

Nous ne terminerons pas sans faire ressortir l'importance du théorème sur lequel est basé le dernier mode de génération des surfaces du troisième degré. Il permet en effet de construire la surface du troisième degré qui passe par une droite et qui est tangente en cinq points à cinq plans menés par cette droite. Si, en effet, on considère les traces sur un plan fixe mené par la droite des couples de plans passant par les cinq points, on aura des couples de droites qui, étant harmoniquement circonscrits à la conique d'intersection, seront conjugués par rapport à cette courbe. L'une des droites d'un couple est la trace sur le plan du plan passant par trois des points donnés; la seconde est la trace d'un plan quelconque passant par la droite qui joint les deux autres. On a donc sur le plan considéré deux droites conjuguées dont l'une est fixe et l'autre est variable, en tournant autour d'un point : c'est dire que le point doit être le pôle de la droite fixe.

Ainsi le pentagone des cinq points de contact est *conjugué* à la conique cherchée, puisque la trace sur le plan de la conique du plan passant par trois quelconques des cinq points est la polaire du point, trace sur ce plan de la droite qui joint les deux autres, et l'on sait construire par la règle et le compas la conique située dans un plan donné et conjuguée à un pentagone gauche. Le théorème peut alors s'énoncer ainsi :

THÉORÈME XIII. — *Le lieu de la conique conjuguée à un pentagone gauche, conique située dans un plan tournant autour d'une droite fixe, est la surface du troisième degré passant par la droite et tangente à chaque sommet du pentagone au plan passant par ce point et par la droite fixe.*

Ce qui donne, pour le théorème de M. Fouret étendu à l'espace, ce nouvel énoncé :

THÉORÈME XIV. — *Toute surface anallagmatique du troisième* *degré peut être considérée comme le lieu de la conique conjuguée au pentagone des cinq pôles principaux, conique située dans des plans parallèles dont la direction est déterminée par la droite à l'infini de la surface.*